


FONDO PIZZOFALCONE



LEÇONS

D'ALGEBRE

Avra.

Imprimerie de Ch. Lahure (ancienne maison Crapelet)
rue de Vaugirard, 9, près de l'Odéon.

LEÇONS

D'ALGÈBRE

PAR

P. L. CIRODDE

ancien professeur de mathématiques au lycée Napoléon

OUVRAGE AUTORISÉ
PAR LE CONSEIL DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE

Deuxième Édition
modifiée conformément aux derniers programmes d'enseignement

PAR MM.

ALFRED ET ERNEST CIRODDE

anciens élèves de l'École polytechnique, ingénieurs des Ponts et Chaussées



PARIS
LIBRAIRIE DE L. HACHETTE ET Cie
RUE PIERRE-SARRAZIN, N° 14
(Près de l'École de Médecine)

1854



AVERTISSEMENT.

Cette seconde édition des LEÇONS D'ALGÈBRE diffère assez notablement de la première. Nous avons dû faire à l'ouvrage des additions importantes pour le mettre en harmonie avec les nouveaux programmes d'enseignement.

Quelques chapitres ont reçu des développements considérables, comme celui de la *Théorie des fonctions dérivées*. Le chapitre XII (*Des logarithmes et de leurs applications*) a été complété par l'exposition détaillée des usages de la *Règle à calcul*. Dans le chapitre XXII (*Résolution des équations numériques*), nous avons indiqué l'emploi que l'on peut faire des *considérations graphiques* pour la séparation des racines, et la marche à suivre pour la *résolution des équations transcendantes*.

Enfin, deux chapitres ont été entièrement ajoutés : ce sont le chapitre X (*Des progressions et des séries*) et le chapitre XXI (*Des différences finies*).

A. ET E. CIRODDE.

On a marqué d'une étoile (*) les articles qui ne sont pas d'une importance immédiate, et que l'on pourra omettre à une première lecture.

Les numéros placés entre parenthèses indiquent qu'il faut toujours se reporter aux articles correspondants.

Les renvois à l'*Arithmétique* se rapportent à la *onzième* édition.

LEÇONS

D'ALGÈBRE.

CHAPITRE PREMIER.

INTRODUCTION.

---

§ I. NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. L'ALGÈBRE *est une science qui a pour objet de trouver le système d'opérations à faire sur les quantités données dans l'énoncé d'un problème, pour en déduire les valeurs de celles que l'on cherche, d'après les conditions de la question.*

2. Le tableau de ces opérations se nomme *formule.*

3. Il suit de là que la formule à laquelle on parvient, en appliquant l'algèbre à la résolution d'un problème, doit renfermer implicitement la solution de toutes les questions qui ne diffèrent de celle qu'on s'est proposée que par les valeurs des *données.* Or, on ne peut atteindre ce but en considérant, comme dans l'Arithmétique, des nombres déterminés ; car, puisqu'on effectue à mesure toutes les opérations qui se présentent, le résultat final ne conserve aucune trace de ces opérations, et quand même on se contenterait de les indiquer, il pourrait être impossible de reconnaître les données, sur lesquelles elles doivent être effectuées, si quelques-unes avaient la même valeur. Pour éviter ces inconvénients, il faut donc représenter les données par des symboles sur lesquels on ne puisse *effectuer* aucuns calculs, et qui en outre soient susceptibles de repré-

senter tous les nombres possibles. Les lettres de l'alphabet remplissent ces deux conditions.

4. Proposons-nous pour exemple le problème suivant :

Étant données la somme et la différence de deux nombres, trouver chacun d'eux.

Si le plus petit des deux nombres demandés était connu, en lui ajoutant leur différence, on trouverait le plus grand : si donc je représente par s la somme des deux nombres cherchés, par d leur différence et par x le plus petit, le plus grand de ces nombres sera exprimé par $x+d$, et leur somme le sera par conséquent par $x+x+d$, ou, ce qui revient au même, par $2x+d$. Mais cette somme est déjà représentée par s; donc

$$2x+d=s.$$

Cette égalité signifie que s est la somme des deux quantités $2x$ et d; donc, si de s on retranche d, il restera $2x$: ainsi

$$2x=s-d,$$

et par conséquent $s-d$ étant le double de x, on aura

$$x=\frac{s-d}{2}.$$

Telle est l'expression du plus petit des deux nombres demandés. Celle du plus grand sera donc

$$\frac{s-d}{2}+d,$$

ou, en réduisant l'entier d et la fraction qui l'accompagne en une seule fraction,

$$\frac{s-d+2d}{2}, \text{ quantité qui est évidemment égale à } \frac{s+d}{2}.$$

Ces résultats traduits en langage ordinaire nous apprennent que *quand on connaît la somme et la différence de deux nombres, il faut, pour avoir le plus petit, retrancher la différence de la somme et prendre la moitié du reste; et que pour obtenir le plus grand, il faut ajouter la différence avec la somme et prendre aussi la moitié du résultat.*

Si, par exemple, on veut partager 11 en deux parties dont la différence soit 5, on verra que la plus petite de ces parties est égale à $\frac{11-5}{2}=\frac{6}{2}=3$, et que la plus grande vaut $\frac{11+5}{2}=\frac{16}{2}=8$; et en effet ces deux nombres 3 et 8 diffèrent de 5 unités et forment une somme égale à 11.

5. Prenons encore pour exemple la question suivante : *On a rempli un bassin contenant* a *litres, en y faisant couler successivement deux robinets, dont l'un fournissait* b *litres et l'autre* c *litres d'eau par minute. Le second est resté ouvert pendant* d *minutes de plus que le premier : pendant combien de temps chaque robinet a-t-il coulé?*

Désignons par x le nombre de minutes pendant lequel le premier robinet a coulé ; le temps pendant lequel le second est resté ouvert sera représenté par $d+x$. Comme le premier fournit b litres par minute, en x minutes il en aura versé $b.x$. De même, puisque le second laisse écouler c litres par minute, en $(d+x)$ minutes il aura amené $c.(d+x)$ litres d'eau, c'est-à-dire $(c.d+c.x)$ litres; car il est évident que, pour multiplier un nombre c par la somme de deux autres d et x, il n'y a qu'à le multiplier par chacun d'eux, et à ajouter ensuite les deux produits. La quantité d'eau versée par les deux robinets a donc pour expression

$$b.x+c.d+c.x;$$

mais elle a été représentée par a; donc,

$$b.x+c.d+c.x=a.$$

a étant ainsi la somme des trois quantités $b.x$, $c.d$, $c.x$, si on en retranche la seconde, il restera la somme des deux autres; donc

$$b.x+c.x=a-c.d,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(b+c).x=a-c.d \qquad [1],$$

car, par la même raison que ci-dessus, $b.x+c.x$ est le produit de $(b+c)$ par x. L'égalité [1] exprimant que $a-c.d$ est le pro-

duit de $(b+c)$ par x, on obtiendra la valeur du facteur x en divisant ce produit par le facteur $(b+c)$; donc

$$x=\frac{a-c.d}{b+c} \qquad [2].$$

6. On pourrait traduire cette formule en langage ordinaire, comme on a fait dans le problème précédent, et en déduire ainsi une règle pratique, pour résoudre toutes les questions dont les énoncés différeraient de celui du problème général que nous venons de traiter, seulement par les valeurs particulières des données; mais il vaut mieux, en général, conserver chaque formule sous sa forme algébrique, et y écrire, à la place des lettres qu'elle renferme, les nombres donnés dans chaque cas particulier : c'est ce qu'on appelle *substituer les valeurs données* ou *réduire la formule en nombres*.

Si, par exemple, le bassin contenait 272 litres, qu'il eût été rempli par deux robinets, dont l'un fournissait 8 litres et l'autre 6 litres d'eau par minute ; et que le second fût resté ouvert pendant 36 minutes de plus que le premier, on ferait $a=272$, $b=8$, $c=6$, $d=36$, et, en substituant dans la formule [2], on trouverait

$$x=\frac{272-6.36}{8+6}=\frac{272-216}{14}=\frac{56}{14}=4.$$

Le premier robinet a donc coulé pendant 4 minutes, et par conséquent le second est resté ouvert pendant $36'+4'=40$ minutes. En effet, ils auront ainsi versé, l'un $8^{l}.4=32$ litres, l'autre $6^{l}.40=240$ litres, et $32^{l}+240^{l}=272$ litres.

7. *On appelle* ÉQUATION *l'expression de l'égalité qui existe entre deux quantités, dont l'une au moins renferme une ou plusieurs inconnues.* Ainsi $2x+d=s$ et $b.x+c.d+c.x=a$ sont des équations. La partie qui est à gauche du signe $=$ se nomme le *premier membre* de l'équation, et celle qui est à droite en est le *second membre.* $2x+d$ est le premier membre et s est le second membre de l'équation $2x+d=s$.

8. Si les deux quantités, que le signe $=$ sépare, ne renfer-

ment aucune inconnue, ou si l'un des membres n'est que le résultat des opérations indiquées dans l'autre, on dit que la réunion de ces deux quantités forme une *égalité*. Ainsi, $2.3+5=11$ et $c.(d+x)=c.d+c.x$ sont des égalités.

9. *Si les deux membres d'une égalité sont exactement les mêmes, cette égalité prend le nom d'*IDENTITÉ *ou d'*ÉGALITÉ IDENTIQUE. Ainsi $8=8$, $x+2=x+2$ sont des identités.

10. Les *termes* d'une expression algébrique sont celles de ses parties qui sont précédées ou suivies de l'un des signes + ou —. Ainsi les termes de l'expression $a+b-c$ sont a, $+b$ et $-c$.

11. On dit qu'une quantité est *monome*, *binome*, *trinome*, et en général *polynome*, lorsqu'elle contient *deux*, *trois*, et en général plusieurs termes. $a+b-c$ est un trinome *.

12. *On appelle* COEFFICIENT *un nombre qui est placé comme facteur à la gauche d'une quantité algébrique.* Ainsi, dans l'expression $2x$, le chiffre 2 qui indique que la quantité x doit être répétée deux fois ou multipliée par 2, est le coefficient de x. De même, dans l'expression $\frac{3}{5}a$, la fraction $\frac{3}{5}$ est le coefficient de a; elle indique que cette quantité a doit être multipliée par $\frac{3}{5}$, ou qu'on doit en prendre les *trois cinquièmes*.

13. *On n'écrit pas le coefficient quand il est l'unité.* Ainsi, dans le binome $2x+d$, on peut dire que d a l'unité pour coefficient, parce qu'en effet $1.d=d$.

14. On a vu, dans l'Arithmétique, que l'EXPOSANT *d'une quantité est un nombre que l'on écrit à la droite de cette quantité et un peu au-dessus, pour indiquer combien de fois elle doit être prise comme facteur* **.

---

* Il est bon d'observer que l'on appelle aussi les monomes quantités *incomplexes*, et les polynomes quantités *complexes*.

** *Il est très-important de ne pas confondre le coefficient avec l'exposant;* car l'expression $3a$, dans laquelle 3 est le coefficient de a, est égale à $5+5+5=15$, si l'on suppose $a=5$, tandis que cette expression a^3, dans laquelle 3 est l'exposant de a, vaut, dans la même hypothèse, $5.5.5=125$.

15. *On n'écrit pas l'exposant quand il est égal à l'unité.* Ainsi a et a^1 sont deux expressions équivalentes.

16. Nous avons vu, dans l'Arithmétique, que l'on indiquait la multiplication de deux quantités, en les séparant par ce signe $\times$ ou par un *point;* mais, en algèbre, on écrit ordinairement les facteurs les uns à la suite des autres, sans interposition de signes. Ainsi, les expressions $a^2 \times b^3$, $a^2 . b^3$ et a^2b^3 signifient également que l'on doit multiplier le carré du nombre représenté par a par le cube de celui qui est désigné par b. Dans tous les cas, il faut avoir soin d'envelopper de parenthèses ou de couvrir d'un trait horizontal les facteurs qui sont polynomes; de sorte que pour indiquer la multiplication des quantités $2a^3 - b^3$ et $c^2 - 4de$, on devra écrire $(2a^3 - b^3)(c^2 - 4de)$ ou bien $\overline{2a^3 - b^3} . \overline{c^2 - 4de}$. Cette seconde manière d'indiquer la multiplication de deux polynomes est rarement employée.

17. *On appelle* TERMES SEMBLABLES *ceux qui sont composés des mêmes lettres affectées des mêmes exposants, quels que soient d'ailleurs leurs coefficients et leurs signes.* $+3ab^2c^3$, $-5ab^2c^3$, $-ab^2c^3$, etc., sont des termes semblables; mais les termes $+3ab^2c^3$ et $+3a^2b^2c^3$ sont dissemblables, parce que la lettre a n'a pas le même exposant dans l'un et dans l'autre.

18. *On dit qu'une quantité algébrique est* ENTIÈRE *lorsqu'elle ne renferme ni radical ni dénominateur.* Telles sont les quantités $2a^2b$, $3a^2 - bc$, etc.

19. *On appelle* QUANTITÉ PREMIÈRE *toute quantité entière qui n'est divisible par aucune autre quantité entière qu'elle-même ou l'unité.* Ainsi, $a^2 - b$ est une quantité première, mais $a^2 - b^2$ n'en est pas une, parce que, comme nous le verrons bientôt (51), elle est le produit de $a + b$ par $a - b$.

20. *Une quantité dont la valeur dépend de celles d'autres quantités, est dite une* FONCTION *de ces quantités.* Ainsi, en vertu de l'équation [1], x est une fonction des quantités a, b, c, d.

§ II. DES QUANTITÉS NÉGATIVES.

21. Dès l'origine de l'Algèbre, les géomètres, en voulant appliquer leurs formules à des cas particuliers, ont été conduits à soustraire une quantité d'une autre qui était plus petite qu'elle. Ainsi, par exemple, si dans la formule $x=a-b$, on suppose $a=3$ et $b=5$, on devra retrancher 5 de 3, ce qui ne se peut pas. Cependant, en considérant que, pour soustraire 5 unités d'un nombre donné, il suffit d'en retrancher d'abord 3 unités, puis de retrancher 2 unités du reste, au lieu d'écrire $3-5$, on aura l'expression équivalente $3-3-2$, qui se réduit évidemment à -2, et ce signe $-$ placé devant 2 montre que c'est ce dont il s'en faut que la soustraction puisse s'opérer tout entière. Mais s'il s'agit de la résolution d'un problème, que signifie un pareil résultat : la valeur de l'inconnue est -2 francs, -2 années, -2 hommes, etc.? Pendant longtemps ces expressions, que l'on a appelées des *quantités négatives*, ont été regardées comme n'étant susceptibles d'aucune interprétation, et ont en conséquence été rejetées comme ne répondant pas aux questions qui y avaient conduit.

22. Or, on conçoit, avec un peu de réflexion, que l'on a sans cesse à considérer, dans les quantités de la même espèce, non-seulement leur valeur absolue, mais encore leur *mode d'existence*. Par exemple, si une personne *possède* 50000f et si une autre *doit* 50000f; si une montre *avance* chaque jour de 12 secondes et si une autre *retarde* au contraire de 12″; si un événement est arrivé 200 ans *après* Jésus-Christ, et si un autre événement a eu lieu 200 ans *avant* J. C., etc.; on conçoit très-bien que ces nombres 50000f, 12″ et 200a sont pris ici dans des sens *directement contraires**.

* Remarquons cependant qu'il n'en est pas ainsi pour toutes les grandeurs concrètes, mais que le calcul de ces grandeurs se ramenant toujours à celui de quantités abstraites, il est nécessaire de regarder aussi ces dernières comme étant susceptibles de croître dans deux sens contraires. C'est ainsi que, dans l'arithmétique, on divise l'unité abstraite en parties égales, bien



La science des quantités ne remplirait donc qu'une partie de son but, si elle se bornait à les considérer sous le rapport unique de leur valeur absolue. Il faut encore qu'elle fournisse des symboles pour indiquer que deux quantités ont des modes d'existence identiques ou directement contraires. Il suffit, pour cela, de cette simple *convention*, savoir : que *toutes les quantités de la même espèce, qui ont le même mode d'existence, seront précédées du signe* $+$, et seront en conséquence appelées *positives*; *et que toutes celles qui auront un mode d'existence directement contraire à celui-là seront affectées du signe* $-$, et prendront ainsi le nom de *quantités négatives*. De telle sorte que si l'on convient de faire précéder du signe $+$ l'expression de la fortune d'une personne qui *a*, je suppose, 50000 francs, on affectera du signe $-$ celle d'une autre personne qui *doit* 50000f, et on dira en conséquence que l'une *possède* $+$ 50000f et que l'autre *possède* $-$ 50000f. De cette manière les formules acquerront une généralité qu'elles n'auraient pas sans cette convention.

23. Nous pouvons en donner immédiatement un exemple très-remarquable.

U M'' A M' B M V

Soient A et B deux points fixes situés sur la droite indéfinie UV, M un point qui se meut sur cette droite. Si l'on désigne par a, x et y les distances respectives AB, AM et BM, il est clair que quand le point M se trouvera à droite de B, on aura

$$x = a + y \quad [3];$$

mais que s'il vient occuper une position M' située entre A et B, on aura

$$x = a - y,$$

que certaines unités concrètes ne soient pas susceptibles de cette subdivision. Seulement, dans ce dernier cas, on doit rejeter les résultats fractionnaires, comme ne répondant pas à la nature de la question proposée. C'est ce qui arriverait si l'on demandait, par exemple, combien il faut d'hommes pour faire en 8 jours l'ouvrage que 15 d'entre eux ont fait en 17 jours.

et que s'il se trouve en M″, à gauche de A, sa distance à ce point sera donnée par l'équation

$$x = y - a.$$

Ainsi, il faut trois équations pour déterminer, dans tous les cas, la distance du point M au point A. Mais si l'on regarde comme positives les distances comptées dans le sens UV, et comme négatives celles qui seront mesurées dans le sens contraire VU, la première formule

$$x = a + y$$

déterminera la distance du point M au point A dans toutes les positions qu'il pourra occuper, et sera ainsi devenue générale. En effet, si ce point vient en M′, $x = +\mathrm{AM}'$, $y = -\mathrm{BM}'$, et cette équation devient ainsi

$$+\mathrm{AM}' = \mathrm{AB} - \mathrm{BM}',$$

ce qui est vrai. Car le second membre de cette équation signifie que le point mobile s'est éloigné du point A de la quantité AB, dans le sens UV, et qu'il a ensuite rétrogradé, dans le sens contraire, de la quantité BM′, de sorte que la distance au point A est actuellement AM′, laquelle doit être précédée du signe +, puisqu'elle est comptée dans le sens UV.

Si le point M est en M″, on a $x = -\mathrm{AM}''$, $y = -\mathrm{BM}''$, et la formule [3] devient

$$-\mathrm{AM}'' = +\mathrm{AB} - \mathrm{BM}'',$$

égalité identique, par la même raison que tout à l'heure.

24. Lorsqu'un terme n'est précédé d'aucun signe, on le regarde comme précédé du signe +.

25. Il résulte des idées que nous attachons aux *quantités positives* et aux *quantités négatives*, que l'on doit distinguer deux sortes de *zéro :* le ZÉRO ABSOLU, symbole d'un pur néant, et au-dessous duquel rien ne saurait en conséquence se trouver, et un ZÉRO-LIMITE qui est le point de départ des quantités de même espèce soit positives, soit négatives. C'est, par exemple,

le zéro du thermomètre ; c'est l'époque d'où partent les chronologistes pour fixer la date des événements postérieurs et antérieurs à cette époque, etc. (GERGONNE, *Annales de Mathématiques.*)

26. Cela posé, si l'on imagine toutes les quantités d'une même espèce quelconque disposées par ordre de grandeur sur une même ligne depuis zéro jusqu'à l'*infini positif*, c'est-à-dire jusqu'à la limite des grandeurs positives, en allant de gauche à droite, et depuis *zéro* jusqu'à l'*infini négatif*, en allant de droite à gauche, on reconnaîtra 1° que *toute quantité négative est moindre que zéro*, car elle est plus éloignée d'une quantité positive quelconque que ne l'est *zéro*. Ainsi, la personne qui a — 40f est moins riche que celle dont la fortune est *zéro.*

2° Que *de deux quantités négatives*, *la plus petite est celle dont la valeur absolue est la plus grande*. —40, par exemple, est plus petit que —15, car ce premier nombre est plus éloigné d'une quantité positive quelconque que ne l'est le second.

CHAPITRE II.

DES OPÉRATIONS DE L'ALGÈBRE.

---

27. Les expressions algébriques représentant des quantités numériques, doivent être soumises à toutes les opérations de l'arithmétique, avec cette différence cependant, comme le dit M. *Lacroix*, que *leurs résultats n'étant jamais que des indications de calculs à effectuer, ne présentent ainsi que des transformations des opérations, primitivement indiquées, en d'autres qui produisent le même effet et dont l'écriture algébrique est plus simple ou mieux appropriée aux besoins de la question que l'on traite.* Nous allons exposer les règles que l'on doit suivre pour effectuer ces transformations.

§ I. DE L'ADDITION.

28. Dans toutes les opérations sur les quantités algébriques, nous distinguerons *en général* deux cas, suivant que ces quantités seront monomes ou polynomes.

1° *L'addition des monomes se fait en les écrivant les uns à la suite des autres avec leurs signes.*

En effet, il est évident que la réunion de deux quantités de même espèce et qui ont le même mode d'existence, produit une troisième quantité, ayant le même mode d'existence que celles-ci, et dont la valeur numérique est la somme de celles qu'elles ont. Ainsi, qu'une personne ait deux dettes, l'une de 18000^f et l'autre de 12000^f : sa fortune se composera de -18000^f et encore de -12000^f, et en conséquence aura pour expression

$$-18000^f - 12000^f, \text{ ce qui fait } -30000^f.$$

Si les quantités que l'on veut additionner ont des modes d'existence opposés, l'effet de leur réunion est de détruire dans

la plus grande une portion de cette plus grande, égale à la plus petite, de sorte que l'on obtient ainsi une troisième quantité, qui est numériquement égale à la différence de leurs valeurs absolues et est de même sens que la plus grande. Par exemple, si une personne *possède* une propriété qui vaut 12000f, et si elle doit 18000f, sa fortune se composera de + 12000f et de — 18000f, et aura par conséquent pour expression

$$+12000^f - 18000^f, \text{ ce qui fait } -6000^f.$$

On a donc, en général,

$$(+a)+(+b)=+a+b,$$
$$(+a)+(-b)=+a-b,$$
$$(-a)+(+b)=-a+b,$$
$$(-a)+(-b)=-a-b;$$

et cela est vrai lors même que l'on attribuerait aux lettres a et b des valeurs négatives; car il est évident que si, dans le premier membre de la seconde égalité par exemple, on remplace a et b par ces valeurs, et que l'on fasse ensuite l'addition, on trouvera le même résultat que si l'on faisait immédiatement cette substitution dans le second membre de cette égalité *.

29. L'expression algébrique de la somme de plusieurs monomes peut être simplifiée, lorsqu'elle contient des termes semblables (**17**). *Si les termes sont tous affectés des mêmes signes, on donne à la partie algébrique qui leur est commune un coefficient égal à la somme de tous leurs coefficients, en conservant d'ailleurs le signe.* Il est évident en effet que $+2a^3b+5a^3b+11a^3b=+18a^3b$, et que $-6a^2b-8a^2b-12a^2b=-26a^2b$.

Si les termes semblables ont des signes différents, on additionnera séparément les coefficients de ceux qui seront positifs, et

---

* Observons que, d'après la convention du n° 22, le signe + placé devant une quantité littérale indique qu'il faut lui conserver le mode d'existence qui résulte des valeurs données aux lettres qui la composent, et que le signe — exprime, au contraire, qu'il faut changer ce mode d'existence. Ainsi, pour $a=-2$, on a $+a=-2$ et $-a=+2$.

ceux des termes qui seront négatifs, on retranchera la plus petite somme de la plus grande, on donnera au reste le signe de cette plus grande et on le fera suivre de la partie littérale commune à tous les termes. Considérons en effet l'expression $2a^3b - 5a^3b - 4a^3b + 8a^3b - 7a^3b$. Il est évident que l'on peut intervertir l'ordre des termes de ce polynome, sans altérer sa valeur; car cela revient à intervertir l'ordre dans lequel doivent être faites les additions et les soustractions qui y sont indiquées, ce qui est permis; car ajouter, par exemple, 3 à 8 et retrancher 5 de la somme, revient à retrancher d'abord 5 de 8 et à ajouter ensuite 3 au reste, de sorte que $8 + 3 - 5 = 8 - 5 + 3$. D'après cela, le polynome proposé est équivalent à

$$2a^3b + 8a^3b - 5a^3b - 4a^3b - 7a^3b;$$

mais $2a^3b + 8a^3b = 10a^3b$, et $-5a^3b - 4a^3b - 7a^3b = -16a^3b$; de sorte que notre polynome se réduit à

$$+10a^3b - 16a^3b = -6a^3b.$$

30. *L'opération par laquelle on réunit plusieurs termes semblables en un seul se nomme* RÉDUCTION.

31. 2° *Pour additionner plusieurs polynomes, il suffira de les écrire les uns à la suite des autres, en conservant aux termes de chacun les signes dont ils sont affectés.*

Soit, en effet, proposé d'ajouter le polynome $d - e$ au polynome $a - b + c$. Je suppose que l'on ait effectué les opérations indiquées dans $d - e$, et je représente le résultat par $\pm P$. La somme demandée sera donc équivalente à $a - b + c \pm P$. Mais on peut intervertir l'ordre des termes de ce polynome et écrire $\pm P + a - b + c$, ou, en remettant $d - e$ au lieu de $\pm P$, $d - e + a - b + c$. Or, si l'on intervertit l'ordre des termes de ce dernier polynome, il viendra

$$a - b + c + d - e,$$

conformément à la règle énoncée.

32. N'oublions pas qu'*après avoir fait l'addition, il faudra*

encore effectuer la réduction des termes semblables. C'est un soin qu'on ne devra jamais négliger, quand on aura exécuté chacune des autres opérations de l'algèbre.

EXEMPLE. *Additionner les polynomes*

$$\begin{array}{l} 4x^3 - 6ax^2 + 7a^2b + 3c^2 \\ -6a^2b + 8x^3 - 9c^2 + 15ax^2 \\ 7c^2 - 3a^2b + 8d^3 - 9x^3 \\ 12ax^2 - 7d^3 - 3a^2b \\ \hline \end{array}$$

Somme : $3x^3 + 21ax^2 - 5a^2b + c^2 + d^3$

§ II. DE LA SOUSTRACTION.

33. *Pour effectuer la soustraction algébrique, écrivez tous les termes de la quantité à soustraire à la suite de celle dont on veut la soustraire, en changeant leurs signes :* car, si l'on écrit à la suite du résultat ainsi obtenu tous les termes de la quantité à soustraire, ces termes se trouveront tous dans le polynome résultant avec des signes contraires, et par conséquent ils s'entre-détruiront ; de sorte qu'après la réduction, il ne restera plus que les termes de la quantité dont on devait soustraire. Le résultat trouvé est donc le *reste* demandé, puisqu'en lui ajoutant la quantité à soustraire, on obtient celle dont on doit soustraire (*Arithmétique*, **19**).

EXEMPLES. I. $a-(+b)=a-b;$

II. $a-(-b)=a+b.$

III. *De* $5ax^3-2ab^2x+c^3-abcx$

soustraire $-2c^3+4ab^2x+2ax^3-3c^2d$

reste $5ax^3-2ab^2x+c^3-abcx+2c^3-4ab^2x-2ax^3+3c^2d$

reste réduit $3ax^3-6ab^2x+3c^3-abcx+3c^2d.$

34. Remarquons que l'emploi des signes + et — pour indiquer l'addition et la soustraction s'accorde parfaitement avec l'extension que nous avons donnée à ces signes au n° **22** ; car,

si une personne a pour 12000^f de propriétés et pour 18000^f de dettes, l'expression de sa fortune est (28)

$$+12000^f - 18000^f = -6000^f,$$

et si des 12000^f qu'elle possède, on retranche les 18000^f qu'elle doit, il reste effectivement — 6000^f (33).

35. Observons encore qu'en algèbre les mots *additionner* et *soustraire* n'entraînent pas respectivement l'idée d'*augmentation* et de *diminution;* cela a lieu seulement quand les deux quantités que l'on considère ont le même mode d'existence; car s'ils ont des modes d'existence opposés, leur *addition* produit une *diminution*, et leur *soustraction* une *augmentation.*

C'est pour cela que l'on appelle *somme algébrique* de plusieurs quantités, le résultat que l'on obtient en additionnant ces quantités, eu égard à leurs signes, et que l'on conserve le nom de *somme arithmétique* pour le résultat de l'addition de leurs valeurs absolues.

§ III. DE LA MULTIPLICATION.

36. D'après la définition que l'on donne en arithmétique de la multiplication (*Arithmétique*, **23**), le multiplicateur est essentiellement un NOMBRE ABSTRAIT ABSOLU, c'est-à-dire qui ne peut être précédé d'aucun signe; mais on comprend que si l'on veut que les formules algébriques soient générales, il faut que l'on ait le droit de donner aux lettres qui y entrent toutes les valeurs imaginables, et qu'alors un multiplicateur pourra bien devenir négatif. Il est donc nécessaire de modifier la définition de manière à l'étendre à tous les cas. Nous dirons en conséquence que la *multiplication algébrique a pour but de trouver une quantité qui soit composée en* GRANDEUR ET EN SIGNE *avec le multiplicande comme le multiplicateur est composé avec l'*UNITÉ POSITIVE; de telle sorte que, si le multiplicateur a le signe +, comme l'unité, le produit aura le même signe que le multiplicande, et que si le multiplicateur a le signe —, c'est-à-

dire un signe opposé à celui de l'unité, le produit devra être affecté d'un signe contraire à celui du multiplicande.

On pourra donc former le tableau suivant :

Multiplicande	*Multiplicateur*	*Produit*
+	+	+
—	+	—
+	—	—
—	—	+

Ainsi, dans le premier et le quatrième cas, où les facteurs ont des signes semblables, le produit est positif, tandis qu'il est négatif dans le second et dans le troisième, où ces facteurs ont des signes contraires. De là cette règle générale : *Donnez au produit le signe + ou le signe — selon que ses* DEUX *facteurs ont des signes semblables ou différents.*

37. On énonce souvent cette règle de la manière suivante :

+	*multiplié par*	+	*donne*	+
—		+		—
+		—		—
—		—		+

Remarquons bien toutefois qu'il ne faut pas prendre à la lettre cette manière de s'énoncer, car elle n'aurait aucun sens. Quand nous disons, par exemple, que — *multiplié par* + *donne* —, nous entendons que *le produit d'une quantité négative par une quantité positive est négatif.*

38. Il suit de la règle que nous venons d'établir que *le produit de plusieurs facteurs négatifs est positif ou négatif, suivant que ces facteurs sont en nombre pair ou impair.* En effet, si le nombre des facteurs négatifs est pair, on pourra d'abord les multiplier deux à deux, c'est-à-dire le premier par le second, le troisième par le quatrième, le cinquième par le sixième, etc., puis multiplier entre eux tous ces produits partiels ; ce qui donnera un produit positif, puisque chacun d'eux a le signe +.

Si, au contraire, il y a un nombre impair de facteurs néga-

tifs, on pourra faire le produit de tous ces facteurs, à l'exception du dernier, et, en le multipliant par ce dernier facteur, on obtiendra le produit demandé, qui sera négatif, puisque + multiplié par — donne —.

39. Les règles des signes étant ainsi établies, nous allons faire abstraction des signes des quantités monomes que l'on aura à multiplier, et comme la multiplication de plusieurs quantités dépend de celle de deux quantités, nous nous occuperons seulement de la multiplication de deux monomes.

Soit d'abord proposé de multiplier a^p par a^q. J'observe que pour faire cette opération, il n'y aura qu'à multiplier a^p successivement par chacun des q facteurs a dont a^q représente le produit (*Arithmétique*, 38) : mais le multiplicande a^p renferme déjà p de ces facteurs ; donc le produit $a^p \times a^q$ sera composé de $(p+q)$ facteurs a ; donc il est la $(p+q)^{ième}$ puissance de a ; donc $a^p \times a^q = a^{p+q}$. Donc, *pour faire le produit de deux puissances d'une même quantité, il faut élever cette quantité à une puissance marquée par la somme des exposants de ces puissances.* Ainsi $a^3 \times a^5 = a^8$.

40. Proposons-nous actuellement de multiplier entre eux deux monomes quelconques, par exemple, $5a^2bc$ par $9a^3c^5d^3$. Il faudra, pour effectuer cette opération, multiplier le multiplicande successivement par chacun des facteurs du multiplicateur, de sorte que le produit pourra être écrit de la manière suivante :

$$5.a^2.b.c.9.a^3.c^5.d^3,$$

ou, en intervertissant l'ordre des facteurs,

$$5.9.a^2.a^3.b.c.c^5.d^3.$$

Or, $5.9 = 45$; multiplier 45 par a^2, puis le produit par a^3, revient à multiplier 45 par le produit effectué de a^2 par a^3, c'est-à-dire par a^5 (*Arithmétique*, 38); donc déjà $5.9.a^2.a^3.b = 45a^5b$. On verra de même que le produit de ce monome par c, puis par c^5, est $45a^5bc^6$, de sorte qu'on a enfin

$$5a^2bc \times 9a^3c^5d^3 = 45a^5bc^6d^3.$$

Comme on peut appliquer les raisonnements qui précèdent à tels monomes que l'on voudra, on en conclut que *pour faire le produit de plusieurs monomes, il faut multiplier leurs coefficients entre eux, et écrire à la suite de ce produit toutes les lettres différentes des facteurs, en donnant à chaque lettre qui est commune à plusieurs d'entre eux un exposant égal à la somme de ceux dont elle y est affectée, et en conservant leurs exposants aux lettres qui n'entrent que dans l'un des facteurs.*

EXEMPLE. $-5a^2bc \times +9a^3c^5d^3 \times -2ab^2c^3e^4 = +90a^6b^3c^9d^3e^4$.

41. Passons maintenant à la multiplication des polynomes, et supposons d'abord que le multiplicande seul étant une quantité complexe, $a+b-c$, par exemple, on veuille le multiplier par le monome *positif* d. Il pourra se présenter trois cas, selon que d représentera un nombre entier, un nombre fractionnaire, ou une quantité incommensurable.

1° Si d est un nombre entier, le produit de $a+b-c$ par d sera la somme de d quantités égales à $a+b-c$, de sorte qu'en faisant la réduction des termes semblables, on trouvera pour résultat $ad+bd-cd$.

2° Si d est une fraction $\frac{m}{n}$: il s'agira de prendre une partie du multiplicande marquée par cette fraction, et, pour cela, de diviser ce multiplicande par n, puis de multiplier le quotient trouvé par m (*Arithmétique*, **116**). Or, le quotient de la division de $a+b-c$ par n est $\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{c}{n}$, car, si on multiplie ce polynome par n, on retrouvera, d'après ce qui précède (**41**, 1°), le dividende $a+b-c$; donc le produit demandé sera

$$\frac{a}{n}.m+\frac{b}{n}.m-\frac{c}{n}.m=a.\frac{m}{n}+b.\frac{m}{n}-c.\frac{m}{n}$$ (*Arith.*, **23** et **116**),

c'est-à-dire $ad+bd-cd$.

3° Supposons que d représente une quantité incommensurable; soit d' une quantité commensurable variable qui peut

approcher de d d'aussi près que l'on voudra. On aura, d'après ce que nous venons de démontrer,

$$(a+b-c)d'=ad'+bd'-cd',$$

et cette égalité subsistera toujours lorsque d' tendra à devenir égal à d. Or, *lorsque deux quantités variables restent constamment égales entre elles, dans tous les états de grandeur par lesquels elles passent, leurs limites sont égales* (*Arith.*, **237**) : mais la limite du produit $(a+b-c)d'$ est $(a+b-c)d$; celle de la quantité $ad'+bd'-cd'$ est évidemment $ad+bd-cd$; donc

$$(a+b-c)d=ad+bd-cd.$$

Concluons donc que *pour multiplier un polynome par un monome positif, il faut multiplier successivement chaque terme du multiplicande par le multiplicateur, en affectant chaque produit partiel du signe + ou du signe —, selon que ses facteurs auront des signes semblables ou différents, c'est-à-dire en se conformant aux règles données pour la multiplication des monomes* (**36** et **40**).

42. Si le multiplicateur était un monome négatif $-d$, les raisonnements qui nous ont conduit à la règle précédente n'auraient plus de sens : mais nous observerons que, d'après la définition de la multiplication algébrique (**36**), un produit ne fait que changer de signe, lorsque l'on change le signe de l'un de ses facteurs ; on multipliera donc $a+b-c$ par le monome positif $+d$, et on changera ensuite le signe du produit $ad+bd-cd$, ce qui se fera évidemment en changeant les signes de tous ses termes ; donc

$$(a+b-c)\times(-d)=-ad-bd+cd.$$

Or, c'est précisément là le résultat auquel conduirait l'application de notre règle ; donc elle est générale.

43. Considérons maintenant le cas où le multiplicateur est aussi un polynome, et soit, par exemple, $a-b$ à multiplier par $c-d$. Supposons que l'on ait effectué les opérations indiquées

dans le multiplicateur, et désignons par P sa valeur : le produit demandé sera donc équivalent à

$$(a-b)P = aP - bP \text{ (41 et 42)} = Pa - Pb.$$

En remplaçant P par $c-d$, ce qui est permis, on aura

$$(a-b)(c-d) = (c-d)a - (c-d)b;$$

mais $(c-d)a = ac - ad$, $(c-d)b = bc - bd$; donc, en appliquant la règle de la soustraction (33), il viendra

$$(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd = ac - bc - ad + bd.$$

Or, $ac - bc$ est le produit de $(a-b)$ par c, $-ad + bd$ est le produit de ce même multiplicande par $-d$: donc *pour multiplier deux polynomes entre eux, on multipliera le multiplicande successivement par chaque terme du multiplicateur* (**40** et **41**), *et on fera la somme des produits partiels.*

44. Scholie. Si l'on suppose que a, b, c, d, étant quatre quantités positives, on ait de plus $a > b$ et $c > d$, les raisonnements que nous avons faits aux numéros **41** et **43**, prouvent rigoureusement, en s'appuyant uniquement sur la définition que l'on donne de la multiplication dans l'arithmétique, que

$$(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd.$$

Nous allons maintenant examiner quelles conventions il faut faire pour rendre cette formule applicable à toutes les hypothèses que l'on pourrait faire sur a, b, c, d, et, pour abréger, nous supposerons que ces quantités soient positives, car, si elles ne l'étaient pas, il n'y aurait qu'à mettre leurs signes en évidence.

Soit d'abord $a < b$ et $c < d$. Il suit immédiatement de là que $ac < bc$, que $ad < bd$, et que par conséquent $(ac - bc)$ et $(ad - bd)$ sont des quantités négatives ; mais parce que $c < d$, la valeur absolue de la première est plus petite que celle de la seconde, car ces valeurs absolues sont celles des deux produits $(b-a)c$ et $(b-a)d$; donc la différence $(ac - bc) - (ad - bd)$, c'est-à-dire $ac - bc - ad + bd$, est une quantité positive. Or, $(a-b)$ et $(c-d)$ sont au contraire des quantités négatives; donc, pour que la règle du n° **43** puisse s'appliquer au cas

actuel, *il faut convenir que le produit de deux quantités négatives est positif.*

Si de même on suppose $a < b$ et $c > d$, ou $a > b$ et $c < d$, on reconnaîtra que le *produit de deux quantités affectées de signes contraires doit être regardé comme négatif.*

Ainsi se trouve justifiée la modification que nous avons fait subir à la définition de la multiplication arithmétique, pour l'étendre à tous les cas de la multiplication des quantités algébriques.

45. Lorsqu'une lettre entre à différentes puissances dans le multiplicande et dans le multiplicateur, on *ordonne* ces facteurs, c'est-à-dire que l'on dispose leurs termes suivant l'ordre de grandeur des exposants de cette lettre, que l'on nomme *la lettre ordonnatrice* ou *principale* *. Alors les produits partiels du multiplicande par chaque terme du multiplicateur seront aussi ordonnés (39), de sorte que si l'on écrit ces divers produits partiels les uns au-dessous des autres, de manière que le premier terme de chacun soit placé sous le terme qui renferme la lettre ordonnatrice à la même puissance que lui, dans le produit précédent, tous les termes de ces produits partiels seront rangés dans une même ligne verticale, sous ceux qui sont du même degré qu'eux, par rapport à la lettre principale (on suppose qu'il y a une différence d'une unité entre les exposants de la lettre ordonnatrice dans deux termes consécutifs quelconques du multiplicande : s'il n'en était pas ainsi, on laisserait vide dans ce multiplicande et dans les produits partiels la place des termes qui y manqueraient), ce qui facilitera les réductions.

46. Exemple. *Multiplier* $3a^2x^2 - 5ax^3 - 2a^4 + 4x^4$ *par* $-3a^5 + 3a^2x^3 - 5a^3x^2$. J'ordonne par rapport aux *puissances descendantes* de x, et comme la première puissance de cette lettre n'entre pas dans le multiplicande, nous laisserons vide la

---

* Si, par exemple, on veut ordonner suivant les puissances décroissantes d'une certaine lettre x, on écrira d'abord le terme où x a le plus grand exposant, puis celui de tous les termes restants où x a le plus grand exposant, et ainsi de suite.

place du terme qui devrait contenir cette puissance, si le polynome était *complet*. Nous disposerons en conséquence les calculs de la manière suivante :

Multiplicande........	$4x^4 - 5ax^3 + 3a^2x^2 \qquad - 2a^4$
Multiplicateur........	$3a^2x^3 - 5a^3x^2 - 3a^5$
Produit par $3a^2x^3$....	$12a^2x^7 - 15a^3x^6 + 9a^4x^5 \qquad - 6a^6x^3$
Produit par $-5a^3x^2$...	$-20a^3x^6 + 25a^4x^5 - 15a^5x^4 \qquad + 10a^7x^2$
Produit par $-3a^5$....	$-12a^5x^4 + 15a^6x^3 - 9a^7x^2 + 6a^9$
Produit total........	$12a^2x^7 - 35a^3x^6 + 34a^4x^5 - 27a^5a^4 + 9a^6x^3 + a^7x^2 + 6a^9$

Le premier terme $-20a^3x^6$ du second produit partiel étant semblable au second terme du produit précédent, on l'a écrit sous ce terme ; de même le premier terme $-12a^5x^4$ du troisième produit partiel a été placé sous le terme $-15a^5x^4$ auquel il est semblable dans le second produit partiel. Enfin on a obtenu le produit total en faisant la réduction de tous les termes situés dans une même colonne. Ainsi on a dit : $-15a^3x^6 - 20a^3x^6$ donnent $-35a^3x^6$, etc.

47. *Les deux polynomes que nous venons de multiplier sont dits* HOMOGÈNES *parce que la somme des exposants, dans chaque terme, est constante.* Comme cette somme est 4 dans le premier et 5 dans le second, on dit que le multiplicande est un polynome *du quatrième degré*, et que le multiplicateur est *du cinquième*. Il est évident que leur produit doit aussi être homogène, et que son degré est la somme des degrés de ses facteurs. *Si donc on trouvait que le produit de deux polynomes homogènes n'est pas homogène, ce serait un signe certain que ce produit est fautif*, et il faudrait en conséquence recommencer la multiplication. Cette remarque est importante.

48. S'il y a dans l'un des facteurs plusieurs termes où la lettre par rapport à laquelle on veut ordonner entre à la même puissance, il faudra d'abord mettre chaque puissance de cette lettre en *facteur commun* des quantités qu'elle multiplie, ordonner le polynome résultant par rapport à cette lettre et faire ensuite la multiplication.

49. *Pour mettre une puissance d'une certaine lettre en fac-*

teur commun des quantités qu'elle multiplie, on écrit entre parenthèses les termes dont il s'agit, abstraction faite de cette puissance, et on écrit cette même puissance hors des parenthèses; ou mieux encore *on dispose les termes ainsi préparés dans une colonne, en les séparant, par un trait vertical, de la puissance qu'on y a supprimée.* Ainsi le trinôme $-8a^2b^2x^4+10ab^3x^4+2a^3bx^4$ pourra être écrit de l'une ou de l'autre des deux manières suivantes :

$$(2a^3b-8a^2b^2+10ab^3)x^4 \text{ ou } \begin{array}{r|l} 2a^3b & x^4. \\ -8a^2b^2 & \\ +10ab^3 & \end{array}$$

La quantité placée ainsi entre parenthèses ou dans une ligne verticale, et que l'on a d'ailleurs soin d'ordonner par rapport à l'une des lettres qui y entrent, doit être considérée comme un simple coefficient.

50. Exemple. *Multiplier* $a^4-b^3x-3b^2x^2+3ab^2x-2b^4+2a^2x^2$ *par* $-6ab^2x+2b^4+3a^2x^2+a^4-2b^3x+2b^2x^2$. En ordonnant ces polynomes par rapport à x, on disposera les calculs comme ci-dessous.

Multiplicande

$$\begin{array}{r|r|r} 2a^2 & x^2+3ab^2 & x+a^4 \\ -3b^2 & -b^3 & -2b^4 \end{array}$$

Multiplicateur

$$\begin{array}{r|r|r} 3a^2 & x^2-6ab^2 & x+a^4 \\ +2b^2 & -2b^3 & +2b^4 \end{array}$$

Produit par $\begin{array}{r|l} 3a^2 & x^2 \\ +2b^2 & \end{array}$

$$\begin{array}{r|r|r|l} 6a^4 & x^4+9a^3b^2 & x^3+3a^6 & x^2 \\ -5a^2b^2 & -3a^2b^3 & +2a^4b^2 & \\ -6b^4 & +6ab^4 & -6a^2b^4 & \\ & -2b^5 & -4b^6 & \end{array}$$

Produit par $\begin{array}{r|l} -6ab^2 & x \\ -2b^3 & \end{array}$

$$\begin{array}{r|r|r|l} -12a^3b^2 & x^3-18a^2b^4 & x^2-6a^5b^2 & x \\ -4a^2b^3 & +2b^6 & -2a^4b^3 & \\ +18ab^4 & & +12ab^6 & \\ +6b^5 & & +4b^7 & \end{array}$$

Produit par $\begin{array}{r} a^4 \\ +2b^4 \end{array}$

$$\begin{array}{r|r|r} +2a^6 & x^2+3a^5b^2 & x+a^8 \\ -3a^4b^2 & -a^4b^3 & -4b^8 \\ +4a^2b^4 & +6ab^6 & \\ -6b^6 & -2b^7 & \end{array}$$

Produit total

$$\begin{array}{r|r|r|r|r} 6a^4 & x^4-8a^3b^2 & x^3+5a^6 & x^2-3a^5b^2 & x+a^8 \\ -5a^2b^2 & -7a^2b^3 & -a^4b^2 & -3a^4b^3 & -4b^8 \\ -6b^4 & +24ab^4 & -20a^2b^4 & +18ab^6 & \\ & +4b^5 & -8b^6 & +2b^7 & \end{array}$$

On a été conduit à effectuer les *neuf* multiplications partielles qui suivent :

$$(2a^2-3b^2)(3a^2+2b^2),\ (3ab^2-b^3)(3a^2+2b^2),\ (a^4-2b^4)(3a^2+2b^2);$$
$$(2a^2-3b^2)(-6ab^2-2b^3),\ (3ab^2-b^3)(-6ab^2-2b^3),$$
$$(a^4-2b^4)(-6ab^2-2b^3);$$
$$(2a^2-3b^2)(a^4+2b^4),\ (3ab^2-b^3)(a^4-2b^4),\ (a^4-2b^4)(a^4+2b^4).$$

34. En appliquant les règles de la multiplication à la formation du carré de $(a \pm b)$ et à celle du produit de $(a+b)$ par $(a-b)$, on trouvera :

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

En comparant chacun de ces produits avec ses facteurs, on en conclut les théorèmes suivants :

1° *Le carré de la somme de deux quantités est égal à la somme des carrés de ces quantités augmentée de leur double produit.*

Exemple. $(2a^3x-3a^2x^2)^2=4a^6x^2-12a^5x^3+9a^4x^4$.

2° *Le carré de la différence de deux quantités est égal à la somme des carrés de ces quantités diminuée de leur double produit.*

Exemple. $(5a^2x^3-3a^3x^2)^2=25a^4x^6-30a^5x^5+9a^6x^4$.

3° *Le produit de la somme de deux quantités multipliée par leur différence, est égal à la différence des carrés de ces quantités.*

Exemple.

$$(5a^2x^3-3a^3x^2+4a^4x-2a^5)(5a^2x^3-3a^3x^2-4a^4x+2a^5).$$

Ce produit revient à

$$\{(5a^2x^3-3a^3x^2)+(4a^4x-2a^5)\}.\{(5a^2x^3-3a^3x^2)-(4a^4x+2a^5)\},$$

en vertu de la règle du n° 33, et est en conséquence égal à

$$(5a^2x^3-3a^3x^2)^2-(4a^4x-2a^5)^2=25a^4x^6-30a^5x^5+9a^6x^4$$
$$-16a^8x^2+16a^9x-4a^{10}.$$

52. Puisque pour multiplier un polynome par un autre polynome, il faut multiplier chaque terme du multiplicande successivement par tous ceux du multiplicateur (**43**), on voit que le carré d'un polynome renfermera : 1° les carrés de ses différents termes; 2° le produit de chaque terme par tous les autres. Mais ces derniers produits sont évidemment tous égaux deux à deux, car le produit du 3ᵉ terme par le 7ᵉ, par exemple, est identique avec celui du 7ᵉ par le 3ᵉ : on peut donc dire que *le carré d'un polynome se compose des carrés de ses différents termes et du double de la somme des produits qu'on obtient en multipliant chacun d'eux par tous ceux qui le suivent.*

EXEMPLE. $(2x^3-3ax^2+4a^2x-2a^3)^2=4x^6+9a^2x^4+16a^4x^2+4a^6-12ax^5+16a^2x^4-8a^3x^3-24a^3x^3+12a^4x^2-16a^5x=4x^6-12ax^5+25a^2x^4-32a^3x^3+28a^4x^2-16a^5x+4a^6$.

§ IV. DE LA DIVISION.

53. Nous allons d'abord supposer qu'il s'agisse de diviser un monome par un autre monome. La première chose à faire sera de déterminer le signe du quotient. Or, le dividende étant le produit du diviseur par le quotient, on voit que s'il est positif, le diviseur et le quotient auront des signes semblables (**36**); donc si le diviseur est positif, le quotient aura le signe +, et si le diviseur est négatif, le quotient aura le signe —. Au contraire, si le dividende est négatif, le diviseur et le quotient auront des signes contraires, de sorte que si le diviseur est positif, le quotient aura le signe —, et s'il est négatif, le quotient sera précédé du signe +. On pourra donc former le tableau suivant :

Dividende.	*Diviseur.*	*Quotient.*
+	+	+
+	—	—
—	+	—
—	—	+

D'où l'on voit que, dans le premier et dans le quatrième cas, où le dividende et le diviseur ont des signes semblables, le

quotient est positif, tandis qu'il est négatif dans les deux autres, c'est-à-dire quand le dividende et le diviseur ont des signes différents. De là cette règle :

Donnez au quotient le signe + ou le signe —, suivant que le dividende et le diviseur auront des signes semblables ou différents.

On l'énonce encore en disant que

+	divisé par	+	donne	+,
+		—		—,
—		+		—,
—		—		+.

34. Cette règle étant établie, proposons-nous de diviser un monome quelconque par un autre monome, en faisant abstraction de leurs signes; par exemple, $45a^5bc^6d^3$ par $5a^2bc$. J'observe d'abord que le quotient de la division de deux monomes ne peut être qu'un monome (**41**). Cela posé, il suit immédiatement de la règle donnée au nº **40**, 1° que le coefficient 45 du dividende étant le produit du coefficient 5 du diviseur par celui du quotient, on obtiendra ce dernier en divisant le coefficient du dividende par celui du diviseur; ainsi le coefficient du quotient est $\frac{45}{5}=9$; 2° que la lettre a, ayant dans le dividende un exposant plus grand que celui dont elle est affectée dans le diviseur, se trouvera dans le quotient, et que son exposant dans le dividende est la somme de ceux qu'elle porte dans le diviseur et dans le quotient; donc cette lettre aura pour exposant, dans le quotient, la différence de ceux dont elle est affectée dans le dividende et dans le diviseur, c'est-à-dire qu'elle y aura l'exposant $5-2=3$. Par une raison semblable, la lettre c entrera dans le quotient avec l'exposant $6-1=5$; 3° quant à la lettre b qui est affectée des mêmes exposants dans le dividende et dans le diviseur, elle n'appartiendra pas au quotient, sans quoi elle aurait dans le dividende un exposant plus grand que dans le diviseur; 4° enfin la lettre d, qui n'entre pas dans le diviseur, devra se trouver dans le quotient avec son exposant. Ce quotient est donc $9a^3c^5d^3$.

55. Les raisonnements qui précèdent n'étant point particuliers aux monomes que nous avons considérés, on en conclut la règle générale suivante :

Pour diviser un monome par un autre monome, divisez le coefficient du dividende par celui du diviseur et vous aurez le coefficient du quotient; écrivez à la suite de ce coefficient toutes les lettres qui ont dans le dividende un exposant plus grand que dans le diviseur, ainsi que celles qui n'entrent que dans le dividende, en donnant aux premières un exposant égal à la différence de ceux qu'elles ont dans le dividende et dans le diviseur, et en conservant aux secondes leurs exposants. Quant aux lettres qui portent le même exposant dans le dividende et dans le diviseur, elles ne doivent pas entrer dans le quotient. Il est d'ailleurs entendu que l'on appliquera la règle des signes donnée au n° 53.

EXEMPLE. $$\frac{-10a^7b^2c^5def^3}{-5a^4b^2c^3ef} = +2a^3c^2df^2.$$

56. Nous avons vu tout à l'heure que *quand une lettre est commune au dividende et au diviseur, on doit l'écrire au quotient avec un exposant égal à la différence de ceux dont elle y est affectée.* La démonstration que nous avons donnée de cette règle suppose essentiellement que cette lettre a dans le dividende un exposant plus grand que celui qu'elle porte dans le diviseur, car nous avons posé en principe que *l'exposant dont elle est affectée dans le dividende est la* SOMME *de ceux qu'elle a dans le diviseur et dans le quotient;* et pour qu'il en soit ainsi, si l'exposant du dividende ne surpasse pas celui du diviseur, il faut que l'exposant du quotient soit ou zéro ou un nombre négatif, ce qui ne peut être, d'après l'idée que l'on attache au mot exposant (**14**). Examinons cependant s'il ne serait pas possible de généraliser notre règle, c'est-à-dire de la rendre applicable à tous les cas.

1° Supposons que la lettre a ait le même exposant dans le dividende que dans le diviseur, et soit ainsi proposé de diviser a^p par a^p. Il est évident que le quotient de cette division est

l'*unité* : or, si l'on applique au cas actuel la règle que l'on veut généraliser, on trouvera $a^{p-p} = a^0$. Mais cette expression a^0 ne saurait avoir aucun sens, ainsi que nous l'avons observé plus haut; nous pourrons donc faire sur elle telle convention que nous voudrons, pourvu qu'elle ne soit en opposition avec aucune de celles qui précèdent, et CONVENIR, par exemple, *que toute quantité affectée de l'exposant zéro sera un symbole qui désormais représentera l'unité*, c'est-à-dire que $a^0 = 1$. De cette manière, nous pourrons dire que $\frac{a^p}{a^p} = a^{p-p}$, et notre règle s'étendra ainsi au cas où une lettre a des exposants égaux dans le dividende et dans le diviseur.

2° Soit maintenant à diviser a^p par a^{p+q}. Si l'on se rappelle que l'on n'altère pas le quotient d'une division en divisant le dividende et le diviseur par une même quantité, nous diviserons a^p et a^{p+q} par a^p, et nous verrons ainsi que

$$\frac{a^p}{a^{p+q}} = \frac{1}{a^q}.$$

Or, si l'on applique la règle du n° 55 à la division de a^p par a^{p+q}, on trouvera $a^{p-p-q} = a^{-q}$, expression tout à fait vide de sens (14). Nous pourrons donc faire sur elle telle convention que nous voudrons, et CONVENIR, par exemple, *que toute quantité affectée d'un exposant négatif est un symbole qui représente le quotient de la division de l'unité par cette quantité affectée du même exposant, mais pris positivement*, c'est-à-dire que $a^{-q} = \frac{1}{a^q}$.

En conséquence, nous pourrons dire que $\frac{a^p}{a^{p+q}} = a^{p-p-q} = a^{-q}$.

Ainsi la règle donnée (55), pour diviser l'une par l'autre deux puissances d'une même quantité, s'étend maintenant à tous les cas; donc elle est générale.

57. Il résulte de la règle du n° 55 que *pour qu'un monome soit divisible par un autre, il faut* 1° *que le coefficient du dividende soit divisible par celui du diviseur*; 2° *que le diviseur ne contienne aucune lettre étrangère au dividende*; 3° *que l'expo-*

sant dont une lettre est affectée dans le dividende ne soit pas moindre que celui qu'elle a dans le diviseur. Quand toutes ces conditions ne sont pas remplies, on exprime le quotient sous forme fractionnaire, sauf à le réduire ensuite à sa plus simple expression, comme nous le verrons plus tard.

58. Venons maintenant à la division des polynomes. Nous en établirons la théorie sur le principe suivant :

LEMME. *Lorsque deux polynomes et leur produit sont ordonnés suivant les puissances d'une même lettre, le premier terme du produit provient* SANS RÉDUCTION *de la multiplication du premier terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur.*

En effet, si l'on suppose les deux facteurs ordonnés suivant les puissances décroissantes d'une même lettre, il est évident que le produit de deux termes pris, comme on le voudra, dans ces facteurs, contiendra la lettre ordonnatrice avec un exposant moindre que celui qu'elle a dans le produit du premier terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur (39); donc il ne pourra ni se réduire avec lui, ni passer avant lui : donc le premier terme du produit provient sans réduction de la multiplication du premier terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur.

On démontrerait de la même manière que *le dernier terme du produit est*, SANS RÉDUCTION, *le produit du dernier terme du multiplicande par le dernier terme du multiplicateur.*

59. Proposons-nous actuellement de diviser un polynome par un autre polynome. Je les ordonne d'abord par rapport aux *puissances décroissantes*, par exemple, d'une même lettre, et je conçois que le quotient soit ordonné de la même manière. Cela fait, le dividende étant le produit du diviseur par le quotient, son premier terme sera sans réduction le produit du premier terme du diviseur par le premier terme du quotient : donc en divisant le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, on obtiendra le premier terme du quotient. Mais le dividende étant la somme des produits partiels du diviseur par les différents termes du quotient, si on en soustrait le

produit du diviseur par le premier terme du quotient, le reste sera le produit du diviseur par le polynome formé des 2ᵉ, 3ᵉ, 4ᵉ... termes du quotient, et par conséquent son premier terme sera sans réduction le produit du premier terme du diviseur par le second terme du quotient; donc en divisant le premier terme de ce premier reste par le premier terme du diviseur, on trouvera le second terme du quotient. En raisonnant sur ce second terme et sur le premier reste, comme on vient de le faire sur le premier terme du quotient et sur le dividende proposé, on obtiendra le troisième terme du quotient et par suite son 4ᵉ, son 5ᵉ... termes. On poursuivra la même série d'opérations jusqu'à ce que l'on soit parvenu à un reste nul, ou à un reste tel que la division de son premier terme par le premier terme du diviseur conduirait à écrire au quotient un terme dans lequel la lettre ordonnatrice aurait un exposant plus petit que la différence de ceux dont elle est affectée dans les derniers termes du dividende et du diviseur*. Dans le premier cas, le polynome qu'on aura obtenu sera le quotient exact, car puisqu'on a trouvé zéro, en retranchant du dividende les produits partiels du diviseur par les termes successifs de ce polynome, il s'ensuit que le dividende est le produit exact du diviseur par le polynome trouvé, lequel est par conséquent le quotient cherché.

Mais si le reste dont il s'agit n'est pas nul, *le quotient ne peut pas être un polynome entier*, sans quoi son dernier terme devant résulter de la division du dernier terme du dividende par le dernier du diviseur, la lettre ordonnatrice y aurait pour exposant la différence de ceux dont elle est affectée dans ces deux derniers termes, et par conséquent le reste correspondant à ce terme du polynome trouvé aurait été nul, ce que nous ne supposons pas.

Pour obtenir tous les termes entiers du quotient, on devra, si l'on a ordonné suivant les puissances décroissantes de la lettre

---

* Ce serait le contraire si l'on avait ordonné par rapport aux *puissances croissantes* d'une même lettre.

principale, arrêter l'opération lorsqu'on sera parvenu à un reste dans le premier terme duquel la lettre ordonnatrice aura un exposant plus petit que celui dont elle est affectée dans le premier terme du diviseur. On suppose d'ailleurs que le coefficient du premier terme de chaque dividende partiel est divisible par le coefficient du premier terme du diviseur.

Dans le cas où le reste n'est pas nul, on complète le quotient, en ajoutant au polynome qu'on a trouvé une expression qui indique la division du dernier reste par le diviseur.

Pour faciliter la soustraction du produit du diviseur par un terme du quotient, on change les signes des termes de ce produit à mesure qu'on les forme, et on les écrit successivement au-dessous des termes qui leur sont semblables dans le dividende partiel correspondant.

Comme le produit du premier terme du diviseur par un terme du quotient est identiquement égal au premier terme du dividende partiel correspondant, on se dispense d'écrire ce produit et on *barre* le premier terme du dividende partiel. On *barre* de même tous les termes, à mesure qu'on en fait la réduction.

60. Exemple I. *Diviser*

$$9a^6x^3 - 35a^3x^6 + 6a^9 + 12a^2x^7 - 27a^5x^4 + a^7x^2 + 34a^4x^5$$

par $$3a^2x^2 + 4x^4 - 2a^4 - 5ax^3.$$

On ordonnera ces deux polynomes par rapport aux puissances décroissantes de x, et on disposera les calculs comme ci-dessous :

$$\begin{array}{lllllll|l}
 & 12a^2x^7 - 35a^3x^6 + 34a^4x^5 - 27a^5x^4 + 9a^6x^3 + a^7x^2 & & & & & +6a^9 & 4x^4 - 5ax^3 + 3a^2x^2 - 2a^4 \\
 & -12a^2x^7 + 15a^3x^6 - 9a^4x^5 \qquad + 6a^6x^3 & & & & & & 3a^2x^3 - 5a^3x^2 - 3a^5 \\
\hline
1^{er}\ reste & -20a^3x^6 + 25a^4x^5 - 27a^5x^4 + 15a^6x^3 & & & & & & \\
 & +20a^3x^6 - 25a^4x^5 + 15a^5x^4 \qquad -10a^7x^2 & & & & & & \\
\hline
2^e\ reste & \qquad -12a^5x^4 + 15a^6x^3 - 9a^7x^2 & & & & & & \\
 & \qquad +12a^5x^4 - 15a^6x^3 + 9a^7x^2 - 6a^9 & & & & & & \\
\hline
3^e\ reste & \qquad\qquad 0 & & & & & &
\end{array}$$

Exemple II. *Diviser* $a^4x^3 + a^5x^2 - a^2x^5 + x^7 - 2a^3x^4$ *par* $x^3 - a^3$.

On ordonnera par rapport à x et on exécutera ensuite les calculs qui suivent :

$$
\begin{array}{l|l}
x^7 - a^2x^5 - 2a^3x^4 + a^4x^3 + a^5x^2 & x^3 - a^3 \\
\quad + a^3x^4 & \overline{x^4 - a^2x^2 - a^3x + a^4} \\
\hline
- a^2x^5 - a^3x^4 & \\
\qquad\qquad - a^5x^2 & \\
\hline
- a^3x^4 + a^4x^3 & \\
\qquad\qquad - a^6x & \\
\hline
+ a^4x^3 \qquad - a^6x & \\
\qquad\qquad + a^7 & \\
\hline
\qquad - a^6x + a^7 &
\end{array}
$$

La différence des exposants dont x est affecté dans le dernier terme du dividende et dans le dernier terme du diviseur étant 2 (ce dernier terme revient à $-a^3x^0$), on reconnaît, à l'inspection du second reste, que le quotient ne sera pas entier; car, en divisant son premier terme $-a^3x^4$ par le premier terme x^3 du diviseur, on est conduit à écrire au quotient un terme dans lequel l'exposant de x est 1, c'est-à-dire plus petit que 2. Toutefois on a continué l'opération, afin d'avoir tous les termes entiers que le quotient peut contenir.

Ce quotient est $x^4 - a^2x^2 - a^3x + a^4 + \dfrac{-a^6x + a^7}{x^3 - a^3}$.

Exemple III. *Diviser* $1 + x + x^2 + x^3$ *par* $1 - x$. Le dividende et le diviseur étant ordonnés suivant les puissances croissantes de x, on s'arrêtera à un reste dont le premier terme sera d'un degré supérieur à la différence $3 - 1 = 2$ des degrés du dernier terme du dividende et du dernier terme du diviseur, car, en le divisant par le premier terme du diviseur, on serait conduit à écrire au quotient un terme où x aurait un exposant plus grand que cette différence.

$$
\begin{array}{l|l}
1 + x + x^2 + x^3 & 1 - x \\
\underline{+ x} & \overline{1 + 2x + 3x^2} \\
\quad 2x & \\
\quad \underline{+ 2x^2} & \\
\quad + 3x^2 & \\
\qquad \underline{+ 3x^3} & \\
\qquad + 4x^3 &
\end{array}
$$

Ainsi le quotient est $1 + 2x + 3x^2 + \dfrac{4x^3}{1 - x}$.

61. Si le dividende et le diviseur, ou l'un d'eux seulement, renferment plusieurs termes où la lettre ordonnatrice entre à la même puissance, on mettra chaque puissance de cette lettre en facteur commun des quantités qu'elle multiplie (49), en ordonnant d'ailleurs ces quantités elles-mêmes par rapport aux puissances d'une des lettres qui s'y trouvent; puis on ordonnera les polynomes proposés par rapport à la lettre que l'on a choisie pour lettre ordonnatrice, et on appliquera ensuite la règle du n° 59; car le lemme fondamental (58) sera vrai encore, dans le cas actuel. L'opération ne présentera pas d'ailleurs de difficultés nouvelles : seulement la division du premier terme du dividende ou d'un reste par le premier terme du diviseur pourra conduire à des divisions de polynomes, mais elles seront plus faciles à exécuter que la proposée, car les polynomes que l'on y considérera seront plus simples.

62. Exemple. *Diviser* $4b^5x^3 + 2b^7x - 6b^4x^4 - 4b^8 - 8b^6x^2 + 6a^4x^4 - 3a^5b^2x - 3a^3b^2x^3 + 5a^6x^2 + a^8 - 3a^4b^3x - 7a^2b^3x^3 + 18ab^6x - 20a^2b^4x^2 - 5a^2b^2x^4 + 24ab^4x^3 - a^4b^2x^2$ *par* $a^4 - 3b^2x^2 + 3ab^2x - 2b^4 + 2a^2x^2 - b^3x$. Voici le tableau des calculs :

$$
\begin{array}{r|r|r|r|l}
6a^4 & x^4 - 3a^3b^2 & x^3 + 5a^6 & x^2 - 3a^5b^2 & x + a^8 \\
-5a^2b^2 & -7a^2b^3 & -a^4b^2 & -3a^4b^3 & -4b^8 \\
-6b^4 & +24ab^4 & -20a^2b^4 & +18ab^6 & \\
 & +4b^5 & -8b^6 & +2b^7 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|r|l}
2a^2 & x^2 + 3ab^2 & x + a^4 \\
-3b^2 & -b^3 & -2b^4 \\
\hline
3a^2 & x^2 - 6ab^2 & x + a^4 \\
+2b^2 & -2b^3 & +2b^4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|r|l}
-9a^3b^2 & x^3 - 3a^6 & x^2 \\
+3a^2b^3 & -2a^4b^2 & \\
-6ab^4 & +6a^2b^4 & \\
+2b^5 & +4b^6 & \\
\hline
-12a^3b^2 & x^3 + 2a^6 & x^2 \\
-4a^2b^3 & -3a^4b^2 & \\
+18ab^4 & -14a^2b^4 & \\
+6b^5 & -4b^6 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|r|l}
+18a^2b^4 & x^2 + 6a^5b^2 & x \\
-2b^6 & +2a^4b^3 & \\
 & -12ab^6 & \\
 & -4b^7 & \\
\hline
+2a^6 & x^2 + 3a^5b^2 & x \\
-3a^4b^2 & -a^4b^3 & \\
+4a^2b^4 & +6ab^6 & \\
-6b^6 & -2b^7 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
-3a^5b^2 & x - a^8 \\
+a^4b^3 & +4b^8 \\
-6ab^6 & \\
+2b^7 & \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

1re Division partielle.

$$\begin{array}{l|l} 6a^4 - 5a^2b^2 - 6b^4 & 2a^2 - 3b^2 \\ \hline \underline{+9a^2b^2} & 3a^2 + 2b^2 \\ +4a^2b^2 & \\ \quad \underline{+6b^4} & \\ \quad\ 0 & \end{array}$$

2e Division partielle.

$$\begin{array}{l|l} -12a^3b^2 - 4a^2b^3 + 18ab^4 + 6b^5 & 2a^2 - 3b^2 \\ \hline & -6ab^2 - 2b^3 \end{array}$$

3e Division partielle.

$$\begin{array}{l|l} 2a^6 - 3a^4b^2 + 4a^2b^4 - 6b^6 & 2a^2 - 3b^2 \\ \hline & a^4 + 2b^4 \end{array}$$

63. Si le dividende contient une lettre x qui ne se trouve pas dans le diviseur, on pourra encore appliquer la règle générale à ce cas particulier, en ordonnant les deux polynomes par rapport aux puissances d'une lettre qui leur soit commune. Mais il sera plus simple d'ordonner le dividende et le diviseur par rapport à cette lettre x qui n'entre pas dans le diviseur; puis on divisera par ce diviseur le coefficient de chaque terme du dividende, et on multipliera le résultat par la puissance de x qui se trouve dans ce terme. Ainsi, si le dividende est de la forme

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E,$$

et que le diviseur soit représenté par M, le quotient sera

$$\frac{A}{M}x^4 + \frac{B}{M}x^3 + \frac{C}{M}x^2 + \frac{D}{M}x + \frac{E}{M}.$$

Il suit, en effet, de la règle donnée pour multiplier un polynome par un monome, et de ce principe connu que pour multiplier un produit par une certaine quantité, il suffit de multiplier un de ses facteurs par cette quantité (*Arithmétique*, **39**), que si l'on multiplie ce polynome par M, on obtiendra le dividende, et qu'ainsi il est bien le quotient demandé.

64. Les termes du quotient que nous venons de trouver ne peuvent se réduire les uns avec les autres, car ils sont tous dissemblables; ainsi, pour que ce quotient soit entier (**18**), il faut que chacun de ses termes le soit. Donc,

Pour qu'un polynome entier soit divisible par un diviseur entier, indépendant de la lettre par rapport à laquelle il est ordonné, IL FAUT ET IL SUFFIT *que ce diviseur divise chacun des coefficients de cette lettre.*

65. Si l'on observe que l'énoncé du principe sur lequel nous avons établi la théorie de la division des polynomes revient au suivant : *Le terme qui, dans le produit de deux polynomes, renferme une certaine lettre avec un exposant plus grand ou plus petit que tous ceux qu'elle a dans ses autres termes, provient sans réduction de la multiplication des deux termes qui, dans ces polynomes, sont affectés du plus grand ou du plus petit exposant de cette lettre*, on en conclura que l'on peut se dispenser d'ordonner le dividende et le diviseur par rapport aux puissances d'une même lettre ; car, pourvu que l'on divise le terme du dividende qui renferme le plus grand ou le plus petit exposant d'une lettre *quelconque* par le terme du diviseur où cette lettre a le plus grand ou le plus petit exposant, on obtiendra un terme du quotient. Et si on opère de la même manière à l'égard du reste qu'on trouvera, en retranchant du dividende le produit du diviseur par ce terme du quotient, on aura un second terme de ce quotient, et ainsi de suite.

66. THÉORÈME. *Si l'on divise un polynome*

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} + \ldots + A_m\text{*}$$

ordonné suivant les puissances descendantes de x *par le binome*

---

* Les symboles A_0, A_1, A_2,... représentent des quantités quelconques et s'énoncent A *indice zéro*, A *indice un*, A *indice deux*.... Quant aux points que nous avons placés entre A_3x^{m-3} et $+ A_m$, ils remplacent les termes que l'on sous-entend et que l'on suppose soumis à la même loi de notation que ceux qui les précèdent.

x—a, *le reste indépendant de* x *que l'on trouvera sera le résultat même* $A_0a^m + A_1a^{m-1} + A_2a^{m-2} + A_3a^{m-3} \ldots + A_m$ *de la substitution de* a *à la place de* x *dans ce polynome.*

Supposons, en effet, que l'on ait effectué la division du polynome proposé par $x-a$, et que l'on ait continué l'opération jusqu'à un reste indépendant de x, ce qui est possible, puisque chaque reste est au moins d'un degré inférieur d'une unité au précédent. En le représentant par R, et en désignant par Q le quotient auquel on sera parvenu, on aura nécessairement

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m = (x-a)Q + R.$$

Cette égalité est vraie, quelque valeur que l'on donne à x, puisque son premier membre n'est que le résultat des opérations indiquées dans le second; donc, on peut y remplacer x par a, ce qui réduira le premier membre à

$$A_0a^m + A_1a^{m-1} + A_2a^{m-2} + \ldots + A_m;$$

mais le terme $(x-a)Q$ s'anéantit, à cause du facteur $(x-a)$ qui devient zéro, tandis que Q acquiert alors une valeur finie, car ses termes sont en nombre fini, et chacun d'eux, ne renfermant pas x en dénominateur, prend une valeur finie pour $x=a$*; donc le second membre de notre égalité se réduit à R, et cela indépendamment de la substitution de a au lieu de x, puisque ce reste R ne contenant pas x, cette substitution ne peut pas s'y effectuer, et il conserve après la valeur qu'il avait auparavant. Donc,

$$R = A_0a^m + A_1a^{m-1} + A_2a^{m-2} + \ldots + A_m,$$

ce qu'il fallait démontrer.

67. Si l'on veut connaître le quotient de la division du poly-

* On conçoit qu'en donnant au diviseur d'une division dont le dividende est constant une valeur suffisamment petite, on peut faire acquérir au quotient une valeur plus grande que toute quantité assignable, de sorte que, ce diviseur tendant vers zéro, le quotient tend vers l'infini. Nous reviendrons plus loin sur ces considérations (137).

nome proposé par $(x-a)$, on calculera les premiers termes du quotient de cette division, et on trouvera

$A_0x^m+A_1$	$x^{m-1}+A_2$	$x^{m-2}+A_3$	$x^{m-3}+\ldots\ldots$	$x-a$		
$+A_0a$	$+A_1a$	$+A_2a$		$A_0x^{m-1}+A_1$	$x^{m-2}+A_2$	x^{m-3}
	$+A_0a^2$	$+A_1a^2$		$+A_0a$	$+A_1a$	
		$+A_0a^3$			$+A_0a^2$	

En comparant entre eux et avec le dividende les termes trouvés au quotient, on reconnaît d'abord que *le premier terme s'obtient en divisant le premier terme du dividende par* x, *et que l'exposant de cette lettre diminue d'une unité, en allant d'un terme au suivant; en second lieu, que le coefficient d'un terme quelconque se forme en ajoutant au coefficient du terme qui occupe le même rang dans le dividende le produit du coefficient du terme précédent du quotient par* a. *Quant aux restes, on trouve chacun d'eux en ajoutant à la somme des termes du dividende sur lesquels on n'a point encore opéré, le produit du dernier terme obtenu au quotient par* a. On est conduit, par *induction*, à regarder comme s'étendant à tous les termes du quotient et à tous les restes cette loi, que nous a manifestée la considération attentive des trois premiers termes du quotient et des restes correspondants *.

* Pour le démontrer, supposons cette loi vraie pour les n premiers termes du quotient et pour les restes correspondants: ce n^{me} terme du quotient sera donc $(A_{n-1}+A_{n-2}a+A_{n-3}a^2+\ldots+A_0a^{n-1})x^{m-n}$, et le n^{me} reste sera en conséquence $(A_n+A_{n-1}a+A_{n-2}a^2+\ldots+A_0a^n)x^{m-n}+A_{n+1}x^{m-n-1}+A_{n+2}x^{m-n-2}+\ldots$. Or en divisant le premier terme de ce reste par le premier terme x du diviseur, on trouve que le $(n+1)^{me}$ terme du quotient est $(A_n+A_{n-1}a+A_{n-2}a^2+\ldots+A_0a^n)x^{m-n-1}$. En retranchant du n^{me} reste, le produit du diviseur $(x-a)$ par ce terme, on obtiendra le $(n+1)^{me}$ reste, lequel sera $(A_{n+1}+A_na+A_{n-1}a^2+\ldots+A_0a^{n+1})x^{m-n-1}+A_{n+2}x^{m-n-2}+\ldots$, ce qui s'accorde avec notre loi. On voit donc que si elle est vraie pour les n premiers termes du quotient et pour les n premiers restes, elle le sera pareillement pour le terme suivant du quotient et pour le reste correspondant. Mais elle a été vérifiée pour les trois premiers termes du quotient et pour les trois premiers restes; donc elle l'est aussi pour le quatrième terme du quotient et pour le quatrième reste; par conséquent, elle sera encore vraie pour le cinquième terme du quotient et pour le reste correspondant, et ainsi de suite : donc elle est générale.

68. Il est bon toutefois d'observer qu'elle suppose que le dividende renferme toutes les puissances de x depuis la $m^{\text{ième}}$ jusqu'à la puissance *zéro*, de sorte que, s'il n'en était pas ainsi, il faudrait avoir bien soin de rétablir ces puissances de x dans ce dividende, en leur donnant zéro pour coefficient.

69. Si l'on remarque qu'en vertu de la loi que nous venons de trouver, le dernier terme du quotient sera $(A_{m-1}+A_{m-2}a+A_{m-3}a^2+\ldots+A_0a^{m-1})$, on conclura la règle pratique suivante, qui est très-commode *pour trouver le quotient et le reste de la division du polynome* $A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_m$ *par* $(x-a)$: *Multipliez le coefficient du premier terme par* a, *et ajoutez le produit au coefficient du second terme; multipliez la somme ainsi obtenue par* a *et ajoutez le produit au coefficient du troisième terme; multipliez cette nouvelle somme par* a, *et ajoutez le produit au coefficient du quatrième terme; et continuez ainsi jusqu'à ce que vous ayez employé tous les termes du dividende. La dernière somme sera le reste cherché, et par conséquent la valeur que prend le polynome proposé pour* $x=a$ (66); *et les sommes précédentes, prises dans l'ordre même où on les a trouvées, seront les coefficients respectifs du deuxième, du troisième, du quatrième .... termes du quotient;* ces sommes en effet ont pour expression

$$A_1+A_0a,\ A_2+A_1a+A_0a^2,\ A_3+A_2a+A_1a^2+A_0a^3,\ldots.$$

$$A_{m-1}+A_{m-2}a+A_{m-3}a^2+\ldots+A_0a^{m-1}$$

et $$A_m+A_{m-1}a+A_{m-2}a^2+\ldots+A_0a^m.$$

Il ne faut pas oublier de rétablir, dans le polynome proposé, les puissances de x qui pourraient ne pas s'y trouver, en leur donnant le coefficient zéro, comme nous l'avons prescrit au n° 68.

70. Exemple. *Quels sont le quotient et le reste de la division de* $2x^6-6x^5+105x^2+20$ *par* $x+3$?

Je rétablis dans le dividende la troisième et la première puissance de x qui y manquent, et j'ai ainsi pour dividende

$2x^5 - 6x^4 + 0.x^3 + 105x^2 + 0.x + 20$, et, pour diviseur, $x + 3 = x - (-3)$. Ainsi a vaut ici -3. On dira donc :

$$\begin{aligned} 2 \times -3 - \quad 6 &= -12; \\ -12 \times -3 + \quad 0 &= +36; \\ +36 \times -3 + 105 &= -\ 3; \\ -\ 3 \times -3 + \quad 0 &= +\ 9; \\ +\ 9 \times -3 + \ 20 &= -\ 7. \end{aligned}$$

Comme d'ailleurs le premier terme du quotient est $\frac{2x^5}{x} = 2x^4$, on voit que ce quotient a pour expression

$2x^4 - 12x^3 + 36x^2 - 3x + 9$, et que le reste est -7.

71. On déduit du théorème démontré au n° **66** plusieurs conséquences importantes, savoir :

1° *Si* a *est une quantité dont la substitution à la place de* x *anéantit le polynome* $A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m$, *ordonné suivant les puissances décroissantes de* x, *ce polynome sera divisible par* (x — a).

En effet, le reste $A_0a^m + A_1a^{m-1} + A_2a^{m-2} + \ldots + A_m$ de cette division est nul, par hypothèse.

2° Réciproquement *si un polynome* $A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m$ *ordonné suivant les puissances décroissantes de* x *est divisible par* x — a, *la substitution de* a *à la place de* x *anéantira ce polynome;*

Car le reste $A_0a^m + A_1a^{m-1} + A_2a^{m-2} + \ldots + A_m$ de cette division doit être nul, puisqu'elle réussit.

3° *La différence des puissances semblables et positives de deux quantités est divisible par la différence de ces quantités;* c'est-à-dire que, m étant un nombre entier et positif, $(x^m - a^m)$ est divisible par $(x - a)$.

En effet $x^m - a^m$ peut être regardé comme un polynome ordonné suivant les puissances décroissantes de x, de sorte qu'on peut ainsi lui appliquer le théorème du n° **66**; donc le reste de la division de $x^m - a^m$ par $x - a$ est $a^m - a^m = 0$; donc $x^m - a^m$ est divisible par $x - a$.

72. Si l'on forme le quotient de la division de $x^m - a^m$ par $x - a$, d'après la loi énoncée au n° **67**, on trouvera :

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + a^3x^{m-4} + \ldots + a^{m-1}.$$

On déduit de là que *le premier terme du quotient de la division de* x^m — a^m *par* x — a *est le premier terme du dividende dont on a diminué l'exposant d'une unité ; que l'exposant de* x *décroît d'une unité d'un terme au suivant, jusqu'au dernier, où il est zéro, tandis que l'exposant de* a *augmente au contraire d'une unité, à partir du premier terme, où il est zéro, jusqu'au dernier, où il est égal à celui de* x *dans le premier terme du quotient. Tous les termes sont d'ailleurs positifs et ont l'unité pour coefficient.*

Il est important de bien retenir cette loi dont les applications sont très-fréquentes.

73. EXEMPLES. I.

$$\frac{x^7 - a^7}{x - a} = x^6 + ax^5 + a^2x^4 + a^3x^3 + a^4x^2 + a^5x + a^6.$$

II. *Quel est le quotient de* $\frac{x^{12} - a^{12}}{x^3 - a^3}$? Je remarque que le dividende est la différence des quatrièmes puissances de x^3 et de a^3 : donc la loi précédente s'applique ici, et on a

$$\frac{x^{12} - a^{12}}{x^3 - a^3} = (x^3)^3 + a^3(x^3)^2 + (a^3)^2(x^3) + (a^3)^3 = x^9 + a^3x^6 + a^6x^3 + a^9.$$

74. Si l'on veut *vérifier* que $x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1}$, est effectivement le quotient de la division de $x^m - a^m$ par $x - a$, on le multipliera par $x - a$, ce qui donnera

$$\begin{array}{l} x^m + ax^{m-1} + a^2x^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + a^{m-1}x \\ \quad - ax^{m-1} - a^2x^{m-2} - \ldots\ldots\ldots - a^{m-1}x - a^m. \end{array}$$

Comme les termes qui se correspondent s'entre-détruisent, ce produit se réduit au dividende $x^m - a^m$.

75. x^m — a^m *est-il divisible par* x + a?

Pour répondre à cette question, il n'y a qu'à chercher le reste

de la division de $x^m - a^m$ par $x + a$. Or, comme $x + a = x - (-a)$, on voit (66) que ce reste est $(-a)^m - a^m$. Si m est un nombre impair, $(-a)^m = -a^m$ (38), et ainsi ce reste se réduit à $-2a^m$; donc alors $x^m - a^m$ n'est pas divisible par $x + a$. Si m est un nombre pair, $(-a)^m = +a^m$ (38), et ainsi $(-a)^m - a^m = 0$; donc *la différence des mêmes puissances impaires de deux quantités n'est pas divisible par la somme de ces quantités, mais la différence des mêmes puissances paires de deux quantités est divisible par la somme de ces quantités.*

On verra de la même manière que *la somme des mêmes puissances impaires de deux quantités est divisible par la somme de ces quantités, mais que la somme des mêmes puissances paires de deux quantités n'est pas divisible par la somme de ces quantités.*

Dans les deux cas, *les termes du quotient sont alternativement positifs et négatifs, et ont l'unité pour coefficient.*

§ V. DES FRACTIONS ALGÉBRIQUES.

76. *On appelle* FRACTION ALGÉBRIQUE *l'indication d'une division, soit qu'on puisse ou qu'on ne puisse pas l'effectuer.* Ainsi la quantité complémentaire que nous avons prescrit d'ajouter au polynome trouvé, en divisant deux polynomes l'un par l'autre, pour obtenir le quotient de leur division, est une fraction algébrique. Telles sont les quantités $\frac{-a^6x + a^7}{x^3 - a^3}$ et $\frac{4x^3}{1 - x}$ (60).

Telle est encore l'expression $\frac{2ab^3}{3c^2d}$.

77. Les *deux termes* d'une fraction algébrique portent, comme dans l'arithmétique, les noms de *numérateur* et de *dénominateur*, mais il faut bien se garder d'attacher ici à ce mot de fraction la même signification qu'en arithmétique, c'est-à-dire de regarder une fraction algébrique comme représentant une partie ou la collection de plusieurs parties égales de l'unité, attendu que les lettres qui entrent dans ses deux termes de-

vant recevoir des valeurs quelconques, son numérateur et son dénominateur peuvent devenir des quantités fractionnaires ou incommensurables, positives ou négatives.

78. Il suit de cette remarque que les raisonnements par lesquels on a établi, dans l'arithmétique, les règles du calcul des fractions, étant fondés sur la définition qu'on y a donnée des fractions, laquelle suppose que le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers abstraits-absolus, ces raisonnements, dis-je, ne peuvent pas s'appliquer aux fractions algébriques, et qu'il faut en conséquence avoir recours à de nouvelles explications, pour savoir comment le calcul de ces fractions devra s'effectuer.

Or, une fraction algébrique exprime la division de son numérateur par son dénominateur, et comme en multipliant ou en divisant un dividende par une certaine quantité, on multiplie ou on divise le quotient par cette quantité, et qu'au contraire en multipliant ou en divisant un diviseur par une certaine quantité, on divise ou on multiplie le quotient par cette quantité, on reconnaît immédiatement que les règles du n° 97, et par suite celles des n°s 99 et 107 de l'*Arithmétique*, s'appliquent aux fractions littérales.

Ainsi 1° *pour multiplier ou diviser une fraction algébrique par une quantité entière, opérez comme s'il s'agissait d'une fraction arithmétique et d'un nombre entier;*

2° *On ne change pas la valeur d'une fraction algébrique en multipliant ou en divisant ses deux termes par une même quantité;*

3° *Pour réduire plusieurs fractions algébriques au même dénominateur, multipliez les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres.*

79. On dit qu'*une fraction algébrique est irréductible, lorsque ses deux termes sont premiers entre eux.*

80. Il suit de là que, *pour réduire une fraction algébrique à sa plus simple expression, il faut supprimer tous les facteurs*

communs à ses deux termes; car son numérateur et son dénominateur seront alors les plus *simples* * possibles.

Cette règle, qui peut entraîner dans des calculs très-compliqués, comme on le verra plus tard, quand le numérateur et le dénominateur sont des polynomes, est d'une application très-facile, lorsque les deux termes sont des monomes. *Il suffit*, en effet, *de diviser les coefficients du numérateur et du dénominateur par leur plus grand commun diviseur, de supprimer les lettres qui ont le même exposant dans le numérateur et dans le dénominateur, et d'écrire chacune des autres lettres dans celui des deux termes où elle a le plus grand exposant, en lui donnant pour exposant la différence de ceux qu'elle a dans le numérateur et dans le dénominateur.* On verra ainsi que

$$\frac{18a^2b^3c^5f}{30a^3bc^5d^2}=\frac{3b^2f}{5ad^2};$$

car le plus grand commun diviseur des coefficients est 6, et a^2, b, c^5, sont les facteurs littéraux communs aux deux termes.

81. Veut-on maintenant trouver une fraction équivalente à $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}$? on observera que si l'on multiplie ce polynôme par m, on aura pour résultat $a+b-c$ (**41**); donc, en divisant ce produit par le facteur m, on retrouvera l'autre facteur $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}$; donc

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}=\frac{a+b-c}{m}.$$

* On ne peut pas dire qu'une quantité algébrique est plus petite qu'une autre, parce que, si pour un certain système de valeurs données aux lettres qu'elles renferment, la première prend une valeur moindre que la seconde; le contraire pourra arriver, quand on assignera à ces lettres un autre système de valeurs. Ainsi, $5a+b<a^2-b$, si l'on suppose $a=6$ et $b=2$, mais $5a+b>a^2-b$ pour $a=3$ et $b=1$.

Quand nous dirons qu'une quantité algébrique est plus simple qu'une autre, nous entendrons qu'elle renferme moins de facteurs que cette autre.

Ainsi *l'addition et la soustraction des fractions algébriques, qui ont le même dénominateur, s'effectuent d'après les règles données pour les fractions arithmétiques.*

Si les fractions à additionner ou à soustraire n'ont pas le même dénominateur, on commencera par les y réduire (78, 3°).

82. Observons toutefois que quand les dénominateurs des fractions que l'on veut réduire au même dénominateur ne sont pas tous premiers entre eux, on doit, comme dans l'arithmétique, chercher leur *plus simple multiple.*

Si ces dénominateurs sont des monomes, il suffira, pour former leur plus simple multiple, d'écrire à la droite du plus petit multiple de leurs coefficients numériques, les lettres différentes qui entrent dans ces dénominateurs, en donnant à chacune le plus grand exposant dont elle est affectée (57). *On multiplie ensuite les deux termes de chaque fraction par le quotient trouvé, en divisant ce plus simple multiple par le dénominateur de cette fraction.*

Exemple. Soient les trois fractions

$$\frac{7a}{40b^2c^3},\quad \frac{5b}{36c^2d},\quad \frac{11c}{45b^4d^2}.$$

Le plus simple multiple des trois dénominateurs est $2^3.3^2.5b^4c^3d^2$: en le divisant successivement par chacun d'eux, on trouvera

$$9b^2d^2,\ 10b^4cd,\ 8c^3,$$

de sorte que nos fractions reviennent aux suivantes :

$$\frac{63ab^2d^2}{360b^4c^3d^2},\quad \frac{50b^5cd}{360b^4c^3d^2},\quad \frac{88c^4}{360b^4c^3d^2}.$$

83. Si les dénominateurs des fractions proposées sont des polynomes, il faudra, pour obtenir leur plus simple multiple, avoir recours au plus grand commun diviseur algébrique, comme on le verra plus loin.

84. Soit maintenant proposé de multiplier entre elles deux fractions algébriques, par exemple, $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$. On observera que

si l'on avait à multiplier $\frac{a}{b}$ par c, le produit serait $\frac{ac}{b}$ (78, 1°); mais en supprimant le dénominateur d, on a multiplié le multiplicateur $\frac{c}{d}$ par d; donc le produit que l'on a trouvé est égal à celui qu'on cherche, multiplié par d; donc on obtiendra celui-ci, en divisant $\frac{ac}{b}$ par d, ce qui donnera $\frac{ac}{bd}$; donc

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

On démontrerait de la même manière que

$$a\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{d}.$$

Donc *pour multiplier une fraction algébrique ou une quantité entière par une fraction algébrique, il faut opérer comme si les facteurs étaient numériques.*

85. Soit enfin proposé de diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$. Nous dirons : si on divise $\frac{a}{b}$ par c, on trouvera $\frac{a}{bc}$; mais, en supprimant le dénominateur d, on a multiplié le diviseur par d; donc le quotient de la division de $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$ a été ainsi divisé par d; donc on obtiendra ce quotient en multipliant $\frac{a}{bc}$ par d, ce qui donnera $\frac{ad}{bc}$; donc

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}\ (84).$$

On verrait de même que

$$a:\frac{c}{d}=a\times\frac{d}{c},$$

et qu'en conséquence *pour diviser par une fraction algébrique, il faut multiplier le dividende par la fraction diviseur renversée.*

86. *Pour réduire un entier et une fraction en une seule fraction, on ajoute au numérateur le produit de l'entier par le dénominateur, et on conserve le dénominateur.* Il est évident en effet que

$$a+\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c} \text{ (81).}$$

EXEMPLE. *Effectuer le calcul suivant:*

$$\frac{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a+b}{2a}+\frac{a-b}{2b}\right)}{\left(\frac{a}{b^2}-\frac{b}{a^2}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}.$$

On trouvera

$$\frac{ab(a^2+b^2)}{2(a^2+ab+b^2)}.$$

§ VI. DES EXPOSANTS NÉGATIFS.

87. L'addition et la soustraction des quantités affectées d'exposants négatifs s'effectueront d'après les règles données au n° 81.

88. Quant à leur multiplication, supposons que l'on veuille multiplier a^{-p} par a^{-q}. Cette opération revient à multiplier $\frac{1}{a^p}$ par $\frac{1}{a^q}$ (56, 2°), ce qui donne pour produit $\frac{1}{a^{p+q}}$, ou, en revenant à la notation des exposants négatifs, a^{-p-q}; donc

$$a^{-p}\times a^{-q}=a^{-p-q}.$$

On verra de même que

$$a^{-p}\times a^{q}=a^{-p+q};$$
$$a^{-p}:a^{q}=a^{-p-q};$$
$$a^{p}:a^{-q}=a^{p+q};$$
$$a^{-p}:a^{-q}=a^{-p+q}.$$

Il suit de ces résultats que *la multiplication et la division des quantités affectées d'exposants négatifs s'effectueront d'après les règles données pour faire les mêmes opérations sur des quantités dont les exposants sont positifs.*

89. La notation des exposants négatifs permet de donner la

forme entière à une expression fractionnaire ; car si l'on a, par exemple, la fraction irréductible $\frac{3b^2f}{5ad^2}$ (80), elle revient à $3.5^{-1}a^{-1}b^2d^{-2}f$.

90. Cette notation fournit ainsi le moyen d'ordonner un polynome qui renferme des termes où la lettre, qu'on veut prendre pour lettre principale, entre en dénominateur. Soit, par exemple, le polynome $\frac{3a^6}{x} - 5a^5 - \frac{4a^7}{x^2} + 2a^4x$: on observera d'abord que $\frac{3a^6}{x} = 3a^6x^{-1}$ et que $\frac{4a^7}{x^2} = 4a^7x^{-2}$; puis, en se rappelant que de deux quantités négatives la plus grande est celle qui a la plus petite valeur absolue (26), on écrira ce polynome de la manière suivante :

$$2a^4x - 5a^5 + 3a^6x^{-1} - 4a^7x^{-2}.$$

Si donc on veut multiplier ce polynome par $6a^2x^2 - \frac{2a^5}{x} - 9a^4$, on ordonnera pareillement ce polynome suivant les puissances décroissantes de x, et, en appliquant la règle du n° 45, on exécutera le calcul qui suit :

$$\begin{array}{l}
2a^4x - 5a^5 + 3a^6x^{-1} - 4a^7x^{-2} \\
6a^2x^2 - 9a^4 - 2a^5x^{-1} \\
\hline
12a^6x^3 - 30a^7x^2 + 18a^8x - 24a^9 \\
\qquad\qquad\qquad - 18a^8x + 45a^9 - 27a^{10}x^{-1} + 36a^{11}x^{-2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 4a^9 + 10a^{10}x^{-1} - 6a^{11}x^{-2} + 8a^{12}x^{-3} \\
\hline
12a^6x^3 - 30a^7x^2 \qquad\qquad + 17a^9 - 17a^{10}x^{-1} + 30a^{11}x^{-2} + 8a^{12}x^{-3}.
\end{array}$$

91. Il résulte de la règle du n° 88 que la démonstration du principe établi au n° 58 convient à deux polynomes qui renfermeraient des lettres affectées d'exposants négatifs, et que, par conséquent, la règle que nous avons donnée pour la division de deux polynomes entiers s'applique aussi au cas où ils contiendraient des lettres dont les exposants seraient négatifs.

Pour en donner un exemple, effectuons la division de x^4-a^4 par x^3+ax. On trouvera

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -a^4 & x^3+ax^2 \\ \cline{2-2}
\quad -ax^3 & x-a+a^2x^{-1}-a^3x^{-2} \\
\qquad\quad +a^2x^2 & \\
\qquad\qquad\quad -a^3x & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+a^4} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0. &
\end{array}
$$

Ainsi on voit que si l'on s'était arrêté à un reste dans le premier terme duquel la lettre ordonnatrice aurait un exposant plus petit que celui qu'elle a dans le premier terme du diviseur, on ne se serait pas aperçu que la division précédente pouvait se terminer. Il ne faut s'arrêter à un pareil reste que si on veut se borner à calculer la partie entière du quotient. Mais *si l'on désire savoir si la division se terminera, il faut continuer le calcul jusqu'à un reste tel, qu'en divisant son premier terme par le premier terme du diviseur, on serait conduit à écrire au quotient un terme dans lequel la lettre principale aurait un exposant plus petit ou plus grand algébriquement* (26) *que la différence de ceux dont elle est affectée dans le dernier terme du dividende et dans le dernier terme du diviseur, selon qu'on aura ordonné par rapport aux puissances décroissantes ou aux puissances croissantes de cette lettre. Si ce reste est nul, l'opération est terminée, sinon elle n'aura point de fin.*

L'exemple précédent répond au cas d'une division numérique, dans laquelle le dividende renferme tous les facteurs premiers du diviseur autres que 2 et 5; car un nombre décimal peut être regardé comme un polynome ordonné suivant les puissances décroissantes de 10. Ainsi

$$234,57 = 2.10^2 + 3.10 + 4 + 5.10^{-1} + 7.10^{-2}.$$

CHAPITRE III.

DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ALGÉBRIQUE.

§ I. DES QUANTITÉS PREMIÈRES.

92. Théorème I. *Toute quantité première* P *qui divise le produit* AB *de deux facteurs entiers* A *et* B, *divise l'un d'eux* *.

Cette proposition ayant été démontrée, dans le cas où les trois quantités P, A et B ne contiennent aucune lettre, c'est-à-dire dans le cas où elles sont numériques (*Arith.*, 81), *nous allons prouver que si notre théorème est vrai lorsque les quantités* P, A *et* B *ne renferment que* n *lettres au plus, il le sera encore quand elles en contiendront* $(n+1)$, et on devra par conséquent en conclure que puisqu'il est vrai, lorsque ces quantités renferment zéro lettres, il le sera encore dans le cas où elles en contiendront $0+1$, c'est-à-dire *une*; partant qu'il le sera encore si P, A et B se composent de $1+1=2$ lettres au plus, et ainsi de suite; de sorte que sa généralité sera prouvée.

Nous distinguerons quatre cas, savoir :

P contient	n	lettres, B en renferme	n	et A en a	$n+1$,
P	n	B	$n+1$	et A	$n+1$,
P	$n+1$	B	n	et A	$n+1$.
P	$n+1$	B	$n+1$	et A	$n+1$.

1er Cas. P *et* B *contiennent* n *lettres et* A *en renferme* $n+1$. Soit x une lettre de A qui ne se trouve ni dans P ni dans B; ce polynome sera de la forme

$$A=ax^{\alpha}+bx^{\beta}+cx^{\gamma}+\ldots,$$

a, b, c... étant des quantités entières composées des mêmes n lettres qui entrent dans P et dans B. En multipliant A par P, on trouvera

$$AB=Bax^{\alpha}+Bbx^{\beta}+Bcx^{\gamma}+\ldots$$

* La démonstration de ce théorème est due à M. *Lefebure de Fourcy*.

Puisque P divise AB et qu'il est indépendant de x, il devra diviser tous les coefficients de cette lettre dans ce produit, c'est-à-dire Ba, Bb, Bc,... (64). Or, P et chacun des facteurs du produit Ba ne sont composés que de n lettres : donc, d'après notre hypothèse, P doit diviser l'un de ces facteurs; s'il divise B, le théorème est démontré; s'il ne le divise pas, il divisera a. Par la même raison, il divisera b, c,...; donc il divisera A.

2ᵉ Cas. *A et B renferment* $(n+1)$ *lettres et P n'en contient que* n.

J'ordonne A et B par rapport aux puissances de la lettre x qui n'entre pas dans P, et je désigne par A′ la somme des termes de A qui sont divisibles par P, et par A″ la somme de tous les autres : on aura

$$A = A' + A''.$$

Je décompose B de la même manière, ce qui donnera

$$B = B' + B'';$$

et par suite

$$AB = A'B' + A''B' + A'B'' + A''B''.$$

Les trois premières parties de ce produit sont divisibles par P; donc la quatrième A″B″ l'est aussi, puisque, par hypothèse, P divise AB. Or, soient ax^{α} et bx^{β} les termes de A″ et de B″ où x a le plus fort exposant : le terme $abx^{\alpha+\beta}$ fera partie du produit A″B″, et ne pourra se réduire avec aucun autre terme de ce produit; donc P divisera le coefficient ab de ce terme (64), et par conséquent il devra diviser ou a ou b, puisque a, b, P ne sont composés que de n lettres au plus; mais P ne peut diviser a, car alors il diviserait un des termes ax^{α} de A″, ce qui est contraire à ce que nous avons supposé; par une raison semblable, il ne saurait diviser b; donc il ne peut diviser A″B″. Donc il est impossible qu'il y ait à la fois dans A et dans B des termes qui ne soient pas divisibles par P; donc ce polynome divise tous les termes de A, ou tous les termes de B.

3ᵉ Cas. *P et A contiennent* $(n+1)$ *lettres, mais il n'y en a que* n *dans* B.

Représentons par Q le quotient entier que donne la division de AB par P, de sorte que

$$AB = PQ.$$

Soient F, F′, F″,... les facteurs premiers de B ; l'égalité précédente deviendra

$$AFF'F''... = PQ.$$

Le premier membre étant divisible par F, le second doit l'être aussi ; mais le facteur P contient $(n+1)$ lettres, l'autre facteur Q en renferme n ou $(n+1)$, et il y en a n dans le diviseur premier F : nous sommes donc dans le premier ou dans le deuxième cas ; donc P ou Q sera divisible par F ; mais P est une quantité première, donc Q est divisible par F ; donc en représentant par Q′ le quotient de la division de Q par F, et en divisant les deux membres de l'égalité précédente par F, on aura

$$AF'F''... = PQ'.$$

On prouvera de la même manière que F′ doit diviser Q′, et en nommant Q″ le quotient, et divisant les deux membres de la dernière égalité par F′, il viendra

$$AF''... = PQ''.$$

En continuant ainsi jusqu'à ce que le premier membre ne renferme plus que A, on arrivera à une égalité telle que

$$A = PQ_1,$$

et comme Q_1 sera encore une quantité entière, il en résulte que A est divisible par P.

4ᵉ Cas. P, A *et* B *renferment* (n + 1) *lettres*.

Supposons que P ne divise pas A, et ne soit pas d'un degré plus élevé que A, par rapport à une certaine lettre x : ordonnons-les suivant les puissances décroissantes de x, divisons A par P* et poussons la division jusqu'à ce qu'on trouve un reste

* Si P était d'un degré supérieur à A, on le diviserait par A, et, à cela près, il n'y aurait rien de changé à la démonstration.

de degré moindre que P. Le quotient pourra contenir des coefficients fractionnaires, mais il sera entier par rapport à x. Soit M le plus simple multiple des dénominateurs de ces coefficients, multiplions A par M et divisons le produit par P : tous les termes du nouveau quotient seront entiers, et en l'appelant Q et désignant par R_1 le reste correspondant, on aura

$$MA = PQ + R_1.$$

R_1 ne peut pas être nul, sans quoi le produit MA serait divisible par la quantité première P, et comme M est indépendant de x et ne renferme ainsi que n lettres au plus, on serait dans le troisième cas de notre démonstration, et on conclurait par conséquent que P divise A ou M, ce qui n'est pas. R_1, d'ailleurs, est entier, puisqu'il est la différence des deux quantités entières MA et PQ.

Cela posé, multiplions les deux membres de l'égalité ci-dessus par le rapport $\frac{B}{P}$, il viendra

$$M\frac{AB}{P} = BQ + \frac{BR_1}{P}.$$

Donc, puisque P divise AB, il divise aussi BR_1 ; de sorte que si R_1 est indépendant de x, P doit diviser B, car nous sommes alors dans le troisième cas, et R_1 qui est indépendant de x n'est pas divisible par P.

Si R_1 est une *fonction* de x, nous diviserons P par R_1. Soit M_1 le facteur par lequel il faut multiplier P pour arriver à un quotient dont tous les termes soient entiers et à un reste de degré moindre que R_1 ; en nommant Q_1 et R_2 ce quotient et ce reste, nous aurons

$$M_1P = R_1Q_1 + R_2.$$

R_2 n'est pas nul, car si cela était, tout facteur premier de R_1 qui serait dépendant de x devrait diviser M_1P, puisqu'il diviserait R_1Q_1, et par conséquent diviserait M_1 ou P (3ᵉ CAS), ce qui est impossible.

Je multiplie les deux membres de la dernière égalité par le rapport $\frac{B}{P}$; ce qui donnera

$$M_1B = \frac{BR_1}{P}Q_1 + \frac{BR_2}{P},$$

ce qui montre que P doit diviser BR_2, puisque nous avons reconnu plus haut qu'il divise BR_1. Si donc R_2 est indépendant de x, P divisera B (3ᵉ Cas) et le théorème sera démontré.

Si R_2 est encore une fonction de x, on divisera P par R_2, et en appelant M_2 le facteur par lequel il faut multiplier P, pour obtenir un quotient entier Q_2 et un reste R_3 de degré moindre que R_2, on aura

$$M_2P = R_2Q_2 + R_3;\ \text{d'où}\ \ M_2B = \frac{BR_2}{P}Q_2 + \frac{BR_3}{P}.$$

Cette dernière égalité montre que P divise BR_3 et par conséquent divise B, si R_3 est indépendant de x.

En continuant ainsi, on parviendra à un reste R_n indépendant de x, puisqu'à un diviseur qui est une fonction de x ne peut correspondre un reste nul, ainsi que nous l'avons prouvé, et que chaque reste est nécessairement d'un degré moindre que le précédent. P devra diviser le produit de ce reste par B, et par conséquent divisera B (3ᵉ Cas).

Notre théorème se trouve ainsi démontré.

93. Théorème II. *Toute quantité première* P *qui divise le produit de plusieurs facteurs entiers* A, B, C, D, *divise l'un d'eux.*

On peut regarder le produit ABCD comme résultant de la multiplication du produit effectué ABC par D; de sorte que P qui divise ce produit doit diviser ABC ou D. S'il divise D, le théorème est démontré, s'il ne le divise pas, il divisera ABC. Mais ABC est le produit des deux facteurs AB et C; donc P qui le divise doit diviser l'un d'eux. S'il divise C, le théorème est démontré; s'il ne le divise pas, il faudra qu'il divise AB, et par conséquent qu'il divise ou A ou B. Donc P divise nécessairement l'un des facteurs du produit ABCD.

94. COROLLAIRE I. *Lorsqu'une quantité première* P *divise une puissance d'une quantité entière* A, *elle divise cette quantité* (*Arith.*, **82**).

95. COROLLAIRE II. *Lorsque deux quantités entières sont premières entre elles, leurs puissances sont aussi premières entre elles* (*Arith.*, **83**).

96. THÉORÈME III. *Une quantité entière ne peut être décomposée qu'en un seul système de facteurs premiers* (*Arith.*, **85**).

97. THÉORÈME IV. *Toute quantité entière* P *qui divise le produit* AB *de deux quantités entières* A *et* B *et qui est première avec l'une d'elles* A *divise l'autre* B.

Soient F, F′ F″... les facteurs premiers de A, et Q le quotient de la division de AB par P, lequel est entier, par hypothèse; on aura

$$BFF'F''... = PQ.$$

Le premier membre étant divisible par F, le deuxième doit l'être aussi, et par conséquent ce facteur qui ne peut diviser P, puisque P est supposé premier avec A, devra diviser Q (**92**); donc en représentant par Q′ le quotient de la division de Q par F, et en divisant par F les deux membres de l'égalité précédente, on aura

$$BF'F''... = PQ'.$$

On prouvera de la même manière que F′ doit diviser Q′, et en nommant Q″ le quotient, et divisant les deux membres de la dernière égalité par F′, il viendra

$$BF''... = PQ''.$$

En continuant ainsi jusqu'à ce que le premier membre ne renferme plus que B, on arrivera à une égalité telle que

$$B = PQ_1,$$

et comme Q_1 sera une quantité entière, il en résulte que B est divisible par P.

98. THÉORÈME V. *Lorsqu'une quantité entière* N *est divisible par plusieurs quantités entières* A, B, C, D, *qui sont premières*

entre elles deux à deux, elle est divisible par leur produit (*Arith.*, 84).

§ II. DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.

99. *On appelle* PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR *de plusieurs quantités algébriques le produit de tous leurs facteurs premiers communs, affectés chacun du plus petit exposant qu'il a dans ces quantités.*

100. Nous distinguerons deux cas, dans la théorie du plus grand commun diviseur algébrique, selon que les quantités entre lesquelles on le cherchera seront monomes ou polynomes.

Si les quantités proposées sont monomes, on cherchera le plus grand commun diviseur de leurs coefficients, et on le fera suivre de toutes les lettres communes à ces monomes, en donnant à chacune d'elles le plus petit exposant dont elle s'y trouve affectée. Ce produit sera le plus grand commun diviseur demandé (99).

101. Examinons actuellement le cas où les quantités proposées sont polynomes, et d'abord nous observerons qu'il suit immédiatement de la définition (99) que *la recherche du plus grand commun diviseur de plusieurs polynomes ne dépend que de la détermination de celui de deux polynomes.*

Soient en effet les quatre polynomes A, B, C, D. *Opérons comme il est prescrit au n° 79 de nos* LEÇONS D'ARITHMÉTIQUE, et désignons en conséquence par E le plus grand commun diviseur entre A et B, par F celui de E et de C, et enfin par G celui de F et de D; G sera le plus grand commun diviseur des quatre polynomes A, B, C, D, car il est évidemment le produit de *tous* leurs facteurs premiers communs, tant égaux qu'inégaux.

102. SCOLIE. Dans la pratique, on devra, après avoir ordonné les polynomes proposés par rapport aux puissances d'une même lettre, chercher d'abord le plus grand commun diviseur entre les deux polynomes du plus faible degré; puis celui de

ce plus grand commun diviseur et du plus simple des polynomes restants, et ainsi de suite.

103. Lemme. *On n'altère pas le plus grand commun diviseur de deux quantités* A *et* B *en multipliant ou en divisant l'une d'elles par un facteur premier avec l'autre.*

En effet, si M est une quantité première avec B, le produit MA n'ayant pas d'autres facteurs premiers que ceux de M et de A (96), les facteurs premiers qui sont communs à MA et à B sont ceux même qui l'étaient à A et à B; donc le plus grand commun diviseur de MA et de B est le même que celui de A et de B (99).

On verrait de même qu'en supposant A divisible par M, le plus grand commun diviseur de $\frac{A}{M}$ et de B est identique avec celui de A et de B.

104. Ce lemme étant ainsi établi, occupons-nous de la recherche du plus grand commun diviseur de deux polynomes, et, pour considérer d'abord le cas le plus simple, *supposons que les deux polynomes ne renferment qu'une seule lettre, et que de plus tous les termes de chacun soient premiers entre eux.*

Désignons-les par A et par B, et admettons que B soit au plus du même degré que A. D'après la définition, le plus grand commun diviseur demandé est le produit de *tous* les facteurs premiers communs à A et à B; donc si B divise exactement A, ce polynome sera le plus grand commun diviseur de A et de B, puisqu'un polynome ne peut être décomposé qu'en un seul système de facteurs premiers. Effectuons donc la division de A par B, et continuons-la jusqu'à un reste de degré inférieur à B; soient Q le quotient et R_1 le reste; nous aurons

$$A = BQ + R_1:$$

or, je dis que, si le quotient Q ne renferme que des termes entiers, le plus grand commun diviseur de A et de B est le même que celui de B et de R_1. En effet, tout facteur commun à A et à B divise A et BQ, et par conséquent leur différence R_1;

de même tout facteur commun à B et à R_1 divise A ; donc les facteurs premiers communs à A et à B sont les mêmes que ceux qui sont communs à B et à R_1, et par conséquent le plus grand commun diviseur de B et de R_1 est le même que celui de A et de B.

Donc *lorsque la division de deux polynomes s'effectue* SANS ADMETTRE DE TERMES FRACTIONNAIRES AU QUOTIENT, *le plus grand commun diviseur de ces deux polynomes est le même que celui qui existe entre le reste de leur division et le polynome qui a servi de diviseur.*

La question est ainsi ramenée à chercher le plus grand commun diviseur entre les polynomes B et R_1. On divisera donc B par R_1 ; si la division réussit, R_1 sera le plus grand commun diviseur demandé ; sinon, ce plus grand commun diviseur sera le même que celui de R_1 et du reste R_2 de cette deuxième division (on suppose *toujours* que l'on n'ait écrit que des termes entiers au quotient). On divisera donc R_1 par R_2, puis le reste R_2 par celui R_3 de la troisième division, puis R_3 par le reste R_4 de la quatrième, et on continuera ainsi jusqu'à ce que l'on soit arrivé à un reste indépendant de la lettre ordonnatrice. Si ce reste est nul, le dernier diviseur est le plus grand commun diviseur demandé ; sinon, les polynomes proposés sont premiers entre eux, sans quoi le plus grand commun diviseur qui, s'il existe, est dépendant de cette lettre (64), puisque tous les termes de chacun sont premiers entre eux, par hypothèse, devrait diviser ce dernier reste, qui est indépendant de cette même lettre.

105. La démonstration du principe, sur lequel est fondée la méthode que nous venons de développer, suppose essentiellement que les quotients successifs aient tous leurs termes entiers, car, si le quotient Q de la division de A par B était fractionnaire, on n'aurait pas le droit de dire que tout facteur qui divise B divise BQ. Or, on sent qu'il arrivera très-souvent que la division du coefficient du premier terme d'un dividende partiel par celui du premier terme du diviseur ne s'effectuera pas

exactement. Dans ce cas, on multipliera le dividende par un facteur tel que le terme correspondant du quotient soit entier (nous indiquerons tout à l'heure (**106**) comment on peut déterminer ce facteur), et cette opération n'altérera pas le plus grand commun diviseur que l'on cherche, si ce facteur est premier avec le diviseur (**103**). Or, pour que le facteur que l'on introduit ainsi soit certainement premier avec le diviseur, il suffit que les coefficients de tous les termes de ce diviseur soient premiers entre eux, puisque notre facteur est indépendant de la lettre ordonnatrice. En conséquence, *avant de prendre un reste pour diviseur, on aura soin de chercher le plus grand commun diviseur des coefficients de tous ses termes, et de le diviser par ce plus grand commun diviseur, ce qu'il est permis de faire* (**103**), *puisque le dividende correspondant, dans la division suivante, a déjà tous ses termes premiers entre eux.*

106. *Si le coefficient du premier terme d'un dividende partiel est premier avec le coefficient du premier terme du diviseur, on n'aura qu'à multiplier ce dividende par ce coefficient, et alors le coefficient du terme correspondant du quotient sera évidemment entier. Mais si les deux coefficients dont il s'agit ne sont pas premiers entre eux, il vaudra mieux chercher leur plus grand commun diviseur, et multiplier le dividende partiel par le quotient obtenu, en divisant le coefficient du premier terme du diviseur par ce plus grand commun diviseur.* On conçoit en effet qu'en opérant ainsi, on aura rendu le coefficient du premier terme du dividende divisible par celui du premier terme du diviseur, et que le facteur introduit de cette manière dans ce dividende sera le plus simple possible (*Arithm.*, **93**).

107. On voit donc que *pour trouver le plus grand commun diviseur de deux polynomes, il faut leur appliquer la méthode des divisions successives*, comme on le fait dans l'arithmétique, *avec les modifications nécessaires pour que les termes des quotients successifs que l'on obtiendra soient tous entiers* (**106**), *et avoir bien soin de diviser chaque reste par le plus grand commun diviseur des coefficients de tous ses termes, avant de le*

prendre pour diviseur. On arrêtera cette serie d'opérations quand on sera parvenu à un reste indépendant de la lettre ordonnatrice : si ce reste est nul, le dernier diviseur est le plus grand commun diviseur demandé; sinon les polynomes proposés sont premiers entre eux.

108. L'application de cette règle ne saurait présenter de difficultés, dans le cas particulier où nous nous sommes placés; car les coefficients du polynome B, étant supposés être tous premiers entre eux, le facteur par lequel on devra multiplier A pour rendre la division par B possible en termes entiers, sera nécessairement premier avec B, de sorte que l'introduction de ce facteur n'altérera pas le plus grand commun diviseur cherché. D'un autre côté, les coefficients des différents termes de chaque reste sont numériques, et la recherche de leur plus grand commun diviseur se réduit par conséquent à une simple opération d'arithmétique.

109. Exemple I. *Chercher le plus grand commun diviseur des polynomes* $20x^4+8x^3-23x^2+13x-3$ et $12x^4-8x^3-21x^2+23x-6$.

1re *Division.*

$$\begin{array}{r|l} & 5 \\ \cline{2-2} 60x^4+24x^3-69x^2+39x-9 & 12x^4-8x^3-21x^2+23x-6 \\ +40x^3+105x^2-115x+30 & \\ \hline 64x^3+36x^2-76x+21 & \end{array}$$

On a multiplié le dividende $20x^4+8x^3-$, etc. par 3, pour que le quotient et le reste soient entiers. Ce facteur 3 est le quotient que l'on trouve, en divisant 12 par le plus grand commun diviseur de 20 et de 12.

2e *Division.*

$$\begin{array}{r|l} & 3x-59 \\ \cline{2-2} 12.16x^4-128x^3-336x^2+368x-96 & 64x^3+36x^2-76x+21 \\ -108x^3+228x^2-63x & \\ \hline -236x^3-108x^2+305x & \\ -236.16x^3-1728x^2+4880x-1536 & \\ +2124x^2-4484x+1239 & \\ \hline 396x^2+396x-297 & \end{array}$$

On a multiplié le premier dividende et le second chacun par 16. Avant de prendre le reste pour diviseur, on divisera tous ses termes par le plus grand commun diviseur 9.11 de tous ses termes.

3° *Division.*

$$\begin{array}{r|l} 64x^3+36x^2-76x+21 & 16x-7 \\ \cline{2-2} -64x^3+48x^2 & 4x^2+4x-3 \\ \hline -28x^2-28x+21 & \\ +28x-21 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Le plus grand commun diviseur est ainsi $4x^2+4x-3$.

110. Passons actuellement au cas général, et considérons ainsi deux polynomes entiers quelconques A et B. Représentons par A_1 le plus grand commun diviseur monome des différents termes de A, et par A′ le quotient de la division de A par A_1; nous aurons

$$A = A_1A'.$$

Désignons de même par B_1 le plus grand commun diviseur monome de tous les termes de B, et par B′ le quotient de la division de B par B_1, de sorte que

$$B = B_1B'.$$

Cela posé, supposons que l'on ait ordonné les polynomes A′ et B′, par rapport aux puissances d'une même lettre, et appelons A_2 le plus grand commun diviseur de tous les coefficients de cette lettre dans A′, et A_3 le quotient de la division de A′ par A_2, nous aurons

$$A' = A_2A_3, \text{ et par conséquent } A = A_1A_2A_3.$$

Supposons que l'on ait agi sur B′ comme on a fait sur A′, et soit

$$B' = B_2B_3, \quad \text{et partant} \quad B = B_1B_2B_3:$$

je dis alors que si l'on cherche le plus grand commun divi-

seur d_1 de A_1 et de B_1; celui d_2 de A_2 et de B_2, et celui d_3 de A_3 et de B_3, le produit

$$d_1d_2d_3$$

sera le plus grand commun diviseur des quantités A et B. En effet, tout facteur polynome premier, dépendant de la lettre ordonnatrice, qui divise $A=A_1A_2A_3$ et $B=B_1B_2B_3$, ne pouvant diviser aucune des quantités A_1, A_2, B_1, B_2, divise nécessairement A_3 et B_3 (95), et est par conséquent un facteur de leur plus grand commun diviseur d_3 (99); donc d_3 est le produit de tous les facteurs polynomes premiers, fonctions de la lettre ordonnatrice, qui sont communs à A et à B. On démontrerait de même que d_1 et d_2 sont, l'un le produit de tous les facteurs monomes premiers communs à A et à B, et l'autre celui de tous les facteurs polynomes premiers, communs à A et à B, qui sont indépendants de la lettre ordonnatrice. Donc $d_1d_2d_3$ est bien le produit de *tous* les facteurs premiers communs à A et à B; donc il est leur plus grand commun diviseur.

Occupons-nous de la recherche de ces différents plus grands communs diviseurs. La détermination de A_1, de B_1 et de d_1 ne présente aucune difficulté (**100**) : quant aux autres, je dis que si l'on savait trouver le plus grand commun diviseur des polynomes A' et B', qui ne renferment plus, chacun, de facteurs monomes communs à tous leurs termes, dans le cas où ils sont composés de n lettres *au plus*, il serait possible de le déterminer aussi, dans le cas où ils en contiendraient $n+1$. En effet, les coefficients de la lettre ordonnatrice dans A' et dans B' ne renfermant alors que n lettres, on pourrait, d'après notre hypothèse et en vertu du principe du n° **101**, calculer A_2 et B_2, et par suite leur plus grand commun diviseur d_2, ainsi que les quotients A_3 et B_3. Cela posé, j'observe que les différents termes de chacun de ces quotients étant premiers entre eux, on pourra appliquer à A_3 et à B_3 la méthode du n° **107** ; car, dans les raisonnements sur lesquels nous l'avons fondée, nous ne nous sommes nullement occupés du nombre des lettres qui pourraient entrer dans les polynomes proposés (**103**, **104**, **105** et **106**). Ainsi, pour

rendre possible la première division partielle, on multipliera A_3 par une certaine quantité M, qui sera un produit de facteurs premiers du coefficient du premier terme de B_3 (106), et cette opération ne saurait altérer le plus grand commun diviseur des polynomes A_3 et B_3, puisque tous les coefficients de la lettre ordonnatrice dans B_3 étant premiers entre eux, le facteur par lequel on multiplie A_3 est nécessairement premier avec B_3 (64). Ayant ainsi effectué entièrement la division de A_3 par B_3, on pourra supprimer, dans le reste de cette division, tous les facteurs monomes qu'il renfermera (100), ainsi que les facteurs polynomes indépendants de la lettre ordonnatrice qui leur seraient communs, car il suffira, pour cela, de chercher le plus grand commun diviseur de plusieurs polynomes de n lettres au plus (101). On procédera ensuite à la seconde division, en prenant pour diviseur ce reste ainsi modifié, et on continuera de la même manière. Donc, on arrivera à la valeur de d_3.

La détermination du plus grand commun diviseur de deux polynomes A′ et B′, qui contiennent un certain nombre de lettres, et qui sont tels que les termes de chacun n'ont d'ailleurs aucun facteur monome commun, dépend donc seulement de celle du plus grand commun diviseur de pareils polynomes qui renfermeraient une lettre de moins. Or, nous avons donné une méthode complète pour calculer le plus grand commun diviseur de deux polynomes d'une seule lettre, tels que tous les termes de chacun seraient premiers entre eux (107); donc, on pourra trouver le plus grand commun diviseur de deux polynomes qui renfermeraient deux lettres, puis trois, puis quatre, et en général un nombre quelconque de lettres.

111. Règle générale. *Pour trouver le plus grand commun diviseur de deux polynomes* A *et* B, *cherchez le plus grand commun diviseur monome* A_1 *de tous les termes de* A (100); *celui* B_1 *de tous les termes de* B ; *puis le plus grand commun diviseur* d_1 *de* A_1 *et de* B_1. *Mettez* d_1 *de côté, et divisez* A *et* B *respectivement par* A_1 *et par* B_1 *: vous obtiendrez des quotients* A′ *et* B′, *que vous ordonnerez par rapport aux puissances d'une même lettre. Calculez le*

plus grand commun diviseur A_2 *des coefficients du polynome* A', *celui* B_2 *des coefficients du polynome* B', *et le plus grand commun diviseur* d_2 *de* A_2 *et de* B_2. *Mettez* d_2 *de côté, et divisez* A' *et* B' *respectivement par* A_2 *et par* B_2, *ce qui vous donnera des quotients* A_3 *et* B_3 *dont tous les termes seront premiers entre eux. Cherchez enfin le plus grand commun diviseur* d_3 *de ces deux quotients, d'après la règle du n° 107, et il ne s'agira plus ensuite que de multiplier entre elles les trois quantités* d_1, d_2 *et* d_3. *Leur produit résoudra la question.*

112. Dans le cas où les deux polynomes A' et B' ne renfermeront que deux lettres x et y, et c'est ce cas qui se présentera le plus souvent, on pourra simplifier les calculs de la manière suivante. On ordonnera A' et B' par rapport à y, par exemple, et on cherchera le plus grand commun diviseur X des coefficients de cette lettre dans A'; puis on divisera A' par X. On ordonnera le quotient A'' par rapport à x, et on cherchera le plus grand commun diviseur Y des coefficients des différents termes de A''; on divisera A'' par Y, et en appelant A''' le quotient de cette division, on aura

$$A' = XYA'''.$$

On mettra de même le polynome B' sous la forme

$$B' = X'Y'B''',$$

et, en formant ensuite le produit des plus grands communs diviseurs des quantités X et X', Y et Y', A''' et B''', on obtiendra le plus grand commun diviseur de A' et de B', comme il est facile de le démontrer, à l'aide de raisonnements analogues à ceux qu'on a employés au n° **110**.

L'avantage de cette méthode consiste à faire appliquer la règle du n° **107** à des polynomes de degré plus faible que ceux sur lesquels on devrait opérer d'après celle du n° **111**.

113. Il y a encore un cas particulier que l'on peut traiter plus simplement que par la *règle générale;* c'est celui où *l'un des deux polynomes*, A', *par exemple*, *renfermera une lettre* x *qui ne se trouvera pas dans l'autre* B'. *On ordonnera alors* A' *par rapport à* x, *et le plus grand commun diviseur demandé*

sera celui même qui existera entre B′ *et les coefficients de cette lettre* x. Il est évident, en effet, que B′ étant indépendant de x, le plus grand commun diviseur demandé ne peut contenir cette lettre, et divise en conséquence tous les coefficients de x dans le polynome A′ (**64**), qui est de la forme

$$ax^{\alpha}+bx^{\beta}+cx^{\gamma}+\text{etc.}:$$

donc en cherchant le plus grand commun diviseur des quantités B′, a, b, c,... on aura celui de A′ et de B′.

114. Exemple. *Chercher le plus grand commun diviseur des deux polynomes* $A=20y^3x^5-10y^4x^3-4y^3x^7-2y^7x^4-4y^6x^5-32y^4x^4-28y^4x^3+2y^8x^3+5y^4x^6+32y^2x^3+8y^6x^3+24y^2x^4+4y^5x^7+6y^6x^4-16y^5x^5+12y^5x^3-2y^5x^6-8y^2x^6-12y^3x^3-4y^7x^5-2y^6x^6+2y^8x^4+4y^3x^4$ *et* $B=12y^4x^5-54y^4x^2+6y^6x^5-132y^3x^4+144y^5x^3-30y^6x^2-12y^7x^4-30y^5x^5-12y^7x^2-48y^5x^4+108y^3x^5-12y^6x^4-78y^5x^2+48y^6x^3-6y^4x^5+222y^4x^3+24y^3x^3-180y^4x^4-6y^8x^2+12y^5x^5+24y^7x^3$.

On verra d'abord que $A_1=2y^2x^3$, $B_1=6y^3x^2$; partant $d_1=2y^2x^2$. En divisant A et B respectivement par A_1 et par B_1, et ordonnant les quotients par rapport à x, on trouvera $A'=(2y^3-2y)x^4+(-y^4+5y^2-4)x^3+(-2y^5-2y^4-8y^3-14y^2+10y-16)x^2+(y^6-y^5+3y^4-y^3-16y^2+2y+12)x+y^6+4y^4+6y^3-5y^2-6y$, et $B'=(2y^2+2y)x^4+(-y^3-5y^2+4)x^3+(-2y^4-2y^3-8y^2-30y-22)x^2+(y^5+4y^4+8y^3+24y^2+37y+18)x-y^5-2y^4-5y^3-13y^2-9y$.

Le plus grand commun diviseur des coefficients de x dans A′ est $Y=y^2-1$. On le trouve plus simplement que par la règle du n° **101**, en observant que le plus simple de ces coefficients est $2y^3-2y=2y(y-1)(y+1)$. Or, en faisant soit $y=1$, soit $y=-1$, dans tous les autres, ils deviennent nuls; d'où l'on conclut qu'ils sont divisibles par $y-1$ et par $y+1$ (**71**, 1°), et partant par leur produit y^2-1 (**98**). Quant au facteur monome y, il ne peut pas diviser tous les autres coefficients. Si on remarque de même que le coefficient de x^4 dans B′ revient à $2y(y+1)$, on verra que pour $y=-1$ tous les autres coefficients de x dans B′ s'évanouissent, et qu'ainsi le plus grand

commun diviseur des coefficients de B′ est $Y'=y+1$. Donc, le plus grand commun diviseur de Y et de Y′ est $d_1=y+1$. En divisant A′ et B′ respectivement par Y et par Y′, on aura pour quotients $A''=2yx^4+(-y^2+4)x^3+(-2y^3-2y^2-10y-16)x^2+(y^4-y^3+4y^2-2y-12)x+y^4+5y^2+6y$, et $B''=2yx^4+(-y^2-4y+4)x^3+(-2y^3-8y-22)x^2+(y^4+3y^3+5y^2+19y+18)x-y^4-y^3-4y^2-9y$.

J'ordonne actuellement ces polynomes par rapport à y, ce qui donne

$$A''=(x+1)y^4+(-2x^2-x)y^3+(-x^3-2x^2+4x+5)y^2+(2x^4-10x^2-2x+6)y+4x^3-16x^2-12x,$$

et $$B''=(x-1)y^4+(-2x^2+3x-1)y^3+(-x^3+5x-4)y^2+(2x^4-4x^3-8x^2+19x-9)y+4x^3-22x^2+18x.$$

On voit immédiatement que l'hypothèse de $x=-1$ n'anéantit pas le coefficient de y^3 dans A″, et que par conséquent ce polynome n'est pas divisible par le coefficient $x+1$ de son premier terme. Au contraire, en faisant $x=1$ dans B″, tous ses termes s'évanouissent, de sorte que ce polynome est divisible par $x-1$. Ainsi $X=1$, $X'=x-1$, et leur plus grand commun diviseur $d_2=1$. J'effectue la division de B″ par X′, et je trouve pour quotient $B'''=y^4+(-2x+1)y^3+(-x^3-x+4)y^2+(2x^3-2x^2-10x+9)y+4x^2-18x$.

Il s'agit actuellement d'appliquer la méthode des divisions successives (**107**) aux deux polynomes A″ et B‴.

1re *Division.*

					$x+1$		*quotient.*	
	y^4-2x^2	y^3-x^3	y^2+2x^4	$y+4x^3$	y^4-2x	y^3-x^2	y^2+2x^3	$y+4x^2$
$+1$	$-x$	$-2x^2$	$-10x^2$	$-16x^2$	$+1$	$-x$	$-2x^2$	$-18x$
		$+4x$	$-2x$	$-12x$		$+4$	$-10x$	
		$+5$	$+6$				$+9$	
	$+2x^2$	y^3+x^3	y^2-2x^4	$y-4x^3$				
	$+x$	$+2x^2$	$+12x^2$	$+14x^2$				
	-1	$-3x$	$+x$	$+18x$				
		-4	-9					
		$-y^3+x$	y^2+2x^2	$y-2x^3$				
		$+1$	$-x$	$+6x$				
			-3					

2e Division.

$$\begin{array}{l} y-x \\ +2 \end{array} \quad \textit{quotient.}$$

$$\begin{array}{r|r|r|r}
y^4-2x & y^3-x^2 & y^2+2x^3 & y+4x^3 \\
+1 & -x & -2x^2 & -18x \\
 & +4 & -10x & \\
 & & +9 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|r|r}
y^3-x & y^2-2x^2 & y+2x^2 \\
-1 & +x & -6x \\
 & +3 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|r|r}
+x & y^3+2x^2 & y^2-2x^3 & y \\
+1 & -x & +6x & \\
 & -3 & & \\
\hline
-x & y^3+x^2 & y^2+2x^3 & y \\
+2 & -2x & -4x^2 & \\
 & +1 & -4x & \\
 & & +9 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|r}
-x^2 & y^2-2x^3 & y+2x^3 \\
+x & +5x^2 & -10x^2 \\
+2 & +x & +12x \\
 & -6 & \\
\hline
-x & y^2+x^2 & y+2x^3 \\
+3 & -3x & -6x^2 \\
 & +3 & -6x
\end{array}$$

3e Division.

$$\begin{array}{l} y-x \\ +6 \end{array} \quad \textit{quotient.}$$

$$\begin{array}{r|r|r}
y^3-x & y^2-2x^2 & y+2x^2 \\
-1 & +x & -6x \\
 & +3 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|r|r}
x & y^2-x^2 & y-2x^2 \\
-3 & +3x & +6x^2 \\
 & -3 & +6x
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|r|r}
{}^{*}\,x & y^3-x^2 & y^2-2x^3 & y+2x^3 \\
-3 & +2x & +7x^2 & -12x^2 \\
 & +3 & -9 & +18x
\end{array}$$

* On a multiplié le dividende par $x-3$.

$$\begin{array}{r|r|r}
+x^3 & y^2+2x^3 & y \\
-8x & -6x^2 & \\
+3 & -6x & \\
\hline
-x & y^2+x^2 & y \\
+6 & -6x & \\
 & -9 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|r|r}
{}^{*}\,x & -x & y^2+x^3 & y+2x^4 \\
-3 & +6 & -9x^2 & -18x^3 \\
 & & +9x & +54x^2 \\
 & & +27 & -54x
\end{array}$$

* On a multiplié le reste par $x-3$.

$$\begin{array}{r|r}
-x^3 & y-2x^4 \\
+9x^2 & +18x^3 \\
-21x & -30x^2 \\
+18 & -36x \\
\hline
-12x & y+24x^2 \\
+45 & -90x
\end{array}\Bigg\} = 3(4x-15)(-y+2x)$$

Ce dernier reste revient à $-3(4x-15)(y-2x)$. On supprime donc le facteur $-3(4x-15)$, et il s'agit de diviser le polynôme diviseur par $+y-2x$. Mais, au lieu d'effectuer cette division, il sera plus simple de faire $y=2x$ dans ce polynome. Comme on trouve qu'il se réduit à zéro par cette substitution, on en conclut qu'il est divisible par $y-2x$ (**71**, 1°), et qu'ainsi le plus grand commun diviseur de A″ et de B‴ est $d_4=y-2x$. Le plus grand commun diviseur demandé est donc

$$d_1d_2d_3d_4=2y^2x^2(y+1)(y-2x).$$

115. *Pour réduire une fraction algébrique à sa plus simple expression, on divisera ses deux termes par leur plus grand commun diviseur* (**79**). On verra ainsi que

$$\frac{12x^4-8ax^3-21a^2x^2+23a^3x-6a^4}{20x^4+8ax^3-23a^2x^2+13a^3x-3a^4}=\frac{3x^2-5ax+2a^2}{5x^2-3ax+a^2},$$

le plus grand commun diviseur de ses deux termes étant $4x^2+4ax-3a^2$.

116. Problème. *Trouver le plus simple multiple de plusieurs quantités données* A, B, C, D.

On cherchera le plus grand commun diviseur de A et de B, on divisera B par ce plus grand commun diviseur, et en multipliant A par le quotient B′ de cette division, on obtiendra un produit AB′, qui sera le plus simple multiple de A et de B. En cherchant de même le plus simple multiple de AB′ et de C, on aura le plus simple multiple des trois quantités A, B, C, et ainsi de suite (*Arith.*, **93**).

117. Dans la *théorie générale des équations*, on restreint la définition que nous avons donnée des quantités entières. *On y regarde comme entière toute quantité dans l'expression de laquelle les* INCONNUES *n'entrent dans aucun dénominateur, ni sous aucun radical, et pour qu'une quantité soit dite divisible par une autre, il suffit que leur division ne donne pas de reste, et que le quotient soit entier par rapport aux inconnues, de même que les quantités proposées.* Ainsi $x^2+\frac{xy}{\sqrt{2}}-6y^2$, fonction en-

tière de x et de y, est divisible par $\frac{2}{3}x-y\sqrt{2}$, parce que le reste de cette division est nul, et que le quotient $\frac{3}{2}x+3y\sqrt{2}$ est aussi une fonction entière de x et de y.

En partant de ces définitions, on démontre facilement les propositions suivantes :

118. Théorème I. *Tout facteur du premier degré* x — a, *qui divise le produit* AB *de deux fonctions entières de* x, *divise nécessairement l'une d'elles.*

Supposons, en effet, que le binome $x-a$ ne divise pas A, j'effectue la division de ces deux quantités, et je pousse l'opération jusqu'à ce que je trouve un reste indépendant de x. Soient R ce reste et Q le quotient, lequel est ainsi une fonction entière de x; nous aurons

$$\frac{A}{x-a}=Q+\frac{R}{x-a}.$$

Je multiplie les deux membres de cette égalité par le rapport $\frac{B}{R}$, ce qui donne

$$\frac{AB}{R(x-a)}=\frac{BQ}{R}+\frac{B}{x-a}.$$

Or, puisque AB est divisible par $x-a$, et que R est indépendant de x, on voit que le premier membre de cette égalité est entier; il en est de même du terme $\frac{BQ}{R}$; donc $\frac{B}{x-a}$ est aussi entier, donc B est divisible par $x-a$.

119. Théorème II. *Si un binome du premier degré* x — a *divise un produit de plusieurs facteurs entiers par rapport à* x, *il divise l'un deux.*

Démonstration du n° 93.

120. Théorème III. *Toute fonction entière de* x *ne peut être décomposée qu'en un seul système de facteurs binomes du premier degré par rapport à cette lettre.*

Soient A $(x-a)(x-b)(x-c)$... et A'$(x-a')(x-b')(x-c')$... deux expressions de la fonction proposée, A et A' désignant des quantités indépendantes de x : puisque le binome du premier degré $x-a'$ divise le produit A'$(x-a')(x-b')(x-c')$..., il doit diviser son égal A$(x-a)(x-b)(x-c)$..., et par conséquent un de ses facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c$,... (119); mais comme ils sont du premier degré, il faudra qu'il soit égal à l'un d'eux. Supposons $x-a'=x-a$. Les deux produits A$(x-a)(x-b)(x-c)$... et A'$(x-a')(x-b')(x-c')$... étant égaux, si on les divise respectivement par $x-a$ et par $x-a'$, les quotients A$(x-b)(x-c)$... et A'$(x-b')(x-c')$... devront être égaux. Or, $x-b'$ divise le second ; etc. (Voyez l'*Arithmétique*, n° 85.)

121. *On appelle plus grand commun diviseur de plusieurs fonctions entières de* x *le produit de tous les facteurs du premier degré en* x *qui leur sont communs, chacun d'eux étant affecté du plus petit exposant qu'il a dans ces fonctions.*

122. Si l'on applique à deux pareilles fonctions les raisonnements du n° **104**, on verra que *pour trouver leur plus grand commun diviseur, il faudra les soumettre à la méthode des divisions successives*, telle qu'on la pratique dans l'arithmétique, *en arrêtant l'opération, quand on sera parvenu à un reste indépendant de* x ; *de telle sorte que, si ce reste est nul, le dernier diviseur sera le plus grand commun diviseur demandé, et que, s'il n'est pas nul, les fonctions proposées n'ont pas de diviseur commun en* x.

123. Remarquons qu'il ne sera pas *nécessaire* d'avoir recours aux modifications prescrites dans le n° **105**, parce que la démonstration du principe fondamental (*le plus grand commun diviseur de deux fonctions entières de* x *est le même que celui qui existe entre le reste de leur division et celle qui a servi de diviseur*) n'exige pas que le quotient Q soit entier par rapport aux coefficients de x; il suffit qu'il le soit par rapport à cette lettre. Toutefois, il sera plus simple de réduire tous les termes des deux fonctions proposées au même dénominateur, de chercher ensuite le plus grand commun diviseur des deux numé-

rateurs, d'après la règle du n° **107**, et enfin de diviser le plus grand commun diviseur trouvé par le dénominateur commun, parce qu'en le supprimant, dans les fonctions proposées, on lès a multipliées par ce dénominateur. Dans la plupart des applications, il sera utile de tenir compte de ce dénominateur.

CHAPITRE IV.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

---

§ I. DES ÉQUATIONS A UNE SEULE INCONNUE.

124. Si l'on considère, avec un peu d'attention, la méthode que nous avons suivie pour résoudre les problèmes des nos 4 et 5, on verra qu'elle se compose de deux parties distinctes : dans la première, *nous avons mis le problème en équation*, c'est-à-dire que *nous avons exprimé, à l'aide des symboles algébriques, les relations que l'énoncé établit entre les données et l'inconnue*, ce qui, pour le premier de ces problèmes, nous a conduit à égaler entre elles les deux quantités $2x+d$ et s ; dans la deuxième partie, nous avons tiré de l'équation ainsi formée la valeur de l'inconnue, ce qu'on appelle *résoudre cette équation.*

125. Il n'y a pas de règle fixe *pour mettre un problème en équation* : tout ce qu'on peut dire de plus général à ce sujet revient au précepte suivant :

Examinez d'abord, avec soin, quelles sont les quantités dont la détermination pourrait conduire à la connaissance de toutes celles que l'on cherche, et ce seront là les véritables inconnues de la question. Représentez ces inconnues chacune par une lettre différente (on emploie ordinairement, pour cela, les dernières lettres de l'alphabet); *puis*, SANS FAIRE AUCUNE DISTINCTION ENTRE LES DONNÉES ET LES INCONNUES, *effectuez sur les unes et sur les autres les mêmes opérations qu'il faudrait faire pour vérifier les valeurs inconnues, si elles étaient trouvées, et vous obtiendrez ainsi autant d'équations que l'énoncé du problème en comporte.*

126. Ces équations pouvant être plus ou moins compliquées, on les a partagées en plusieurs classes que l'on distingue par

leur *degré*. Lorsqu'on a ramené une équation à ne contenir que des termes entiers, et on verra bientôt (132) que la chose est toujours possible, on prend pour valeur de son degré la plus forte somme des exposants des inconnues dans chacun de ses termes. Ainsi l'équation $x^3-5x^2y^2+y-3=0$ est une équation du *quatrième degré* à deux inconnues. L'équation $2x+d=s$, trouvée au n° 4, est une équation du *premier degré* à une seule inconnue.

127. RÉSOUDRE DES ÉQUATIONS, *c'est trouver tous les systèmes de nombres qui, substitués dans ces équations à la place des inconnues, y* SATISFONT, c'est-à-dire *rendent identiques les deux membres de chacune d'elles. Ces nombres sont ce qu'on appelle les* VALEURS *des inconnues*, ou *les* SOLUTIONS *des équations proposées*.

Il est clair que les équations proposées seront résolues, lorsque, par une suite de transformations exécutées sur elles, on sera parvenu à des équations dont un des membres ne renfermera qu'une inconnue seulement, et dont l'autre membre, ne contenant que des quantités connues, sera par conséquent la valeur de cette inconnue.

128. Il existe, pour résoudre les équations, des méthodes générales dont l'exposition est un des objets principaux de l'algèbre : pour prendre d'abord le cas le plus simple, nous supposerons que l'on veuille résoudre une équation du premier degré à une seule inconnue.

Il y a deux cas à considérer, selon que l'équation aura tous ses termes entiers ou qu'elle en renfermera de fractionnaires.

1er CAS. Considérons l'équation

$$ax-b=cx+d \qquad [1].$$

Puisque cette équation sera résolue lorsque nous lui aurons fait subir une transformation telle que l'inconnue sera seule dans un membre et que l'autre membre ne contiendra que des quantités connues (127), il convient de faire évanouir le terme $-b$ du premier membre et le terme cx du second, ce qui se

fera en ajoutant $+b-cx$ à ces deux membres, et cette opération n'altérera pas l'équation, car il est clair que les valeurs de x qui vérifiaient l'équation avant ce changement, la vérifieront encore après. On trouvera ainsi

$$ax-b+b-cx=cx+d+b-cx,$$

ou, en réduisant (**29**),

$$ax-cx=b+d \qquad [2].$$

Or, si l'on compare cette équation à la proposée, on reconnaîtra que le terme $-b$ a passé du premier membre dans le second, en y prenant le signe $+$, et que le terme $+cx$, qui était dans le second membre, se trouve maintenant dans le premier avec le signe $-$; donc

Pour TRANSPOSER *un terme d'un membre dans un autre, il faut le supprimer, dans le membre où il se trouve, et l'écrire dans l'autre avec un signe contraire au sien.*

Reprenons maintenant l'équation [2]; en y mettant x en facteur commun des quantités qu'elle multiplie, il viendra

$$(a-c)x=b+d.$$

Mais celle-ci signifie que $b+d$ est le produit de $(a-c)$ par x, et qu'ainsi on aura la valeur de x en divisant $b+d$ par $a-c$, de sorte que

$$x=\frac{b+d}{a-c}.$$

D'où l'on voit que *quand un des membres d'une équation est un monome qui contient* x, *et que l'autre ne renferme que des quantités données, on* DÉGAGE *cette inconnue de son coefficient, en divisant l'autre membre par ce coefficient.*

129. L'équation [1] ne peut être vérifiée que par la seule valeur de x que nous venons de trouver, car toute valeur de x qui y satisfait doit satisfaire aussi à toutes les équations transformées que nous en avons déduites, et la dernière de ces transformées ne peut être vérifiée qu'en y remplaçant x par $\frac{b+d}{a-c}$.

130. Si l'on veut s'assurer *a posteriori* que $\frac{b+d}{a-c}$ est bien la valeur de x, on substituera cette quantité dans l'équation [1], et il faudra que ses deux membres deviennent ainsi identiques. En effectuant cette substitution, on trouvera successivement

$$\frac{a(b+d)}{a-c}-b=\frac{c(b+d)}{a-c}+d,$$

$$\frac{ab+ad-ab+bc}{a-c}=\frac{bc+cd+ad-cd}{a-c} \quad (86),$$

$$\frac{ad+bc}{a-c}=\frac{bc+ad}{a-c},$$

égalité identique.

131. 2e Cas. Considérons actuellement le cas général, et prenons pour exemple l'équation

$$\frac{d}{cf}+\frac{ax}{bc}=g-\frac{dx}{bf}.$$

Si tous les termes de cette équation étaient des fractions de même dénominateur, il suffirait de le supprimer pour rentrer dans le cas précédent, et cette suppression n'altérerait pas l'équation, puisqu'en ne faisant ainsi que multiplier ses deux membres par ce dénominateur, les valeurs de x qui la vérifiaient avant cette multiplication la vérifieraient encore après *. Rédui-

* *Pour qu'une équation ne soit pas altérée par la multiplication de ses deux membres par une même quantité, il faut que cette quantité soit indépendante de* x, sans quoi on lui ferait acquérir des *solutions* qu'elle n'avait pas. Ainsi l'équation $x-1=2$, n'a pas d'autre solution que $x=3$; mais si l'on multiplie ses deux membres par $x-4$, on obtient une équation $(x-1)(x-4)=2(x-4)$, qui est encore vérifiée par $x=3$, mais qui l'est en outre par $x=4$.

Il est de même permis de diviser les deux membres d'une équation par une même quantité, pourvu que cette quantité soit indépendante de x. Ainsi l'équation $(x-1)(x-4)=2(x-4)$ est vérifiée par $x=3$ et par $x=4$; mais si l'on supprime le facteur $x-4$, l'équation résultante $x-1=2$ ne l'est plus que par $x=3$.

Dans aucun cas, le facteur par lequel on multiplie ou divise les deux membres d'une équation ne doit être nul; en effet, par la première opéra-

sons donc *tous* les termes au même dénominateur. Il viendra, d'après la règle connue (82),

$$\frac{bd}{bcf}+\frac{afx}{bcf}=\frac{bcfg}{bcf}-\frac{cdx}{bcf},$$

et, en supprimant le dénominateur commun bcf,

$$bd+afx=bcfg-cdx,$$

équation, d'où l'on tirera successivement

$$afx+cdx=bcfg-bd,$$

en transposant les termes bd et $-cdx$;

$$(af+cd)x=b(cfg-d),$$

en mettant x et b en facteurs communs; et

$$x=\frac{b(cfg-d)}{af+cd},$$

en dégageant x de son coefficient.

132. En résumant les opérations que nous avons effectuées, pour résoudre les deux équations que nous venons de prendre pour exemples, on formera la règle générale suivante :

Pour résoudre une équation du premier degré à une seule inconnue, commencez par faire évanouir les dénominateurs, en multipliant chaque terme entier par leur plus simple multiple, le numérateur de chaque fraction par le quotient obtenu en divisant ce plus simple multiple par son dénominateur, et en n'écrivant aucun dénominateur. Effectuez ensuite les opérations qui pourraient être indiquées, puis exécutez toutes les simplifications

---

tion, elle change tout à fait de nature, puisque cette équation, qui avait seulement un nombre limité de solutions, devient ainsi susceptible d'être vérifiée par tous les nombres possibles. Telle est l'équation $x-1=2$, qui ne peut être vérifiée que par $x=3$, tandis que si l'on multiplie ses deux membres par zéro, on trouve l'équation $0.(x-1)=0$, qui est satisfaite par tel nombre que l'on y mettra au lieu de x. Et si l'on divise les deux membres d'une équation par un facteur nul, elle n'a plus aucun sens.

dont l'équation est alors susceptible, soit en faisant les réductions dans chaque membre, s'ils contiennent des termes semblables, soit en les divisant l'un et l'autre par leurs facteurs communs, s'ils en ont. Transposez tous les termes affectés de l'inconnue dans un même membre, et tous ceux qui en sont indépendants dans l'autre : faites encore la réduction des termes semblables, ce qui réduira chaque membre à être un monome, si l'équation est numérique. Si elle est littérale, mettez l'inconnue en facteur commun des quantités qu'elle multiplie, et dégagez-la enfin de son coefficient. Vous obtiendrez ainsi la seule valeur que puisse avoir cette inconnue.

133. Exemples. I. *Résoudre l'équation*

$$x-\frac{1}{100}-\frac{7x}{15}=\frac{7x}{20}-\frac{1}{540}+\frac{8x}{45}.$$

On trouve que le plus petit multiple des dénominateurs est $2^2.3^3.5^2=2700$, et qu'en faisant évanouir les dénominateurs, il viendra

$$2700x-27-180.7x=135.7x-5+60.8x,$$

ou bien

$$2700x-27-1260x=945x-5+480x,$$

ou encore, en réduisant,

$$1440x-27=1425x-5;$$

puis

$$1440x-1425x=27-5,$$

$$15x=22,$$

$$x=\frac{22}{15}=1\,\frac{7}{15}.$$

Vérification. Je remplace x par $\frac{22}{15}$ dans la proposée, ce qui donnera

$$\frac{22}{15}-\frac{1}{100}-\frac{154}{15^2}=\frac{77}{15.10}-\frac{1}{540}+\frac{176}{15.45},$$

En réduisant au même dénominateur, on trouvera

$$\frac{3960-27-1848}{2^2.3^3.5^2}=\frac{1386-5+704}{2^2.3^3.5^2},$$

puis

$$\frac{2085}{2^2.3^3.5^2}=\frac{2085}{2^2.3^3.5^2}.$$

II. *Résoudre l'équation*

$$\frac{ax}{2a-b}-\frac{ax}{b(a+b)}=\frac{bx}{2a(a-b)}-\frac{5ab}{2a+b}$$
$$=-\frac{bx}{2a(a+b)}+\frac{5b(2a-b)}{a^2-b^2}-\frac{ax}{b(a-b)}.$$

Le plus simple multiple des dénominateurs est

$$2ab(2a-b)(2a+b)(a^2-b^2);$$

en les faisant évanouir, il viendra :

$$(2a+b)\{2a^2b(a^2-b^2)-2a^2(2a-b)(a-b)+b^2(2a-b)(a+b)$$
$$+b^2(2a-b)(a-b)+2a^2(2a-b)(a+b)\}x$$
$$=10ab^2(2a-b)\{a(a^2-b^2)+(2a-b)(2a+b)\}.$$

En mettant $(2a-b)$ en facteur commun dans le coefficient de x, on trouvera, après diverses transformations,

$$2ab(2a+b)\{a(a^2-b^2)+(2a-b)(2a+b)\}x$$
$$=10ab^2(2a-b)\{a(a^2-b^2)+(2a-b)(2a+b)\}.$$

En supprimant le facteur $2ab\{a(a^2-b^2)+(2a-b)(2a+b)\}$ commun aux deux membres de cette équation, et dégageant ensuite x de son coefficient, il viendra enfin

$$x=\frac{5b(2a-b)}{2a+b}.$$

134. Problème I. *Un père ordonne, par son testament, que l'aîné de ses fils prélèvera sur sa succession une somme de* a *francs et prendra en outre la* n^{me} *partie de ce qui restera; que le second prendra ensuite* 2a^f *et la* n^{me} *partie du reste; que le troisième prendra* 3a^f, *plus la* n^{me} *partie du reste, et ainsi de*

suite. Il se trouve que de cette manière les enfants reçoivent des parts égales. On demande quel était le bien du père, la part de chaque enfant et le nombre des enfants.

Si le bien du père était connu, il serait facile de calculer la part du premier enfant, et, en divisant ce bien par cette part, on obtiendrait le nombre des enfants, puisque toutes leurs parts sont égales; ainsi la véritable inconnue de la question est le bien du père. Je le représente donc par x. Or, quand l'aîné des enfants aura prélevé a^f, il restera $x-a$, de sorte que sa part sera exprimée par

$$a+\frac{x-a}{n}.$$

Il laissera en conséquence à ses frères

$$x-a-\frac{x-a}{n}=\frac{(n-1)(x-a)}{n},$$

en réduisant l'entier $(x-a)$ et la fraction qui l'accompagne en une seule fraction, et mettant ensuite $(x-a)$ en facteur commun des quantités qu'il multiplie.

Maintenant, quand le second aura prélevé $2a$ sur cette somme, il ne restera plus que $\frac{(n-1)(x-a)}{n}-2a$, de sorte que la part de ce second enfant aura pour expression

$$2a+\frac{(n-1)(x-a)}{n^2}-\frac{2a}{n}.$$

Mais cette part doit être égale à celle du premier, donc on a l'équation

$$a+\frac{x-a}{n}=2a+\frac{(n-1)(x-a)}{n^2}-\frac{2a}{n} \qquad [3].$$

Remarquons, avant d'aller plus loin, que d'après la manière dont cette équation a été formée, on est sûr que si l'on partage la valeur de x que l'on en tirera, conformément aux conditions de la question, les deux premières parts seront égales, mais on ne peut pas affirmer que les autres leur seront aussi

égales, puisque, pour obtenir l'équation [3], on n'a eu aucun égard aux conditions d'après lesquelles elles doivent être formées. Ainsi il faudra vérifier qu'elles sont effectivement égales.

Je retranche a des deux membres de l'équation [3], et je fais ensuite évanouir les dénominateurs, ce qui donne

$$n(x-a)=an^2+(n-1)(x-a)-2an;$$

d'où, en transposant,

$$x-a=an^2-2an,$$

et par suite

$$x=an^2-2an+a=a(n-1)^2.$$

Ainsi l'expression du bien du père est $a(n-1)^2$.

La valeur de $x-a$ étant an^2-2an, il en résulte que le premier enfant recevra

$$a+\frac{an^2-2an}{n}=a+an-2a=a(n-1).$$

Puis donc que toutes les parts doivent être égales, on obtiendra le nombre des enfants, en divisant $a(n-1)^2$ par $a(n-1)$, ce qui donnera $(n-1)$ pour valeur de ce nombre.

Comment vérifier que si l'on partage la somme $a(n-1)^2$, conformément aux volontés du testateur, tous les enfants auront des parts égales? Si la valeur *numérique* de n était donnée, rien ne serait plus facile, car il suffirait de calculer directement les parts du 3e, du 4e, du 5e.... enfant. Mais ce procédé est impraticable ici, car l'opération ne pourrait pas avoir de fin. Nous allons employer un mode de raisonnement dont nous avons déjà donné un exemple (67*). Nous supposerons donc qu'ayant calculé les parts des m premiers enfants, on les ait trouvées toutes égales à $a(n-1)$, et nous examinerons si la suivante leur est aussi égale. S'il en est ainsi, nous conclurons que, comme les deux premières parts sont certainement égales à $a(n-1)$, il en sera nécessairement de même de la troisième; par suite, que les trois premières parts étant égales à $a(n-1)$, il en sera

de même de la quatrième et ainsi de suite, de sorte que toutes les parts seront ainsi égales.

Les m premiers enfants ayant reçu chacun $a\,(n-1)$, ils auront laissé à leurs frères

$$a\,(n-1)^2 - ma\,(n-1) = a\,(n-1)\,(n-1-m),$$

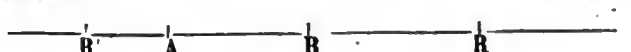
de sorte que le $(m+1)^{me}$ enfant prélevant $(m+1)a$ sur cette somme, et prenant encore la n^{me} partie du reste, sa part aura pour expression

$$(m+1)a + \frac{a\,(n-1)\,(n-1-m) - (m+1)\,a}{n}$$

$$= \frac{a(n-1)\,(m+1+n-1-m)}{n} = a(n-1).$$

Donc toutes les parts seront effectivement égales.

135. Problème II. *Deux mobiles partis en même temps des points* A *et* B, *qui sont distants de* a *mètres, parcourent la droite* AB, *d'un mouvement uniforme, en allant dans le sens* AB. *Leurs vitesses* respectives sont* v *mètres et* v' *mètres par minute. On demande quelle est la distance du point* A *à leur point de rencontre.*



Représentons par x la distance du point A au point R de rencontre des deux mobiles; la distance de B à ce point sera exprimée par $x-a$. Cela posé, puisque les deux mobiles partent en même temps des points A et B et qu'ils arrivent au même instant au point R, les temps qu'ils emploient respectivement à aller des points A et B au point R doivent être égaux, de sorte que nous mettrons le problème en équation en égalant ces deux temps. Or, *dans le mouvement uniforme, les espaces sont proportionnels aux temps employés à les parcourir :* ainsi, nous

* La vitesse d'un mobile est l'espace qu'il parcourt dans l'unité de temps.

calculerons le temps que le mobile parti de A met pour aller de ce point au point R, par la proportion

$$v : x :: 1 : t = \frac{x}{v}.$$

On trouvera de même que le second mobile emploiera un temps marqué par $\frac{x-a}{v'}$, pour parcourir la distance $BR = x - a$ donc

$$\frac{x}{v} = \frac{x-a}{v'} \qquad [4],$$

équation d'où l'on tire successivement

$$v'x = vx - av,$$

$$av = (v - v')x,$$

$$x = \frac{av}{v - v'} \qquad [5].$$

Telle est la formule qui résout le problème.

Si les mobiles parcouraient respectivement 15 mètres et 8 mètres par minute et que la distance AB valût 14^m, on ferait $v = 15$, $v' = 8$ et $a = 14$ dans cette formule, et on trouverait $x = \frac{14 . 15}{15 - 8} = 30$. Ainsi le point de rencontre est à 30 mètres du point A.

136. Nous allons actuellement *discuter* la formule [5], c'est-à-dire examiner si, d'après les différentes hypothèses qu'on pourra faire sur les valeurs des quantités a, v et v', les résultats qu'elle fournira seront d'accord avec les circonstances physiques de la question, qui correspondent à ces différentes hypothèses, et nous pourrons apprécier ainsi la généralité dont l'algèbre est susceptible.

Nous distinguerons trois cas principaux, selon que v sera plus grand que v', égal à v' ou plus petit que v'.

1er Cas. $v > v'$. Dans cette hypothèse, la valeur de x est positive, et v étant plus grand que $v - v'$, cette valeur est plus grande que a, comme cela doit être.

Si on suppose que l'on donne à v des valeurs de plus en plus petites, les deux termes de la fraction $\frac{av}{v-v'}$ diminueront en même temps, et ainsi on ne voit pas immédiatement comment variera cette fraction. Pour le découvrir, je divise ses deux termes par v, ce qui donne $x=\frac{a}{1-\frac{v'}{v}}$, et on reconnaît alors que, v diminuant, la fraction $\frac{v'}{v}$ augmentera, qu'en conséquence le dénominateur $1-\frac{v'}{v}$ diminuera, et qu'ainsi la valeur de x deviendra plus grande, puisque son numérateur a est constant. Donc le point de rencontre est d'autant plus loin de A que la vitesse du premier mobile est plus petite, ce qui en effet est évident.

137. 2ᵉ Cas. Si la vitesse v devient égale à v', le dénominateur $v-v'=0$, de sorte que la valeur de x prend la forme $\frac{av}{0}$. Or, que signifie une pareille expression? Pour le découvrir, je remarque que si, laissant invariable le numérateur d'une fraction $\frac{a}{b}$, je donne à son dénominateur des valeurs 2, 3, 4, 5.... fois plus petites, cette fraction deviendra 2, 3, 4, 5.... fois plus grande; d'où il est facile de prévoir qu'en donnant à ce dénominateur une valeur suffisamment petite, elle deviendra aussi grande que l'on voudra. Posons en effet $\frac{a}{b}>\delta$, δ désignant une grandeur quelconque. Si nous multiplions les deux membres de cette inégalité par b, ce qui est permis, car ici a, b et δ sont des nombres abstraits absolus, il viendra $a>b\delta$; et, en divisant les deux membres de celle-ci par δ, on trouvera $\frac{a}{\delta}>b$. Si donc b représente une quantité susceptible de décroître indéfiniment, on pourra toujours satisfaire à cette dernière inégalité, et par conséquent à la proposée, dont elle n'est qu'une transformée. Ainsi donc, en faisant décroître indéfiniment le dénominateur d'une fraction dont le numérateur est constant, on fera acquérir

à cette fraction une valeur plus grande que toute quantité assignable. On dit en conséquence qu'*une fraction dont le dénominateur est zéro, sans que son numérateur le soit, est infinie.* On représente cette valeur infinie par ce signe ∞ ; ainsi nous écrirons que $x=\infty$, quand $v=v'$.

L'algèbre nous apprend, par cette valeur infinie de x*, que le point de rencontre est alors infiniment éloigné du point A, de sorte que les deux mobiles ne se rencontreront jamais. C'est en effet ce qui a lieu, car, dans l'hypothèse actuelle de $v=v'$, ils doivent toujours être à la distance de a mètres l'un de l'autre.

L'algèbre, en nous donnant pour x une valeur infinie, nous indique que quand $v=v'$, il faudrait, pour vérifier l'équation [4], y remplacer x par une quantité plus grande que toute grandeur assignable, ce qui ne se peut pas, de sorte que *cette équation exprime alors une condition qu'il est impossible de remplir*, c'est-à-dire qu'*elle est absurde*. En effet, en y faisant $v=v'$, elle devient $\frac{x}{v}=\frac{x-a}{v}$, équation absurde, puisque deux fractions qui ont des dénominateurs égaux et des numérateurs différents ne peuvent pas être égales.

138. En général, *lorsqu'en assignant certaines valeurs aux lettres qui entrent dans l'expression de l'inconnue d'une équation, on trouvera une valeur infinie pour cette inconnue, on devra en conclure que cette équation est absurde.*

En effet, on pourra toujours ramener l'équation proposée à la forme $Ax=B$ (132), d'où l'on tire $x=\frac{B}{A}$. Or, si A se réduit à zéro et que B prenne une valeur b, qui n'est pas nulle, auquel cas on a $x=\frac{b}{0}=\infty$, on voit que l'équation $Ax=B$ ne peut

* *Si toutefois la formule* [5] *est applicable au cas actuel;* et il est permis d'en douter, car lorsque $v=v'$, il n'est plus possible de tirer la valeur de x de la transformée $(v-v')x=av$, puisque cette équation se réduit alors à $0=av$.

être vérifiée par aucune valeur de x, car quelle que soit la quantité *finie* que l'on substitue à x, le produit de zéro par cette quantité sera toujours zéro, et ainsi le premier membre ne sera pas égal au second. Donc, l'équation $Ax=B$ est absurde ; mais elle n'est qu'une transformée de la proposée, donc celle-ci l'est aussi.

Réciproquement, *si une équation devient absurde pour certaines valeurs données aux lettres qui y entrent, la formule qui donne la valeur de l'inconnue se réduira à l'infini.*

En effet, on pourra toujours ramener l'équation proposée à la forme $Ax=B$, qui donne $x=\frac{B}{A}$, et cette équation devra être absurde, comme la proposée, dont elle n'est qu'une transformée. On ne doit donc pas pouvoir en tirer de valeur pour x, sans quoi on la vérifierait en y remplaçant x par cette valeur ; donc il faut qu'elle ne renferme pas x ; ce qui exige que son coefficient A devienne nul, sans que B le soit, car alors l'équation serait identique. Mais alors la fraction $\frac{B}{A}=\infty$, et c'est précisément ce que nous voulions démontrer.

139. Si, les vitesses des deux mobiles étant toujours égales, on suppose qu'ils partent en même temps du même point A, on aura alors $a=0$, et par conséquent la valeur de x deviendra $\frac{0}{0}$. Ainsi, pour avoir x, il faut trouver un nombre qui, multiplié par zéro, donne pour produit zéro ; et comme tous les nombres satisfont à cette condition, on est porté à en conclure que $\frac{0}{0}$ *est en général le symbole d'une quantité indéterminée.*

Je dis *en général*, parce qu'il y a des cas où une fraction peut avoir une valeur déterminée, bien qu'elle se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Considérons en effet l'expression

$$\frac{x^2-a^2}{a\,(x-a)},$$

qui se réduit à $\frac{0}{0}$, lorsqu'on suppose que $x=a$. Nous observerons que le numérateur revient à $(x+a)\,(x-a)$, de sorte

qu'en supprimant le facteur $x-a$, qui est commun à ses deux termes, on aura

$$\frac{x^2-a^2}{a(x-a)}=\frac{x+a}{a}=\frac{x}{a}+1.$$

Or, si en partant d'une valeur de x autre que a, plus grande, par exemple, que cette quantité, on suppose que x décroisse d'une manière continue, et tende à s'approcher de a d'aussi près que l'on voudra, les quantités $\frac{x^2-a^2}{a(x-a)}$ et $\frac{x}{a}+1$ varieront, mais en restant toujours égales, et par conséquent leurs limites seront égales (*Arith.*, **237**); or, on peut assigner à x une valeur assez rapprochée de a pour que la fraction $\frac{x}{a}$ diffère de l'unité d'aussi peu qu'on le voudra, de sorte que la limite du binome $\frac{x}{a}+1$ est $1+1=2$; donc

$$Lim\ \frac{x^2-a^2}{a(x-a)}=2.$$

La fraction proposée n'est donc pas indéterminée, sa véritable valeur est 2 quand $x=a$; et on voit que si, pour cette valeur de x, elle s'est présentée sous la forme $\frac{0}{0}$, c'est parce que ses deux termes ont un facteur commun $x-a$, qui, s'anéantissant dans l'hypothèse $x=a$, masque ainsi la véritable valeur de cette fraction.

140. Il suit de là que, *si, pour une certaine hypothèse faite sur les quantités qui entrent dans ses deux termes, une fraction se réduit à* $\frac{0}{0}$, ON NE DEVRA RIEN CONCLURE DE CE RÉSULTAT, *mais il faudra examiner avec soin si ses deux termes n'ont pas un facteur commun qui s'évanouisse par l'hypothèse dont il s'agit. Si l'on découvre un pareil facteur, il faudra le supprimer, et faire ensuite dans la fraction simplifiée l'hypothèse qui avait donné* $\frac{0}{0}$, *et on aura la véritable valeur de la fraction proposée. Si l'on ne reconnaît pas la présence d'un pareil facteur, il faudra remonter à l'équation dont l'inconnue est exprimée par cette fraction, y*

faire les hypothèses qui l'ont réduite à $\frac{0}{0}$ *et résoudre ensuite la nouvelle équation. Si cette équation est une identité, comme serait* $ax + b = ax + b$, *elle est* INDÉTERMINÉE, c'est-à-dire qu'*elle sera satisfaite par toutes les valeurs possibles de* x; *donc alors* $\frac{0}{0}$ *sera effectivement un* SYMBOLE D'INDÉTERMINATION *.

141. D'après cela, comme il n'y a pas de facteur commun aux deux termes de la fraction $\frac{av}{v-v'}$, nous ferons $a=0$ et $v=v'$ dans l'équation [4], et comme elle se réduira à l'identité $\frac{x}{v}=\frac{x}{v}$, nous en conclurons que la valeur de x est complétement indéterminée. En effet, lorsque, en faisant varier a et v, a tend vers zéro et v vers v', les deux termes de la fraction $\frac{av}{v-v'}$, tendant chacun vers zéro, indépendamment l'un de l'autre, on peut assigner à ces quantités des valeurs aussi peu différentes de zéro que l'on voudra, et de sorte que leur rapport soit en même temps égal à telle quantité que l'on aura donnée.

De cette indétermination de x, nous devons conclure que tous les points de la route sont des points de rencontre, puisqu'on peut prendre la distance de chacun d'eux au point A pour une solution de l'équation [4]. Ce résultat est d'accord avec les conditions physiques de la question, car les hypothèses $a=0$ et $v=v'$ signifient que les deux mobiles partent en même

* Si dans les expressions

$$\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}},\quad a\times\frac{1}{b}\quad \text{et}\quad \frac{1}{a}-\frac{1}{b},$$

on suppose que les quantités a et b deviennent nulles, ces expressions se réduiront respectivement à

$$\frac{\infty}{\infty},\quad 0.\infty\quad \text{et}\quad \infty-\infty.$$

Mais si, avant de faire $a=0$ et $b=0$, on commence par effectuer les opérations indiquées, on trouvera qu'elles se présenteront toutes trois sous la forme $\frac{0}{0}$; de sorte que $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$ et $\infty-\infty$ peuvent aussi être des symboles d'indétermination.

temps du même point et avec la même vitesse, et que par conséquent ils ne pourront jamais se séparer.

Si, les vitesses des deux mobiles n'étant plus égales, on suppose encore $a=0$, la valeur de x deviendra $\frac{0}{v-v'}=0$, car un produit ne peut être nul à moins que l'un de ses facteurs ne soit zéro. La rencontre se fait donc au point A, ce qui est évident.

142. 3ᵉ Cas. Supposons maintenant $v<v'$. Le dénominateur de la valeur de x est alors négatif; et comme le numérateur est positif, cette valeur est négative. C'est donc à dire que la distance du point A au point de rencontre doit être comptée à gauche de A, sur le prolongement de BA (**22**). Or, ce résultat ne peut s'accorder avec l'énoncé du problème, puisqu'on y a supposé que le mouvement des mobiles était dirigé dans le sens AB. Il nous indique donc 1° qu'*il y a dans cet énoncé une condition impossible à remplir;* et, en effet, il est évident que si le mobile parti de A a une vitesse moindre que l'autre, il ne pourra jamais l'atteindre, s'ils se dirigent de gauche à droite; 2° que *pour rectifier l'énoncé du problème, il faut supposer que les deux mobiles aillent dans le sens* AB, et dire en conséquence : *Deux mobiles partis en même temps des points* A *et* B *parcourent la droite* AB, *en allant dans le sens* BA; *leurs vitesses*, etc.

Il est au reste facile de démontrer que pour que la formule [5] puisse déterminer, dans tous les cas, le point de rencontre des deux mobiles, il est *indispensable* de convenir, comme nous l'avons fait au nº **22**, que des quantités affectées de signes contraires doivent avoir des modes d'existence directement contraires.

Revenons en effet à l'équation [4], et j'observe d'abord que cette équation n'est pas absurde, bien qu'elle donne pour x une valeur qui, étant négative, n'a aucun sens, si l'on ne veut pas admettre *a priori* les idées que nous avons émises sur les quantités positives et négatives; puisque la substitution de cette valeur négative à la place de x rendra certai-

nement ses deux membres identiques. Il faut donc que l'énoncé du problème renferme quelque condition impossible à remplir par une valeur positive de x, ou bien qu'en mettant le problème en équation, nous ayons fait quelque hypothèse erronée sur la position du point de rencontre. Or, si, dans l'équation [4], on change x en $-x$, on ne trouvera plus, en la résolvant, un résultat vide de sens, car la valeur de x qu'on en tirera sera égale et de signe contraire à celle exprimée par la formule [5], c'est-à-dire positive. En effet, il est clair que changer dans une équation x en $-x$, puis faire dans la transformée $x=\alpha$, c'est la même chose que de substituer immédiatement $-\alpha$ à la place de x dans la proposée; donc si $x=-\alpha$ satisfait à celle-ci, $x=+\alpha$ satisfera à celle-là. Par conséquent, si l'énoncé du problème est vicieux, il suffira, pour le rectifier, de changer x en $-x$ dans l'équation, et de modifier cet énoncé de manière que la nouvelle équation en soit la traduction fidèle. Cette nouvelle équation est $\frac{-x}{v}=\frac{-x-a}{v'}$, ou, en changeant les signes des deux membres,

$$\frac{x}{v}=\frac{x+a}{v'} \qquad [6].$$

Dans cette équation, $\frac{x}{v}$ représente, comme nous l'avons vu, le temps qu'il faut au mobile parti de A pour aller au point de rencontre: donc $\frac{x+a}{v'}$ représente le temps qu'emploiera l'autre mobile, pour aller du point B à ce même point. Mais ce temps se calcule en divisant l'espace à parcourir par la vitesse; donc, puisque v' est cette vitesse, $x+a$ est cet espace, ce qui exige que le point de rencontre soit situé à gauche de A, sur le prolongement de BA, et à une distance de A marquée par la valeur de x tirée de l'équation [6], c'est-à-dire par la valeur absolue de x donnée par la formule [5]. Donc, pour rendre cette formule applicable au cas où $v<v'$ aussi bien qu'à celui où $v>v'$, il faut convenir que la valeur de x devant être portée à droite du

point A sur la ligne indéfinie AB, quand elle est positive, cette même valeur devra être portée, au contraire, à gauche du point A, lorsqu'elle sera négative, c'est-à-dire que *des quantités affectées de signes contraires doivent avoir des modes d'existence directement contraires*, et ce sont là les conventions mêmes que nous avons faites au n° **22**.

Quant à l'énoncé du problème, il est erroné en ce qu'il suppose que le mouvement des mobiles est dirigé de gauche à droite, tandis qu'il doit l'être de droite à gauche, pour que leur rencontre soit possible, et il est en conséquence facile de rectifier cet énoncé.

143. Si, au lieu de faire partir les deux mobiles des points A et B, on suppose qu'ils se meuvent depuis un temps indéfini, dans le sens AB, mais qu'ils arrivent en même temps aux points A et B, *la valeur négative trouvée pour* x, *lorsque* $v < v'$, *n'indiquera plus une absurdité dans l'énoncé du problème;* car on conçoit que les deux mobiles étant en mouvement depuis un temps indéfini, dans la direction AB, celui qui arrive en B à l'instant où l'autre atteint le point A, a dû, à une certaine époque, se trouver en arrière de celui-ci, dont la vitesse est moindre que la sienne, et le rencontrer par conséquent avant son arrivée au point A. *Cette valeur négative provient de ce qu'en mettant le problème en équation nous avons fait une fausse hypothèse*, en plaçant le point de rencontre à droite de A, tandis qu'il doit être à gauche. Et, en effet, si R' représente la position de ce point et que x désigne toujours sa distance au point A, $x+a$ exprimera la distance BR', de sorte qu'en écrivant encore que les deux mobiles ont mis des temps égaux pour aller de ce point R' aux points A et B, on obtiendra pour l'équation du problème actuel

$$\frac{x}{v}=\frac{x+a}{v'},$$

qui n'est que l'équation [6] elle-même; par conséquent, en la résolvant, nous trouverons une valeur égale et de signe contraire

à celle que nous avons tirée de l'équation [4], c'est-à-dire une valeur positive, puisque v est supposé $< v'$.

144. Enfin nous observerons qu'il est facile de rendre la formule [5] applicable au cas où les deux mobiles se mouvraient en sens contraire ; car, puisque nous regardons comme positives les distances mesurées dans le sens AB, il est clair que si les mobiles vont à la rencontre l'un de l'autre, la vitesse de celui qui part de B devra être actuellement affectée du signe —, et qu'ainsi il suffira de changer dans [4] v' en $-v'$, ce qui donnera

$$x = \frac{av}{v + v'}.$$

C'est effectivement là ce que l'on trouverait en traitant directement la nouvelle question.

145. Concluons donc 1° que *la valeur négative trouvée pour l'inconnue d'un problème peut provenir de ce que son énoncé renferme une condition impossible à remplir; que pour rectifier cet énoncé, il faudra changer* x *en* — x *dans l'équation, et modifier l'énoncé de sorte que la nouvelle équation en soit la traduction fidèle; et qu'enfin on obtiendra la solution du problème, en attribuant à l'inconnue un mode d'existence directement contraire à celui qu'on lui avait supposé.*

Si, d'après la nature des conditions physiques de la question, l'inconnue ne pouvait pas admettre ces deux modes d'existence opposés, il faudrait rejeter la valeur négative trouvée, et en conclure que le problème est tout à fait impossible.

2° Que *la valeur négative trouvée pour l'inconnue d'un problème peut provenir, non d'une absurdité dans l'énoncé, mais d'une fausse hypothèse qu'on aurait faite en le mettant en équation; mais qu'on obtiendra encore la solution cherchée, en attribuant à l'inconnue un mode d'existence directement contraire à celui qu'on lui avait supposé.*

3° Que *si dans l'énoncé d'un problème, renfermant des quantités qui peuvent avoir des modes d'existence directement con-*

traires, quelques-unes d'entre elles viennent à être comptées dans un sens opposé à celui qu'elles avaient, quand l'équation de ce problème a été établie, il ne sera pas nécessaire de former directement une nouvelle équation pour le nouveau problème, il suffira de changer, dans la première, le signe de chacune des quantités, dont le mode d'existence aura changé.

On n'a pas démontré directement et d'une manière générale cette propriété des signes + et —; on ne s'en est assuré que par un grand nombre de vérifications, qui heureusement sont assez variées pour qu'il ne puisse exister, dans un esprit juste, aucun doute sur l'exactitude de cette propriété essentielle.

146. Nous avons vu que quand $v < v'$, la formule [5] donne pour x une valeur négative : or, si l'on suppose que v' diminue, les valeurs correspondantes de x restent négatives, mais augmentent numériquement jusqu'à l'infini, ce qui a lieu quand $v' = v$. Ainsi, suivant que v' décroîtra jusqu'à devenir égal à v, ou que c'est v qui diminuera jusqu'à devenir égal à v', la valeur de x tendra vers l'*infini négatif* ou vers l'*infini positif*. Mais si l'on considérait l'une ou l'autre des deux expressions $\frac{av}{(v-v')^2}$ et $-\frac{av}{(v-v')^2}$, la valeur de la première, correspondante à l'hypothèse $v = v'$, serait $+\infty$, et celle de la seconde $-\infty$, car l'une reste toujours positive et l'autre toujours négative, quelque valeur que l'on attribue à v'.

147. Nous insistons sur ces valeurs infinies de l'inconnue d'un problème ; car, bien qu'elles soient un signe certain de l'impossibilité de l'équation d'où elles dérivent (**138**), il peut arriver, au contraire, qu'elles fournissent la seule solution dont la question proposée soit susceptible. Les problèmes de géométrie, résolus à l'aide des méthodes algébriques, en fournissent de nombreux exemples.

Supposons que l'on veuille *mener une droite qui touche extérieurement deux cercles donnés :* si l'on prend pour inconnue la distance x du centre de la plus grande circonférence au

point où la droite, qui joint les centres, est rencontrée par cette tangente commune, on trouvera facilement

$$x = \frac{dR}{R - r},$$

en désignant par d la distance des deux centres et par R et r les deux rayons. Or, si l'on suppose $R = r$, il vient $x = \infty$. C'est donc à dire que la tangente demandée ne rencontre pas la droite qui joint les centres et que par conséquent elle lui est parallèle. Donc, pour résoudre le problème proposé, lorsque les deux circonférences sont égales, il suffit de mener à l'une d'elles une tangente parallèle à la droite qui passe par les centres. Ainsi la valeur infinie trouvée pour x a fourni la seule solution dont le problème fût susceptible.

148. Problème III. *Deux robinets peuvent remplir un bassin, le premier en* a *heures, et le second en* b *heures, et un orifice, pratiqué dans sa partie inférieure, peut le vider en* c *heures. On ouvre en même temps les robinets et l'orifice, et on propose de trouver en combien d'heures le bassin sera rempli.*

Soit x le nombre d'heures cherché. Il est clair que, si de la partie du bassin qui serait remplie par les deux robinets en x heures, nous retranchons celle qui est vidée par l'orifice, dans le même temps, le reste devra être égal à la capacité du bassin.

Or, les parties du bassin qui sont remplies par chaque robinet sont proportionnelles aux temps employés à les remplir; ainsi, en prenant la capacité du bassin pour unité, on calculera la partie y du bassin que le premier robinet remplira en x heures, en posant la proportion

$$a : x :: 1 : y = \frac{x}{a}.$$

On verra de même qu'en x heures le second robinet remplira une partie du bassin marquée par $\frac{x}{b}$, et que l'orifice en videra

une partie représentée par $\frac{x}{c}$. L'équation du problème sera donc

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}-\frac{x}{c}=1 \qquad [7],$$

d'où l'on tirera facilement

$$x=\frac{abc}{ac+bc-ab} \qquad [8].$$

Si l'on veut déduire de cette formule le temps qu'il faudrait aux deux robinets pour remplir le bassin, s'il n'y avait pas d'orifice, on supposera que les dimensions de cet orifice diminuent graduellement jusqu'à devenir nulles, et il est clair que c augmentera au contraire indéfiniment, et *vice versa*. Donc, il faudra chercher vers quelle limite tend la formule [8], lorsque c tend à devenir plus grand que toute quantité assignable. Pour y parvenir, j'observe que c entrant à la fois dans les deux termes de cette fraction, on ne pourrait pas reconnaître comment elle varie, lorsque c augmente : en conséquence je divise ces deux termes par c, ce qui donne

$$x=\frac{ab}{a+b-\frac{ab}{c}} \qquad [9];$$

et, sous cette forme, on voit que, c croissant sans cesse, le terme $\frac{ab}{c}$ diminue constamment. Or, on peut assigner à c une valeur assez grande pour qu'il devienne plus petit que toute quantité donnée; sa limite est donc zéro; donc la limite de la fraction [9] est $\frac{ab}{a+b}$. Telle est donc l'expression du temps que les deux robinets mettraient à remplir le bassin, en coulant ensemble, s'il n'y avait pas d'orifice.

149. Ainsi, *quand on voudra trouver la limite vers laquelle tend une fraction lorsque l'une des quantités qui entrent dans ses deux termes tend vers l'infini, on les divisera par cette quantité, à laquelle on donnera ensuite une valeur infinie.*

150. Il suit du résultat que nous venons d'obtenir que si $c<\frac{ab}{a+b}$, le bassin ne pourra pas être rempli, puisqu'il aura été vidé par l'orifice en moins de temps que les robinets ne mettront à le remplir. C'est ce qu'indique la formule [8], car de l'inégalité $c<\frac{ab}{a+b}$ on tire évidemment $ac+bc<ab$; ainsi le dénominateur de la valeur de x étant négatif, tandis que son numérateur est positif, cette valeur est négative. Or x représente une quantité qui, dans la question actuelle, ne peut pas avoir des modes d'existence opposés, de sorte qu'*une valeur négative de* x *n'ayant point de sens, elle est un signe de l'impossibilité du problème*, lorsque $c<\frac{ab}{a+b}$.

Toutefois si l'on veut savoir de quel problème analogue à celui que nous traitons la valeur absolue de x fournit la solution, on changera x en $-x$ dans l'équation [7], qui deviendra ainsi

$$\frac{x}{c}-\frac{x}{a}-\frac{x}{b}=1,$$

d'où

$$x=\frac{abc}{ab-ac-bc} \qquad [10];$$

puis on modifiera l'énoncé de manière que la nouvelle équation en soit la traduction exacte. La formule [10] résout donc cette question : *Un robinet peut remplir un bassin en* c *heures, et deux orifices, pratiqués dans sa partie inférieure, peuvent le vider, l'un en* a *heures et l'autre en* b *heures. En combien de temps sera-t-il rempli, si l'on ouvre en même temps le robinet et les deux orifices?*

§ II. DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES.

151. Il arrive souvent que les problèmes renferment plusieurs inconnues, qui sont liées les unes aux autres par des relations assez faciles à saisir pour que, l'une d'elles étant connue,

on puisse facilement calculer toutes les autres; dans ce cas, le problème peut être traité comme s'il n'y avait réellement qu'une seule inconnue. C'est ce que nous avons fait pour les problèmes qui ont été résolus aux n°s 4, 5 et 134. Mais il n'en est pas toujours ainsi, et les relations dont il s'agit sont quelquefois très-difficiles à démêler; dans ce cas, il est préférable de faire entrer toutes les inconnues dans le calcul, en représentant chacune par une lettre particulière. De cette manière, on est conduit à résoudre un système composé de plusieurs équations entre plusieurs inconnues. Nous allons examiner comment on peut y parvenir.

152. Nous supposerons d'abord que les inconnues soient en même nombre que les équations, et pour commencer par le cas le plus simple, nous nous proposerons de *résoudre deux équations à deux inconnues* x *et* y.

Quelle que soit une pareille équation, on pourra toujours la ramener à la forme

$$ax + by = k,$$

car il suffira, pour cela, après avoir fait évanouir les dénominateurs (132), s'il y en a, de transposer dans le second membre tous les termes indépendants des inconnues, et dans le premier tous ceux qui renferment ces inconnues; puis de faire la réduction, ce qui ramènera l'équation proposée à la forme $ax + by = k$, si elle est numérique; et si elle est littérale, il n'y aura qu'à mettre x et y en facteurs communs des quantités qu'elles multiplient, pour la réduire à la forme dont il s'agit.

Soient donc

$$ax + by = k \qquad [11],$$

$$a'x + b'y = k' \qquad [12],$$

les deux équations à résoudre. Il est clair que si l'on connaissait la valeur de x, par exemple, qui, conjointement avec une certaine valeur de y satisferait à ces équations, on n'aurait qu'à remplacer x par cette valeur dans l'une ou l'autre des équations [11] et [12], et on en tirerait facilement la valeur corres-

pondante de y, puisque cette équation étant du premier degré ne peut déterminer qu'une seule valeur de y correspondante à une valeur donnée de x. Toute la difficulté est donc ainsi ramenée à *déduire des deux équations proposées une équation qui, ne renfermant pas l'inconnue* y, *détermine toutes les valeurs dont l'autre inconnue* x *est susceptible. C'est ce qu'on appelle* ÉLIMINER *l'inconnue* y *entre ces équations*. L'élimination d'une inconnue entre deux équations peut s'effectuer par trois procédés que nous exposerons successivement, et qui sont connus sous les noms de *méthode d'élimination par* SUBSTITUTION, *par* RÉDUCTION et *par* LES FACTEURS INDÉTERMINÉS.

133. MÉTHODE D'ÉLIMINATION PAR SUBSTITUTION. Si l'on regarde pour un instant x comme connue, on pourra tirer de l'une des équations proposées, de la première, par exemple, la valeur de y (**132**),

$$y=\frac{k-ax}{b} \qquad [13],$$

et il est clair qu'en substituant cette valeur de y dans l'autre équation [12], l'élimination de y sera effectuée. L'équation résultante est

$$a'x+b'.\frac{k-ax}{b}=k' \qquad [14],$$

et je dis que *le système des équations* [13] *et* [14] *est équivalent à celui des équations* [11] *et* [12], c'est-à-dire que les solutions de l'un, sont les mêmes que celles de l'autre. En effet, soient $x=\alpha$ et $y=\beta$ un *couple* de valeurs de x et de y qui satisfont aux équations [11] et [12] : ce couple vérifiera évidemment l'équation [13] qui n'est qu'une transformée de l'équation [11], de sorte qu'en faisant $x=\alpha$ la quantité $\frac{k-ax}{b}$ se réduira à β; par conséquent, en remplaçant x par α dans l'équation [14], on trouvera le même résultat qu'en faisant $x=\alpha$ et $y=\beta$ dans l'équation [12]; mais la substitution de ces valeurs α et β, à la place de x et de y dans [12], vérifie cette équation; donc l'équation [14] sera aussi vérifiée, lorsqu'on y remplacera x par α.

Donc *toute solution des équations* [11] *et* [12] *satisfait aux équations* [13] *et* [14]. Je dis maintenant que *la réciproque est vraie :* car si $x=\alpha$ et $y=\beta$ sont un couple de valeurs qui vérifient les équations [13] et [14], ce couple satisfera nécessairement à l'équation [11] qui n'est qu'une transformée de l'équation [13]. Mais nous supposons que la fraction $\frac{k-ax}{b}$ se réduit à β quand on y remplace x par α : donc en faisant $x=\alpha$ dans l'équation [14], on trouvera le même résultat qu'en remplaçant x et y par α et β dans [12]; or l'équation [14] est vérifiée par $x=\alpha$, donc l'équation [12] le sera par $x=\alpha$ et $y=\beta$; donc *les solutions des équations* [11] *et* [12] *sont identiquement les mêmes que celles des équations* [13] *et* [14]; de sorte qu'au lieu de résoudre le premier système, il n'y a qu'à résoudre le second, ce qui est facile.

L'équation [14] ne renfermant que la seule inconnue x, on en tirera successivement (**132**)

$$ba'x+kb'-ab'x=bk',$$
$$(ba'-ab')x=bk'-kb',$$
$$x=\frac{bk'-kb'}{ba'-ab'} \qquad [15].$$

Je substitue maintenant cette valeur de x dans l'équation [13], ce qui donnera

$$y=\frac{k-\frac{abk'-akb'}{ba'-ab'}}{b}=\frac{\frac{bka'-akb'-abk'+akb'}{ba'-ab'}}{b}.$$

En faisant les réductions, le numérateur de cette dernière expression de la valeur de y devient $bka'-abk'$, quantité qui est divisible par b. On aura donc enfin

$$y=\frac{ka'-ak'}{ba'-ab'} \qquad [16].$$

On ne trouve ainsi qu'un seul couple de valeurs pour x et pour y, parce que l'équation [14], qui est du premier degré

par rapport à x, ne peut donner qu'une seule valeur pour cette inconnue, et que l'équation [13] ne fournit, par la même raison, qu'une seule valeur pour y, de sorte que le système des équations [13] et [14] ne pouvant admettre qu'un seul couple de valeurs de x et de y, il en est nécessairement de même du système des équations [11] et [12], qui lui est équivalent.

134. Exemple. *Résoudre les deux équations*

$$\frac{3x}{10}-\frac{y}{15}-\frac{4}{9}=\frac{x}{12}-\frac{y}{18},$$
$$2x-2\frac{2}{3}=\frac{x}{12}-\frac{y}{15}+1\frac{1}{10}.$$

Je commence par les ramener à la forme des équations [11] et [12], et, pour cela, je fais d'abord évanouir les dénominateurs, ce qui donne

$$54x-12y-80=15x-10y,$$
$$120x-160=5x-4y+66.$$

Ces équations reviennent aux suivantes :

$$\left.\begin{array}{r}39x-2y=80\\115x+4y=226\end{array}\right\}\qquad[17].$$

Je tire de la première de ces deux équations

$$y=\frac{39x-80}{2},$$

et, en substituant cette valeur de y dans la seconde, je trouve

$$115x+78x-160=226,\quad \text{d'où}\quad x=2.$$

Je remplace x par 2 dans l'expression précédente de y, et il en résulte $y=-1$, de sorte que $x=2$ et $y=-1$, forment la solution des équations proposées.

135. On pourrait encore résoudre les deux équations numériques que nous venons de considérer, à l'aide des formules générales [15] et [16]. En comparant en effet leurs transformées [17] aux équations littérales [11] et [12], on verra que, pour identifier celles-ci avec elles, il n'y aura qu'à faire

$$a=39,\ b=-2,\ k=80,\ a'=115,\ b'=4,\ k'=226,$$

et substituer ensuite ces valeurs dans [15] et dans [16], ce qui donnera

$$x=\frac{-2.226-4.80}{-2.115-4.39}=2,\ y=\frac{80.115-39.226}{-2.115-4.39}=-1.$$

136. Méthode d'élimination par réduction. Si les coefficients de l'inconnue y, que nous voulons éliminer, étaient égaux, il est évident qu'en additionnant ou en soustrayant les équations proposées, membre à membre, suivant que ces coefficients seraient affectés de signes contraires ou de signes semblables, l'élimination de y serait effectuée. *Tâchons donc de rendre égaux les coefficients de cette inconnue.*

Si les coefficients de y sont premiers entre eux, nous multiplierons chacune des équations proposées par le coefficient que cette inconnue a dans l'autre, et nous aurons évidemment atteint notre but.

Si les coefficients de y ne sont pas premiers entre eux, nous chercherons leur plus simple multiple (*Arithmétique*, 93), et il suffira de multiplier chaque équation par le quotient obtenu en divisant ce plus simple multiple par le coefficient que y a dans cette équation.

Supposons donc, pour fixer les idées, que b et b' soient deux nombres premiers entre eux ; nous multiplierons l'équation [11] par b', l'équation [12] par b, et, en soustrayant membre à membre les deux équations résultantes, on trouvera

$$(ab'-ba')\,x=kb'-bk' \qquad [18],$$

et je dis qu'*au système des équations* [11] *et* [12] *on peut substituer le système des équations* [11] *et* [18]. Pour le faire voir facilement, supposons que, dans chacune des équations proposées, on ait fait passer tous les termes dans le premier membre, et représentons par $A=0$ et par $A'=0$, ce que deviennent ainsi les équations [11] et [12] ; l'équation [18] pourra ainsi être ramenée à $Ab'-A'b=0$, et il s'agira de démontrer que le système des équations $\left.\begin{matrix}A=0\\A'=0\end{matrix}\right\}$ est équivalent à celui des équa-

tions $\left.\begin{matrix} A=0 \\ Ab'-A'b=0 \end{matrix}\right\}$. Or, il est clair que tout couple de valeurs de x et de y qui vérifiera les équations du premier système, vérifiera aussi celles du second, puisque, par la substitution de ces valeurs au lieu de x et de y, les polynomes A et A' devenant nuls, $Ab'-A'b$ le deviendra aussi. Réciproquement, tout couple de valeurs de x et de y qui satisfait au second système, anéantissant A, ne pourra satisfaire à l'équation $Ab'-A'b=0$, sans anéantir $A'b$ et par conséquent A', puisque b est un nombre; donc ce couple vérifiera les équations $A=0$ et $A'=0$ du premier système. Donc enfin les solutions du système $\left.\begin{matrix} A=0 \\ A'=0 \end{matrix}\right\}$ sont les mêmes que celles du système $\left.\begin{matrix} A=0 \\ Ab'-A'b=0 \end{matrix}\right\}$.

On tirera donc de l'équation [18] la valeur de x, et, en la substituant dans l'équation [11], on en déduira la valeur correspondante de y. Nous n'entrerons pas dans les détails de ce calcul, qui ne saurait présenter de difficultés.

137. Dans la pratique, il sera souvent plus commode, pour avoir y, d'éliminer x entre les deux équations proposées, et de tirer de l'équation résultante

$$(ab'-ba')y=ak'-ka' \qquad [19],$$

la valeur cherchée de y. Mais il faut alors démontrer que le système des équations [18] et [19] est équivalent à celui des équations [11] et [12]. Pour le faire le plus simplement possible, nous observerons qu'en ramenant les proposées à la forme

$$A=0 \text{ et } A'=0,$$

les équations [18] et [19] reviendront aux suivantes

$$Ab'-A'b=0 \text{ et } A'a-Aa'=0.$$

D'abord il est évident que tout couple de valeurs de x et de y, qui satisfait au premier système, satisfait aussi au second. On voit ensuite que tout couple de valeurs qui vérifie les équations $Ab'-A'b=0$ et $A'a-Aa'=0$ satisfait aussi à l'équation

$$a(Ab'-A'b)+b(A'a-Aa')=0,$$

que l'on obtient en les traitant comme si on voulait éliminer le polynome A' entre elles (156); donc ce couple doit aussi vérifier l'équation

$$A(ab'-ba')=0$$

à laquelle celle-ci se réduit : mais comme nous supposons *expressément* que $ab'-ba'$ n'est pas nul, sans quoi on ne pourrait pas tirer des équations [18] et [19] les valeurs de x et de y, il faut que la substitution de ces valeurs dans A anéantisse ce polynome. Par conséquent, ce même couple ne peut vérifier l'une ou l'autre des équations $Ab'-A'b=0$ et $A'a-Aa'=0$ sans anéantir A'; donc il satisfait au système $A=0$ et $A'=0$; donc, etc.

158. Exemple. *Résoudre les équations*

$$\frac{4x-3y-7}{5}=\frac{3x}{10}-\frac{2y}{15}-\frac{5}{6},$$

$$\frac{y-1}{3}+\frac{x}{2}-\frac{3y}{20}-1=\frac{y-x}{15}+\frac{x}{6}+\frac{1}{10}.$$

En faisant évanouir les dénominateurs, réduisant et transposant, on trouvera

$$\left.\begin{aligned}15x-14y&=17\\24x+7y&=86\end{aligned}\right\}\qquad[20].$$

J'élimine y entre ces deux équations, et comme 14 est lui-même le plus petit multiple des coefficients de cette inconnue, il suffira, pour y parvenir, d'ajouter aux deux membres de la première les produits respectifs des deux membres de la seconde par 2, ce qui donnera

$$63x=189,\quad \text{d'où}\quad x=3.$$

Je substitue cette valeur de x dans l'une des équations [20], dans la première, par exemple, et il vient ainsi

$$45-14y=17,\quad \text{d'où}\quad y=\frac{45-17}{14}=2.$$

Au lieu de substituer ainsi la valeur trouvée pour x dans l'une des équations [20], on aurait pu éliminer x entre elles (157).

Le plus petit multiple des coefficients de cette inconnue étant 120, on multipliera la première équation par $\frac{120}{15}=8$, la seconde par $\frac{120}{24}=5$, et **en retranchant** membre à membre les **équations résultantes, on trouvera**

$$(112+35)y=430-136,$$

ou bien

$$147y=294,\quad \text{d'où}\quad y=\frac{294}{147}=2.$$

150. Il est maintenant facile de *résoudre* m *équations du premier degré entre* m *inconnues. Pour cela, on commencera par faire évanouir les dénominateurs, s'il y en a, puis on transposera dans un seul membre tous les termes qui contiennent les inconnues, et on fera passer tous ceux qui en sont indépendants dans l'autre membre, de sorte que les équations proposées seront ramenées à la forme*

$$ax+by+cz+du+\ldots=k.$$

Cela fait, on éliminera l'une des inconnues successivement entre l'une de ces équations et chacune des autres, ce qui donnera (m — 1) *équations entre les* (m — 1) *autres inconnues; on éliminera de même une de ces* (m — 1) *inconnues successivement entre l'une des* (m — 1) *équations que l'on vient d'obtenir et chacune des autres, ce qui donnera* (m — 2) *équations entre les* (m — 2) *autres inconnues, et, en continuant ainsi, on parviendra à* 3 *équations à trois inconnues, puis à* 2 *équations à deux inconnues, et enfin à* UNE *équation à* UNE *seule inconnue. On résoudra cette dernière équation, et on substituera la valeur trouvée, pour son inconnue, dans l'une des deux équations à deux inconnues, ce qui fera connaître la valeur d'une seconde inconnue. En substituant ensuite les deux valeurs trouvées, dans l'une des trois équations à trois inconnues, on obtiendra la valeur d'une troisième inconnue, puis on trouvera de la même manière celle d'une quatrième inconnue, et ainsi de suite en remontant.*

Pour justifier cette règle, il suffit de démontrer que le système des équations proposées est équivalent au système formé de l'une d'elles, de l'une des $(m-1)$ équations à $(m-1)$ inconnues, de l'une des $(m-2)$ équations à $(m-2)$ inconnues;.... de l'une des deux équations à deux inconnues, et enfin de l'équation à une seule inconnue. Supposons, pour le faire voir, qu'on ait fait passer tous les termes dans le premier membre, ce qui réduira le second à zéro, et représentons les équations résultantes par

$$A=0,\ A_1=0,\ A_2=0,\ldots\ A_{m-1}=0 \qquad [21].$$

Je suppose, pour fixer les idées, que l'on effectue l'élimination de l'une des inconnues entre l'équation $A=0$, et chacune des autres, par la méthode de réduction, et j'appelle a, a_1, a_2,.... a_{m-1}, les coefficients de cette inconnue dans les proposées. Les $(m-1)$ équations à $(m-1)$ inconnues, qui proviendront de cette élimination, seront ainsi représentées par

$$Aa_1-A_1a=0,\ Aa_2-A_2a=0,\ldots\ Aa_{m-1}-A_{m-1}a=0 \quad [22];$$

et je dis qu'au système des équations [21], on peut substituer le système

$$A=0,\ Aa_1-A_1a=0,\ Aa_2-A_2a=0,\ldots\ldots \\ Aa_{m-1}-A_{m-1}a=0 \qquad [23],$$

formé de l'une des proposées et des $(m-1)$ équations qu'on vient d'obtenir. Il est évident en effet que tout système de valeurs des inconnues qui satisfait aux équations [21] satisfait aussi aux équations [23]; réciproquement, tout système de valeurs des inconnues qui vérifie les équations [23], devant anéantir les polynomes A et Aa_1-A_1a, Aa_2-A_2a,.... $Aa_{m-1}-A_{m-1}a$, devra nécessairement réduire A_1, A_2,.... A_{m-1} à zéro, car a n'est pas nul; donc le système [23] est équivalent au système [21]. Si maintenant on élimine une des inconnues qui entrent dans les équations [22] entre l'une d'elles et chacune des autres, on obtiendra $(m-2)$ équations à $(m-2)$ inconnues

$$B=0,\ B_1=0,\ B_2=0,\ldots\ B_{m-3}=0,$$

et on prouvera, comme tout à l'heure, que le système des équations [22] peut être remplacé par celui des équations

$$Aa_1 - A_1a = 0, \; B = 0, \; B_1 = 0, \ldots \; B_{m-3} = 0,$$

et que, par conséquent, celui des équations proposées est équivalent au système des équations

$$A = 0, \; Aa_1 - A_1a = 0, \; B = 0, \; B_1 = 0, \ldots \; B_{m-3} = 0,$$

et en continuant ainsi, on parviendra à démontrer la proposition que nous voulons établir.

160. Exemple I. *Résoudre les équations*

$$\frac{3y-1}{4} = \frac{6z}{5} - \frac{x}{2} + 1\frac{4}{5}, \quad \frac{5x}{4} + \frac{4z}{3} = y + \frac{5}{6},$$
$$\frac{3x+1}{7} - \frac{z}{14} + \frac{1}{6} = \frac{2z}{21} + \frac{y}{3}.$$

Je fais évanouir les dénominateurs, je transpose, et il vient

$$10x + 15y - 24z = 41,$$
$$15x - 12y + 16z = 10,$$
$$18x - 14y - 7z = -13.$$

J'élimine actuellement x entre la première et la seconde, ce qui se fait en multipliant l'une par 6, l'autre par 4, et en les retranchant membre à membre; puis entre la seconde et la troisième, et pour cela je multiplie la seconde par 6, la troisième par 5, et je retranche ensuite les deux équations résultantes membre à membre. De cette manière je remplace le système des équations proposées par le système suivant :

$$10x + 15y - 24z = 41,$$
$$138y - 208z = 206,$$
$$-2y + 131z = 125.$$

L'élimination de y entre les deux dernières donne

$$9831z = 9831, \quad \text{d'où} \quad z = 1.$$

En substituant cette valeur dans la troisième des équations pré-

cédentes, on trouvera $y = \frac{131 - 125}{2} = 3$, et enfin, au moyen de la première, on obtiendra 3 pour valeur de x.

Exemple II. *Résoudre les équations*

$$\begin{aligned} 3x - 4y + 3z + 3v - 6u &= 11, \\ 3x - 5y + 2z - 4u &= 11, \\ 10y - 3z + 3u - 2v &= 2, \\ 5z + 4u + 2v - 2x &= 3, \\ 6u - 3v + 4x - 2y &= 6. \end{aligned}$$

Comme la première de ces équations est la seule qui renferme les cinq inconnues, nous allons tâcher d'éliminer une d'elles, v par exemple, entre la première et les trois dernières, et nous pourrons ainsi remplacer le système des équations proposées par le système formé des trois équations ainsi obtenues, de la seconde et de l'une des autres. J'élimine donc v successivement entre la première et la dernière, entre la troisième et la quatrième, et entre la quatrième et la cinquième, de sorte que je substitue au système des équations données, le suivant :

$$\begin{aligned} 3x - 5y + 2z - 4u &= 11, \\ 7x - 6y + 3z &= 17, \\ 10y + 2z + 7u - 2x &= 5, \\ 15z + 24u + 2x - 4y &= 21, \\ 10y - 3z + 3u - 2v &= 2. \end{aligned}$$

Comme la seconde de ces équations ne renferme que x, y et z, j'éliminerai u successivement entre la première et la troisième, et entre la première et la quatrième, et je formerai ainsi le système d'équations

$$\begin{aligned} 5y + 22z + 13x &= 97, \\ 27z + 20x - 34y &= 87, \\ 7x - 6y + 3z &= 17, \\ 3x - 5y + 2z - 4u &= 11, \\ 10y - 3z + 3u - 2v &= 2. \end{aligned}$$

J'élimine actuellement z entre la première et la troisième,

puis entre la seconde et la troisième, et j'obtiens le nouveau système

$$
\begin{aligned}
147y - 115x &= -83,\\
43x - 20y &= 66,\\
7x - 6y + 3z &= 17,\\
3z - 5y + 2z - 4u &= 11,\\
10y - 3z + 3u - 2v &= 2.
\end{aligned}
$$

Enfin, en éliminant y entre les deux premières de ces équations, le système proposé sera remplacé par le suivant

$$
\left.\begin{aligned}
4021x &= 8042\\
43x - 20y &= 66\\
7x - 6y + 3z &= 17\\
3x - 5y + 2z - 4u &= 11\\
10y - 3z + 3u - 2v &= 2
\end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{aligned}
x &= 2\\
y &= 1\\
z &= 3\\
u &= -1\\
v &= -2
\end{aligned}\right.
$$

Exemple III. *Résoudre les équations*

$$
\begin{aligned}
2x + 3y - 4z &= 3,\\
3y - 5z + 2u &= -4,\\
z + 2u - 3x &= -7,\\
4x - 3y + 7z - 6u &= 6.
\end{aligned}
$$

J'élimine y successivement entre la première et la seconde, et entre la première et la quatrième, ce qui me fournit le système

$$
\begin{aligned}
2x + z - 2u &= 7,\\
6x + 3z - 6u &= 9,\\
z + 2u - 3x &= -7,\\
2x + 3y - 4z &= 3.
\end{aligned}
$$

J'élimine actuellement z entre la première et la troisième, puis entre la première et la seconde; mais le résultat de cette seconde élimination est l'égalité absurde

$$0 = 21 - 9 = 12;$$

donc il n'y a aucun système de valeurs de x, y, z, u, qui puisse

vérifier le système proposé, car, s'il y en avait, il faudrait que ces valeurs de x, y, z, u, pussent vérifier cette équation

$$0 = 12.$$

Au reste, on reconnaît facilement l'incompatibilité des équations par lesquelles on a remplacé le système proposé, car en divisant la seconde par 3, il vient

$$\begin{aligned} 2x + z - 2u &= 7, \\ 2x + z - 2u &= 3, \\ z + 2u - 3x &= -7, \\ 2x + 3y - 4z &= 3; \end{aligned}$$

or il est évident que si les équations proposées admettaient une solution, celles-ci en admettraient aussi une, et il faudrait pour cela, que $2x + z - 2u$ fût à la fois égal à 7 et à 3, ce qui est absurde.

161. Nous avons supposé, jusqu'ici, que l'on avait autant d'équations que d'inconnues : mais, si l'on n'en avait pas le même nombre, qu'arriverait-il ?

Supposons que l'on ait moins d'équations que d'inconnues, et, pour prendre d'abord le cas le plus simple, que l'on ait une seule équation à deux inconnues,

$$ax + by = k$$

Si, en regardant y comme connue, on résout cette équation par rapport à x, on en tirera

$$x = \frac{k - by}{a},$$

et si l'on substitue cette expression de x dans la proposée, il est clair que l'équation résultante se réduira à une identité (**127**), de sorte qu'elle sera vérifiée sans qu'il soit besoin d'assigner aucune valeur particulière à y. On pourra donc donner à cette inconnue telle valeur qu'on voudra, et la substitution dans $ax + by = k$, de cette valeur et de la valeur correspondante de

x, déterminée par la formule $x = \frac{k - by}{a}$, vérifiera cette équation, qui admet ainsi une infinité de solutions.

Supposons maintenant que l'on ait m équations entre $m+n$ inconnues. Si l'on regarde n quelconques de ces inconnues comme déterminées, on pourra déduire des m équations proposées les valeurs des m autres inconnues, en fonction des n premières, et il est évident que si l'on substitue les fonctions ainsi trouvées dans les m équations, les équations résultantes seront des identités, de sorte qu'elles seront satisfaites d'elles-mêmes et par le seul jeu des signes, et cela indépendamment d'aucune hypothèse particulière faite sur les valeurs des n premières inconnues. Donc, quelques valeurs *arbitraires* qu'on leur assigne, les valeurs correspondantes des m autres inconnues satisferont toujours aux équations proposées conjointement avec elles. Donc ces équations admettent une infinité de systèmes de valeurs pour les inconnues qu'elles renferment; donc *elles sont* INDÉTERMINÉES.

162. EXEMPLE I. *Résoudre les deux équations*

$$2x + 3y - 4z + 2u = -6,$$
$$4x - 3y + 2z - 3u = 7.$$

Je regarde z et u comme des quantités connues, et je tire en conséquence de ces deux équations les formules

$$x = \frac{2z + u + 1}{6}, \quad y = \frac{10z - 7u - 19}{9},$$

de sorte qu'en donnant à z et à u des valeurs arbitraires quelconques, on en déduira des valeurs correspondantes pour x et pour y. Si l'on suppose, par exemple, $z = 3$ et $u = -1$, on trouvera que $x = 1$ et que $y = 2$. Ainsi, les équations proposées admettront la solution

$$x = 1, \ y = 2, \ z = 3, \ u = -1.$$

On en trouvera de même autant d'autres que l'on voudra.

EXEMPLE II. *Résoudre les équations*

$$2x + 3y - 4z = 3,$$
$$3y + 5z - 2u = 10,$$
$$z + 2u - 3x = -7,$$
$$4x - 3y - 23z + 6u = -24.$$

En éliminant y entre la première et la deuxième de ces équations, puis, entre la première et la quatrième, on pourra remplacer leur système par le suivant :

$$2x - 9z + 2u = -7,$$
$$6x - 27z + 6u = -21,$$
$$z + 2u - 3x = -7;$$
$$2x + 3y - 4z = 3.$$

Mais je remarque que la deuxième équation de ce système étant le produit de la première par 3, si on divise tous ses termes par 3, on retombera sur cette première. On n'a donc ainsi que les trois équations

$$2x - 9z + 2u = -7,$$
$$z + 2u - 3x = -7,$$
$$2x + 3y - 4z = 3,$$

entre les quatre inconnues x, y, z, u, de sorte que le système proposé est indéterminé. Si on veut en trouver des solutions, on éliminera u entre la première et la deuxième, ce qui donnera

$$5x - 10z = 0,$$
$$z + 2u - 3x = -7,$$
$$2x + 3y - 4z = 3.$$

On tire de la première $x = 2z$, et en substituant cette valeur dans les deux autres, elles donnent $u = \frac{-7 + 5z}{2}$ et $y = 1$; ainsi en faisant, par exemple, $z = -1$, on aura $x = -2$ et $u = -6$; de sorte que $x = -2$, $y = 1$, $z = -1$ et $u = -6$

forment une solution **des équations proposées. Si on fait** $z = 1$, on trouvera un autre système de valeurs, savoir :

$$x = 2,\ y = 1,\ z = 1 \text{ et } u = -1,$$

etc., etc.

163. On voit, par cet exemple, qu'un système d'équations peut être indéterminé, quoique le nombre des inconnues ne soit pas supérieur à celui des équations; mais aussi une de ces équations est une conséquence de deux ou de plusieurs des autres. Ainsi la quatrième a été formée en ajoutant membre à membre les équations obtenues en multipliant la première par 2 et la deuxième par -3.

164. *Si l'on a plus d'équations que d'inconnues*, par exemple, $(m + n)$ équations entre m inconnues, *les équations proposées sont en général* INCOMPATIBLES ; car, pour qu'un système de valeurs des m inconnues puisse satisfaire aux équations proposées, il faut et il suffit, qu'en tirant ces valeurs de m quelconques des équations proposées, et en les substituant dans les n autres, c'est-à-dire en éliminant les m inconnues entre les équations proposées, les équations résultantes soient satisfaites d'elles-mêmes et par le seul jeu des signes. Or, on conçoit que cela n'aura pas lieu, si les équations proposées ont été prises au hasard.

Mais si les $(m + n)$ équations à m inconnues renferment des *coefficients indéterminés*, on pourra se proposer d'assigner les conditions que doivent remplir ces coefficients pour que les équations proposées soient compatibles. Il suffira évidemment, d'après ce que nous venons de dire, d'éliminer les m inconnues entre les $(m + n)$ équations, et les équations résultantes exprimeront les conditions demandées. Si le nombre des coefficients **indéterminés est n, on aura précisément n équations pour les** déterminer; s'il est plus grand que n, on pourra disposer arbitrairement de plusieurs d'entre eux ; mais s'il est moindre que n, **les équations de condition seront en général incompatibles, et par conséquent les proposées le seront aussi.**

165. Exemple. *Déterminer* a, b, c, *de manière que les quatre équations*

$$ax+2y=-1,$$
$$x-by=2,$$
$$2x+3y=c,$$
$$2ax+cy=-2,$$

soient compatibles.

On tirera des deux premières

$$x=\frac{4-b}{ab+2},\quad y=-\frac{2a+1}{ab+2};$$

on substituera ces valeurs de x et de y dans les deux autres, et il viendra, après avoir fait évanouir les dénominateurs,

$$5-2b-6a-c(ab+2)=0,$$
$$8a+4-c(2a+1)=0.$$

Nous n'avons donc que deux équations pour déterminer a, b et c, de sorte qu'on pourra disposer arbitrairement de l'un de ces coefficients. En éliminant c entre ces deux équations, il viendra

$$12a^2+8a^2b+8ab+12a+2b+3=0,$$

d'où l'on tire

$$b=-\frac{12a^2+12a+3}{8a^2+8a+2},$$

et en faisant $a=-1$, cette formule donnera $b=-\frac{3}{2}$, et par suite on trouvera $c=4$. Ainsi, les équations proposées deviendront

$$-x+2y=-1$$
$$x+\tfrac{3}{2}y=2$$
$$2x+3y=4$$
$$-2x+4y=-2,$$

qui effectivement sont compatibles, ainsi qu'il est facile de le vérifier, en tirant de deux de ces équations les valeurs de x et de y, et en les substituant dans les deux autres, ou mieux encore en divisant tous les termes des deux dernières par 2.

166. Problème I. *Hiéron, roi de Syracuse, avait donné à un orfévre* 20 *livres d'or, pour faire une couronne qu'il voulait offrir à Jupiter. La couronne se trouva peser effectivement* 20 *livres; cependant le roi soupçonna l'orfévre d'avoir soustrait une partie de l'or qu'il lui avait remis, et il pria Archimède de vérifier la chose, sans endommager la couronne. Ce grand géomètre détermina le poids spécifique de la couronne, et trouva* 16 *pour sa valeur, tandis que celui de l'or est* 19,64. *Il en conclut aussitôt que la couronne était formée d'or allié à un métal moins dense. La facilité avec laquelle l'argent s'allie avec l'or lui fit soupçonner que l'argent était cet autre métal. Or, le poids spécifique de l'argent étant* 10,5, *Archimède en conclut que la couronne était composée de* $14^l,77$ *d'or et de* $5^l,23$ *d'argent, ce dont l'orfévre convint. Trouver comment Archimède a pu découvrir cette composition de la couronne.*

Le poids spécifique d'un corps est le rapport du poids d'un volume quelconque de la substance de ce corps à celui d'un pareil volume d'eau; d'où il suit qu'*en divisant le poids d'un certain volume d'un corps par son poids spécifique, on obtiendra ce volume.*

Cela posé, soient x et y les poids des quantités d'or et d'argent qui entraient dans la couronne, on aura immédiatement l'équation

$$x+y=20.$$

On voit ensuite que 19,64 étant le poids spécifique de l'or, $\frac{x}{19,64}$ sera le volume occupé par l'or qui entrait dans la couronne; que de même $\frac{y}{10,5}$ représente le volume de l'argent qu'elle renfermait, et que $\frac{20}{16}=\frac{5}{4}$ était le volume de la couronne. On aura donc la seconde équation

$$\frac{x}{19,64}+\frac{y}{10,5}=\frac{5}{4},$$

ou, en faisant évanouir les dénominateurs,

$$10,5x + 19,64y = 257,775.$$

Il ne s'agit plus que de résoudre le système formé de cette équation et de la première $x + y = 20$. En effectuant les calculs on trouvera facilement que

$$x = \frac{135,025}{9,14} = 14,77 \quad \text{et que} \quad y = \frac{47,775}{9,14} = 5,23.$$

167. Problème II. *Un homme s'est chargé de transporter des vases de porcelaine, à condition de payer autant, pour chaque vase qu'il casserait, qu'il recevrait pour celui de mêmes dimensions qu'il rendrait en bon état. On lui donne d'abord 2 petits vases, 4 moyens et 9 grands : il casse les moyens, rend tous les autres intacts et reçoit 28f. — On lui donne ensuite 7 petits vases, 3 moyens et 5 grands ; il rend les moyens et les petits en bon état : mais il casse les grands et ne reçoit que 3f. — On lui remet enfin 9 petits vases, 10 moyens et 11 grands ; il casse encore tous les grands, rapporte les autres en bon état et reçoit 4f. On demande combien on a payé pour le transport d'un vase de chaque grandeur.*

Je représente par x, y, et z les prix respectifs du transport d'un petit vase, d'un moyen et d'un grand. Il est évident que notre homme aura reçu l'excès de ce qui lui est dû pour les vases qu'il remet en bon état, sur ce qu'on lui retient pour ceux qu'il casse, de sorte que, dans le premier cas, où il casse les moyens et remet les autres intacts, il doit recevoir $2x + 9z$ et payer $4y$; donc

$$2x + 9z - 4y = 28.$$

On verra de même que, pour les deux autres circonstances du problème, on aura les équations

$$7x + 3y - 5z = 3,$$

et

$$9x + 10y - 11z = 4.$$

En résolvant ces équations, on trouvera qu'on a payé 2f pour

le transport d'un petit vase, 3^f pour celui d'un moyen, et 4^f pour un grand.

168. Méthode d'élimination de Bezout ou par les facteurs indéterminés. *Bezout* a donné une troisième méthode d'élimination dont on fait usage, même dans la haute analyse, et qui a l'avantage de faire évanouir à la fois toutes les inconnues moins une. Pour en bien faire saisir l'esprit, nous allons l'appliquer successivement à un système de deux équations à deux inconnues, puis à trois équations à trois inconnues, et nous généraliserons ensuite.

Soient donc les équations

$$ax + by = k \qquad [11],$$
$$a'x + b'y = k' \qquad [12];$$

je les multiplie respectivement par deux facteurs *indéterminés* m et m', et j'ajoute membre à membre les équations résultantes; il viendra

$$(am + a'm')x + (bm + b'm')y = km + k'm' \qquad [24].$$

Comme les facteurs m et m' sont indéterminés, nous pourrons en disposer de manière à rendre nul le coefficient de l'inconnue que nous voudrons éliminer, de sorte que si cette inconnue est x, il faudra poser

$$am + a'm' = 0 \qquad [25];$$

de cette manière, l'équation [24] se réduira à

$$bm + b'm')y = km + k'm', \quad \text{d'où} \quad y = \frac{km + k'm'}{bm + b'm'}.$$

Ainsi, pour avoir la valeur de y, il n'y aura qu'à remplacer, dans cette dernière formule, m et m' par un couple de valeurs qui vérifient l'équation [25].

Mais cette équation est indéterminée, puisqu'elle renferme deux inconnues (161); nous allons donc regarder, pour un instant, m' comme connu, et nous en tirons $m = -\frac{a'm'}{a}$. Pour chaque valeur donnée arbitrairement à m', cette formule nous fera

connaître une valeur correspondante de m ; mais pour éviter les fractions, nous poserons $m'=a$, et il en résultera $m=-a'$; de sorte que la valeur cherchée de y sera *

$$y=\frac{ak'-ka'}{ab'-ba'} \qquad [16].$$

Il est évident qu'en disposant de m et de m' de manière à rendre nul le coefficient de y dans l'équation [24], on parviendra à déterminer la valeur de x, et on trouvera, en faisant les calculs,

$$x=\frac{kb'-bk'}{ab'-ba'} \qquad [15].$$

Il s'agit actuellement de justifier cette méthode d'élimination. Supposons, comme précédemment, que l'on ait fait passer dans le premier membre tous les termes de chacune des équations proposées, et représentons par

$$A=0 \text{ et par } A'=0,$$

les équations résultantes. Si nous désignons par n et par n' les valeurs qu'on a dû attribuer à m et à m' pour rendre nul le coefficient de x dans l'équation [24], et par p et p' celles qu'il a fallu attribuer à ces mêmes indéterminées pour faire évanouir le coefficient de y ; les valeurs [16] et [15] de ces deux inconnues y et x auront été déduites des deux équations

$$An+A'n'=0 \quad \text{et} \quad Ap+A'p'=0 \qquad [26],$$

de sorte qu'il s'agit de démontrer que ce second système d'équations est équivalent au premier $A=0$ et $A'=0$.

Or, il est évident que tout couple de valeurs de x et de y, qui vérifie les équations $A=0$ et $A'=0$ vérifie aussi les équations [26]. Pour démontrer la réciproque, je traite ces équa-

* Il n'est pas inutile d'observer que le rapport de m à m' est constant, d'où il résulte que y n'a qu'une seule valeur, quoique m et m' en admettent une infinité, parce que la formule

$$y=\frac{km+k'm'}{bm+b'm'} \text{ revient à } y=\frac{k\frac{m}{m'}+k'}{b\frac{m}{m'}+b'}.$$



tions [26] comme si A' était une inconnue que je veuille en éliminer, ce qui donne (156)

$$p'(An+A'n')-n'(Ap+A'p')=0.$$

Tout couple de valeurs de x et de y qui vérifie les équations [26] vérifie évidemment celle-ci, c'est-à-dire l'équation

$$A(np'-pn')=0,$$

à laquelle elle se réduit. Et comme nous supposons expressément que $np'-pn'$ n'est pas nul*, il s'ensuit que ce couple anéantit A; donc il anéantit aussi A', en vertu de l'une ou de l'autre des équations [26]; donc enfin les solutions des équations $A=0$ et $A'=0$, sont identiques avec celles des équations $An+A'n'=0$ et $Ap+A'p'=0$.

169. Considérons maintenant le système de trois équations à trois inconnues,

$$\left.\begin{array}{l} ax+by+cz=k \\ a'x+b'y+c'z=k' \\ a''x+b''y+c''z=k'' \end{array}\right\} \qquad [27].$$

Je les multiplie respectivement par les facteurs indéterminés m, m', m'', j'ajoute membre à membre les équations résultantes et je trouve

$$\begin{array}{l}(am+a'm'+a''m'')x+(bm+b'm'+b''m'')y+(cm+c'm'+c''m'')z \\ \qquad =km+k'm'+k''m'' \qquad [28].\end{array}$$

Si nous voulons obtenir la valeur de z, il nous faudra disposer des indéterminées m, m', m'' de manière à rendre nuls les coefficients des deux autres inconnues x et y, c'est-à-dire poser

$$am+a'm'+a''m''=0, \quad bm+b'm'+b''m''=0 \qquad [29],$$

ce qui réduira l'équation [28] à

$$(cm+c'm'+c''m'')z=km+k'm'+k''m'', \text{ d'où } z=\frac{km+k'm'+k''m''}{cm+c'm'+c''m''},$$

* Les valeurs de n et de n' sont, d'après ce qui précède, $-a'$ et a, et celles de p et de p' sont $-b'$ et b, de sorte que si on avait $np'-pn'=0$, $ab'-ba'$ serait nul, et nous avons exclu formellement ce cas-là (157).

de sorte que pour avoir z, il ne s'agit que de substituer dans cette dernière formule à m, m' et m'' leurs valeurs tirées des équations [29]. Pour obtenir ces valeurs, nous regarderons, pour un instant, m'' comme connue, et nous appliquerons à la résolution des équations [29] les formules générales [15] et [16], comme nous l'avons indiqué précédemment (155). En comparant les équations [29] aux équations [11] et [12], nous verrons que pour les identifier avec elles, il suffira de poser

$$x=m,\ y=m',\ b=a',\ k=-a''m'',\ a'=b,\ k'=-b''m'',$$

de sorte qu'en substituant ces valeurs dans les formules [15] et [16], on trouvera

$$m=\frac{(a'b''-b'a'')m''}{ab'-ba'},\quad m'=\frac{(ba''-ab'')m''}{ab'-ba'}.$$

Mais le facteur m'' étant encore indéterminé, nous pourrons, pour rendre entières les valeurs de m et de m', l'égaler à leur dénominateur commun, ce qui donnera

$$m''=ab'-ba',\quad m=a'b''-b'a'',\quad m'=ba''-ab'',$$

et par suite

$$z=\frac{ka'b''-kb'a''+bk'a''-ak'b''+ab'k''-ba'k''}{ca'b''-cb'a''+bc'a''-ac'b''+ab'c''-ba'c''}.$$

Il est évident que si, au lieu d'égaler à zéro les coefficients de x et de y, on égalait à zéro ceux de x et de z, on obtiendrait, par un calcul semblable au précédent, la valeur de y, et qu'on trouverait ensuite celle de x, en posant

$$bm+b'm'+b''m''=0,\quad cm+c'm'+c''m''=0.$$

Mais, dans le cas actuel, où *les équations proposées sont littérales*, on peut avoir bien plus rapidement les valeurs de y et de x. Il suffit, pour cela, d'observer que si l'on *permute* y et z, b et c, et que l'on conserve les accents, les équations [27] ne seront pas altérées, et que par conséquent le calcul qui donnera la valeur de y ne différera de celui qui a conduit à celle de z que par ce seul échange des lettres b et c l'une dans l'autre. On per-

mutera donc b et c dans la valeur de z, et on obtiendra ainsi la valeur de y. On trouvera de même celle de x en permutant a et c dans l'expression de z.

Les formules qui résolvent les équations [27] sont donc

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{kb'c'' - kc'b'' + ck'b'' - bk'c'' + bc'k'' - cb'k''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''} \\ y &= \frac{ak'c'' - ac'k'' + ca'k'' - ka'c'' + kc'a'' - ck'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''} \\ z &= \frac{ab'k'' - ak'b'' + ka'b'' - ba'k'' + bk'a'' - kb'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''} \end{aligned}\right\} \quad [30]$$

Dans les valeurs trouvées pour x et pour y, d'après la méthode que nous venons d'indiquer, on a changé les signes des deux termes, afin de leur faire acquérir le même dénominateur qu'à la valeur de z.

170. Il est maintenant facile de voir que pour résoudre m équations entre m inconnues, il faudra multiplier chacune d'elles par un facteur indéterminé, et ajouter membre à membre les équations résultantes; on obtiendra ainsi une équation qui renfermera les m inconnues et les m coefficients indéterminés. On égalera ensuite à zéro les coefficients que les $(m-1)$ inconnues que l'on voudra éliminer auront dans cette équation, ce qui permettra d'en tirer la valeur de l'inconnue restante, en fonction des facteurs indéterminés. Pour avoir les valeurs de ces facteurs, on regardera comme connue l'une des m indéterminées, puis, à l'aide des formules trouvées précédemment pour résoudre $(m-1)$ équations à $(m-1)$ inconnues, on tirera des $(m-1)$ équations de condition, auxquelles on les a assujetties, les valeurs des $(m-1)$ inconnues qu'elles renferment, en fonction de la m^{me}, et pour rendre ces valeurs entières, on égalera cette m^{me} indéterminée à leur dénominateur commun. Enfin, il n'y aura plus qu'à substituer les valeurs de ces m indéterminées dans l'expression de l'inconnue que l'on a conservée, et on obtiendra sa valeur.

171. *Bezout* n'employait que $(m-1)$ indéterminées; ainsi

il multipliait $(m-1)$ des équations proposées chacune par un facteur indéterminé, et de la somme des équations résultantes il retranchait la m^{me} des proposées. Cela était suffisant, car, en égalant à zéro les coefficients des $(m-1)$ inconnues que l'on veut éliminer, on forme un système de $(m-1)$ équations entre $(m-1)$ inconnues, et un pareil système est en général susceptible d'une solution. Ce qui nous a engagé à employer, avec M. *Gergonne*, m indéterminées, c'est d'abord parce que les calculs deviennent ainsi plus symétriques; ensuite parce qu'on peut faire en sorte que les valeurs des indéterminées soient entières, et enfin parce qu'il y a des cas où la méthode de *Bezout* est en défaut.

Soient, par exemple, les équations

$$2x+4y-z=5,\ 5x+10y-2z=13,\ 4x-2y+z=3:$$

si, pour déterminer z, on leur applique la méthode même de *Bezout*, on posera les deux équations de condition

$$2m+5m'-4=0,\ 4m+10m'+2=0,$$

équations évidemment incompatibles, car la seconde se réduit à $2m+5m'+1=0$. Il faudrait alors recommencer le calcul, en multipliant la première et la troisième par m et par m'.

Mais si l'on applique la règle du n° **170**, on posera les équations de condition

$$2m+5m'+4m''=0,\ 4m+10m'-2m''=0.$$

Cette dernière se réduit à $2m+5m'-m''=0$, d'où l'on voit que, pour qu'elle puisse s'accorder avec la première, il faut que $m''=0$. Les deux équations se réduisent alors à une seule $2m+5m'=0$, desquelles on tire $m=-5$ et $m'=2$.

172. En examinant avec soin les formules [15], [16] et [30], et se laissant ensuite guider par l'*induction*, *Cramer* a trouvé une règle pratique pour construire, sans calcul, les formules qui résolvent un nombre quelconque d'équations entre pareil nombre d'inconnues.

Soient les m équations à m inconnues

$$\left.\begin{array}{l} ax+by+cz+dt+\ldots+gv=k \\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1t+\ldots+g_1v=k_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2t+\ldots+g_2v=k_2 \\ \vdots \\ a_{m-1}x+b_{m-1}y+c_{m-1}z+d_{m-1}t+\ldots+g_{m-1}v=k_{m-1} \end{array}\right\} \quad [31]:$$

1° *à la droite du coefficient* a *de la première inconnue, écrivez celui* b *de la seconde; intervertissez l'ordre des lettres et interposez le signe — entre les deux produits* ab *et* ba; *vous formerez ainsi le binome*

$$ab-ba.$$

A la droite de chacun de ses termes, écrivez le coefficient c *de la troisième inconnue, et faites passer ensuite ce coefficient par toutes les places, en allant de la droite vers la gauche, et en ayant soin de changer de signe chaque fois que* c *changera de place; vous formerez ainsi le polynome de trois lettres*

$$abc-acb+cab-bac+bca-cba.$$

Écrivez de même le coefficient d *de la quatrième inconnue à la droite de chacun des termes de ce polynome; puis faites-le passer successivement par toutes les places, en ayant soin de changer de signe chaque fois que* d *changera de place; vous trouverez*

$$abcd-abdc+adbc-dabc-acbd+acdb-\ldots;$$

et vous continuerez ainsi jusqu'à ce que vous ayez employé le coefficient de la m^me^ *inconnue. Donnez alors, dans chaque terme du polynome que vous aurez formé de cette manière, l'indice* 1 *à la seconde lettre, l'indice* 2 *à la troisième, l'indice* 3 *à la quatrième, etc., et vous obtiendrez le dénominateur commun des valeurs de toutes les inconnues.*

2° *Pour obtenir le numérateur de chacune, remplacez, dans le dénominateur commun, le coefficient de l'inconnue que vous cherchez par le terme connu, en conservant d'ailleurs les indices.*

En appliquant cette règle aux équations [11] et [12, puis aux équations [27], on trouvera les formules qui les résolvent, si ce n'est que les accents serout remplacés par des indices.

173. Nous allons donner la démonstration de cette *règle de* CRAMER, en modifiant légèrement celle que M. *Gergonne* en a donnée, d'après *Laplace*, dans ses *Annales de mathématiques*.

Si, dans un mot composé des m premières lettres a, b, c,... g, et dans lequel chacune n'entre qu'une fois, deux lettres sont disposées dans un ordre contraire à celui qu'elles suivent dans l'alphabet, nous dirons que ces deux lettres forment une *inversion*, et que ce mot présentera autant d'inversions qu'il y aura de systèmes de deux lettres qui satisferont à cette condition. Ainsi, dans le mot *cgfbead*, la lettre c, qui précède les lettres b et a, forme une inversion avec chacune d'elles, et il y a *quatorze* inversions dans ce mot.

174. 1er PRINCIPE. *Dans le polynome qui doit servir de dénominateur commun aux valeurs des* m *inconnues*, et que, pour abréger, je désignerai par R, *les termes positifs présentent un nombre pair d'inversions*, *et ceux qui sont négatifs en ont un nombre impair.*

On vérifie immédiatement la vérité de ce principe, pour le polynome de deux lettres

$$ab_1 - ba_1,$$

car on considère *zéro* comme un nombre pair. En conséquence, je vais démontrer que, si cette loi est vraie pour un polynome de n lettres, elle le sera aussi pour le polynome de $(n+1)$ lettres, formé d'après la règle du n° **172** 1°, et j'en conclurai qu'elle est générale, puisqu'ayant été vérifiée pour le polynome de 2 lettres, elle sera vraie pour celui qui en renfermera 3, et, l'étant pour celui-ci, elle sera aussi vraie pour le polynome de 4 lettres, et ainsi de suite.

Pour former le polynome de $(n+1)$ lettres, il faudra écrire la $(n+1)^{me}$ lettre, que j'appellerai e, à la droite de chacun des termes du polynome de n lettres, ce qui n'altérera pas le nom-

bre des inversions de ces termes, puisque e suit, dans l'ordre alphabétique, toutes celles qui entrent dans ce polynome; puis on devra la faire passer successivement par toutes les places, en ayant soin de changer de signe à chaque changement de place de e; or, lorsque cette lettre avance d'un rang vers la gauche, le nombre des inversions de chaque terme augmente d'une unité et change par conséquent d'espèce, c'est-à-dire devient impair ou pair s'il était pair ou impair; mais le signe de ce terme change en même temps; donc si la loi était vraie pour le polynome de n lettres, elle le sera aussi pour le polynome de $(n+1)$ lettres. Donc elle est générale.

175. 2° PRINCIPE. *Le polynome* R *se réduira à zéro, si l'on remplace une quelconque des lettres qui y entrent par une autre lettre, en conservant les indices tels qu'ils sont.* Ainsi le polynome de deux lettres

$$ab_1 - ba_1 \text{ devient } bb_1 - bb_1 = 0,$$

lorsqu'on y remplace a par b.

J'observe que, d'après la règle par laquelle nous l'avons formé (**172**, 1°), le polynome R doit renfermer tous les termes que l'on obtiendra en échangeant entre elles, de toutes les manières possibles, les lettres $a, b, c, \ldots g$; de sorte que s'il y a un terme $\ldots b_\beta \ldots d_\delta \ldots$ dans lequel les lettres b et d, par exemple, aient les indices respectifs β et δ, il y en aura un autre $\ldots d_\beta \ldots b_\delta \ldots$* où ces lettres auront, au contraire, la première, l'indice δ et la seconde, l'indice β (la seconde lettre de chaque terme porte l'indice 1; la troisième, l'indice 2; la quatrième, l'indice 3, etc.). Alors, il est évident que si l'on remplace b par d, ces deux termes deviendront identiques en valeur absolue, puisqu'ils seront alors composés des mêmes lettres, affectées des mêmes indices; si donc je prouve qu'ils ont des signes contraires, ils s'entre-détruiront, et comme il en sera évidemment de même de tous

* Ces points tiennent la place de toutes les autres lettres qui sont communes aux deux termes que nous comparons.

les autres termes de R pris deux à deux, il sera prouvé que ce polynome se réduira à zéro, lorsque l'on y remplacera b par d. Or, le terme

$$\ldots d_\beta \ldots b_\delta \ldots$$

se déduit du 1er $\ldots b_\beta \ldots d_\delta \ldots,$

en y permutant d et b. Mais, pour faire cette permutation, on pourra transporter la lettre b à la droite de la lettre d, puis amener celle-ci à la place où b était d'abord. De cette manière, s'il y avait n lettres entre b_β et d_δ, la lettre b aura passé par $(n+1)$ places, et la lettre d en aura occupé n, ce qui fait en tout $(2n+1)$ changements de place. Or, quand on permute une lettre avec sa voisine, le nombre des inversions diminue ou augmente d'une unité, selon que ces deux lettres formaient une inversion ou qu'elles n'en présentaient pas; donc ce nombre change d'espèce; donc, en passant du premier terme au second, le nombre des inversions de ce premier terme a changé un nombre impair de fois d'espèce, et par conséquent si le premier présente un nombre pair ou impair d'inversions, le second en aura un nombre impair ou un nombre pair; donc ces deux termes ont des signes contraires (**174**); donc, lorsqu'on y remplacera b par d, ils s'entre-détruiront; donc R deviendra nul.

176. Ces principes établis, il va être facile de démontrer la règle de *Cramer*. J'observe d'abord que R renfermant chacune des m lettres a, b, $c \ldots g$ avec les indices $1, 2, 3 \ldots (m-1)$, on pourra ordonner ce polynome par rapport aux indices de l'une quelconque de ces lettres, par rapport aux indices de a, par exemple, ce qui le mettra sous la forme

$$R = Aa + A_1a_1 + A_2a_2 + \ldots + A_{m-1}a_{m-1}.$$

Si R ne renfermait que les trois lettres a, b, c, on aurait

$$R = ab_1c_2 - ac_1b_2 + ca_1b_2 - ba_1c_2 + bc_1a_2 - cb_1a_2,$$

et en mettant a, a_1, a_2 en facteurs communs, il viendrait

$$R = (b_1c_2 - c_1b_2)a + (cb_2 - bc_2)a_1 + (bc_1 - cb_1)a_2,$$

de sorte qu'ici A, A_1, A_2 représenteraient respectivement les binomes $b_1c_2 - c_1b_2$, $cb_2 - bc_2$, $bc_1 - cb_1$.

Cela posé, multiplions la première des équations [31] par A, la deuxième par A_1, la troisième par A_2,... la m^{me} par A_{m-1}, et ajoutons membre à membre les équations résultantes, il viendra

$$\left.\begin{matrix} Aa \\ +A_1a_1 \\ \vdots \\ +A_{m-1}a_{m-1} \end{matrix}\right| x + \left.\begin{matrix} Ab \\ +A_1b_1 \\ \vdots \\ +A_{m-1}b_{m-1} \end{matrix}\right| y + \left.\begin{matrix} Ac \\ +A_1c_1 \\ \vdots \\ +A_{m-1}c_{m-1} \end{matrix}\right| z + \ldots + \left.\begin{matrix} Ag \\ +A_1g_1 \\ \vdots \\ +\ldots A_{m-1}g_{m-1} \end{matrix}\right| v = \begin{matrix} Ak \\ +A_1k_1 \\ \vdots \\ +A_{m-1}k_{m-1}. \end{matrix}$$

Or, le coefficient de x est précisément le polynome R, et les coefficients des autres inconnues ne sont que les résultats de la substitution de b, de c,... de g au lieu de a dans ce polynome ; donc ces coefficients sont nuls (175); donc on tire de l'équation précédente

$$x = \frac{Ak + A_1k_1 + A_2k_2 + \ldots + A_{m-1}k_{m-1}}{Aa + A_1a_1 + A_2a_2 + \ldots + A_{m-1}a_{m-1}}.$$

On voit par là que le dénominateur de x est le polynome R formé d'après la règle du n° **172** 1°, et que le numérateur se déduit de ce dénominateur en y remplaçant a par k.

Ce qu'on vient de reconnaître pour x, on le démontrerait pour y, en ordonnant R par rapport aux indices de b, ce qui donnerait

$$R = Bb + B_1b_1 + B_2b_2 + \ldots + B_{m-1}b_{m-1},$$

et en multipliant les équations [31] respectivement par B, B_1, B_2,.... B_{m-1} : et de même pour les autres inconnues ; donc la règle est démontrée.

CHAPITRE V.

DISCUSSION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES.

177. Dans les trois méthodes d'élimination que nous avons exposées, nous avons été obligé de soumettre les valeurs des coefficients des inconnues à certaines restrictions; ainsi, dans le cas de deux équations à deux inconnues, nous avons supposé que $(ab'-ba')$ n'était pas nul. On conçoit, d'après cela, que si pour certaines valeurs attribuées aux lettres qui entrent dans les formules que nous avons obtenues, tous les calculs qui y ont conduit ne pouvaient pas être répétés, on devrait craindre que ces formules ne convinssent pas à ces cas particuliers. Il est donc important d'examiner si elles sont générales ou si elles ne le sont pas, et c'est là l'objet de la *discussion* à laquelle nous allons nous livrer.

178. Considérons d'abord le cas des deux équations à deux inconnues :

$$\left.\begin{aligned} ax+by&=k \\ a'x+b'y&=k' \end{aligned}\right\} \qquad [1],$$

desquelles on a tiré

$$x=\frac{kb'-bk'}{ab'-ba'}, \quad y=\frac{ak'-ka'}{ab'-ba'} \qquad [2],$$

et supposons que l'on donne aux lettres a, b, a', b', etc., des valeurs telles que le dénominateur commun $ab'-ba'$ se réduise à *zéro*, sans que les numérateurs deviennent nuls; il en résultera

$$x=\infty \quad \text{et} \quad y=\infty.$$

Si les formules [2] étaient applicables au cas actuel, ces valeurs infinies de x et de y nous indiqueraient que les équations [1] ne peuvent être vérifiées par aucun couple de valeurs

finies de x et de y, et qu'en conséquence *ces équations sont incompatibles*. Mais nous ne savons pas si ces formules conviennent au cas où $ab'-ba'=0$, puisque, pour les obtenir, nous avons supposé que ce binome $ab'-ba'$ n'était pas nul. Pour lever cette difficulté, il faut écrire dans les équations [1] que

$$ab'-ba'=0 \qquad [3],$$

et si nous trouvons que ces équations expriment alors des *conditions contradictoires*, nous en conclurons que les formules [2] sont applicables au cas que nous examinons, puisqu'elles nous indiquent ce qui a effectivement lieu, l'incompatibilité des équations [1].

De l'équation [3], je tire $b'=\frac{ba'}{a}$, et je substitue cette valeur dans la deuxième des équations [1], ce qui exprimera dans cette équation la condition [3] *; il viendra ainsi

$$a'x+\frac{ba'}{a}y=k',$$

d'où, en chassant le dénominateur et divisant ensuite par a',

$$ax+by=\frac{ak'}{a'},$$

de sorte que les équations à résoudre sont

$$ax+by=k,$$
$$ax+by=\frac{ak'}{a'}.$$

Mais quelque valeur que l'on donne à x et à y, jamais ces deux équations ne pourront être vérifiées en même temps, puisque leurs premiers membres sont identiques et que les seconds sont différents, car si on avait $k=\frac{ak'}{a'}$, il en résulterait $ak'-ka'=0$, ce qui n'est pas.

Donc *les formules* [2] *s'appliquent au cas où* $ab'-ba'=0$,

* Car si $b'=\frac{ba'}{a}$, il s'ensuit nécessairement que $ab'-ba'=0$.



en ce sens qu'elles indiquent l'incompatibilité des équations [1].

179. Supposons actuellement que l'on ait à la fois $ab'-ba'=0$ et $kb'-bk'=0$, la valeur de x se réduira à $\frac{0}{0}$ et celle de y semblera devenir infinie ; mais il est facile de voir qu'elle se réduit aussi à $\frac{0}{0}$. En effet, des équations de condition

$$ab'-ba'=0 \quad \text{et} \quad kb'-bk'=0,$$

on tire facilement

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{k}{k'}, \quad \text{d'où} \quad ak'=ka' \quad \text{et} \quad ak'-ka'=0.$$

Ainsi, les valeurs de x et de y deviennent toutes deux $\frac{0}{0}$. En conclura-t-on que ces inconnues admettent une infinité de valeurs? Non ; car, d'abord nous ignorons si les formules [2] conviennent aux hypothèses que nous avons faites, et, en second lieu, nous avons prouvé qu'une fraction, qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, peut n'être pas indéterminée (**140**). Nous allons donc écrire dans les équations [1] les conditions

$$ab'-ba'=0 \quad \text{et} \quad kb'-bk'=0,$$

et nous verrons ce qui en résultera. Mais ces conditions reviennent à la suite de rapports égaux

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{k}{k'};$$

si donc nous représentons par m la valeur commune de ces rapports, il viendra

$$a=ma', \quad b=mb', \quad k=mk',$$

et en conséquence la première des équations à résoudre est

$$ma'x+mb'y=mk',$$

qui, n'étant que le produit de la deuxième par m, se réduit à cette seconde, par la suppression de ce facteur m. On n'a donc ainsi qu'une seule équation entre les deux inconnues x et y, et par conséquent ces inconnues sont indéterminées.

Donc *lorsque l'une des valeurs de* x *et de* y, *données par les*

formules [2], *se présentera sous la forme* $\frac{0}{0}$, *on devra en conclure* 1° *que celle de l'autre se présentera aussi sous la même forme* $\frac{0}{0}$; 2° *que ces inconnues sont indéterminées.*

180. Cette conclusion ne souffrira jamais d'exception, lorsque les deux inconnues x et y entreront *effectivement* dans les équations proposées; mais elle cesserait d'être vraie, si on voulait appliquer les formules [2] à deux équations à une seule inconnue. Ainsi lorsque a et a' sont nuls, on a $x=\infty$ et $y=\frac{0}{0}$, et les équations [1] se réduisant à $by=k$ et à $b'y=k'$, on voit qu'elles sont incompatibles, puisque $kb'-bk'$ n'est pas nul, sans quoi la valeur de x ne deviendrait pas infinie.

Si on a à la fois $a=0$, $a'=0$ et $kb'-bk'=0$, les formules [2] se réduisent toutes deux à $\frac{0}{0}$, et cependant la valeur seule de x est indéterminée, et celle de y est égale à $\frac{k}{b}$. C'est au reste ce que l'on déduit de la formule $y=\frac{ak'-ka'}{ab'-ba'}$; car, si on y écrit que $kb'-bk'=0$, il viendra $y=\frac{k(ab'-ba')}{b(ab'-ba')}=\frac{k}{b}$.

181. Considérons actuellement un système de m équations littérales à m inconnues, et représentons par

$$x=\frac{A}{R},\ y=\frac{B}{R},\ z=\frac{C}{R},\ldots.$$

les formules générales qui servent à les résoudre, et dont nous avons donné la construction au n° **172**. Supposons qu'en appliquant ces formules à la résolution d'un système de m équations numériques à m inconnues, il en résulte $R=0$. Il pourra alors arriver deux cas : ou les numérateurs A, B, C,.... se réduiront aussi *tous* à zéro, ou il n'en sera pas ainsi. Examinons successivement ces deux cas, en commençant par le second.

Supposons donc que R étant nul, A ne le soit pas, de sorte que la valeur de x se réduise à $\frac{a}{0}=\infty$; je dis que *les équations*

proposées sont incompatibles. En effet, on pourra toujours supposer que, pour obtenir les formules ci-dessus, on ait éliminé d'abord toutes les inconnues, à l'exception de x, entre les m équations littérales, et l'équation finale en x aura été nécessairement

$$Rx = A,$$

puisque nous supposons que l'expression générale de x est

$$x = \frac{A}{R}.$$

Or, cette équation est absurde, lorsque R devient nul sans que A le soit, ainsi qu'on l'a vu au n° **138**; mais si un même système de valeurs de x, y, z, ... pouvait satisfaire aux équations proposées, la valeur de x, qui en fait partie, devrait vérifier l'équation $Rx=A$ (**159**); donc, puisque cette équation ne saurait être satisfaite par aucune valeur de x, il faut nécessairement en conclure qu'aucun système de valeurs de x, y, z, ... ne peut vérifier les équations proposées, et qu'ainsi elles sont incompatibles.

182. Supposons maintenant que tous les numérateurs soient nuls en même temps que le dénominateur commun R; alors les inconnues se présenteront toutes sous la forme $\frac{0}{0}$. Donc, pour connaître leurs véritables valeurs, on devra remonter aux équations numériques proposées (**140**), y faire les hypothèses qui ont réduit les formules générales à $\frac{0}{0}$, et les résoudre, en leur appliquant directement les méthodes d'élimination. *Si l'on parvient à une équation identique, on en conclura qu'elles sont indéterminées; mais si l'on arrive à une équation absurde*, telle que $0=A$, *ce sera un signe certain qu'elles sont incompatibles.*

183. Exemple I. Si dans les formules [30] du n° **169**, on suppose

$$a'' = ma + na',\ b'' = mb + nb',\ c'' = mc + nc',\ k'' = mk + nk,$$

elles se réduiront à $\frac{0}{0}$; et il est facile de voir, sans se donner la peine de les résoudre, que les équations

$$ax + by + cz = k,\ a'x + b'y + c'z = k',\ a''x + b''y + c''z = k''$$

sont alors indéterminées. Car, si l'on représente les deux premières par $A=0$ et par $A'=0$, la troisième le sera, en vertu des hypothèses que nous avons faites, par $mA+nA'=0$; or, tout système de valeurs de x, y, z, qui satisfait aux deux équations $A=0$ et $A'=0$, vérifie la troisième $mA+nA'=0$, et réciproquement tout système de valeurs de ces inconnues qui vérifient les équations $A=0$ et $mA+nA'=0$ satisfait à $A'=0$; donc les solutions du système proposé seront données par les *deux* équations à *trois* inconnues $A=0$ et $A'=0$.

Le système des équations, que nous avons pris pour deuxième exemple au nº **162**, est dans ce cas : la quatrième, en effet, a été formée en ajoutant membre à membre les équations obtenues en multipliant la première par 2 et la seconde par -3.

Exemple II. Considérons les trois équations

$$x+y+z=k,\ a'x+a'y+a'z=k',\ a''x+a''y+a''z=k'':$$

on fera, dans les formules [30] du nº **169**,

$$a=b=c=1,\ b'=c'=a',\ b''=c''=a'',$$

et on verra qu'elles se réduisent toutes trois à $\frac{0}{0}$; on se reportera en conséquence aux équations proposées, et, en retranchant de la seconde le produit de la première par a', on trouvera l'égalité absurde

$$0=k'-a'k,$$

donc ces équations sont *contradictoires*.

Exemple III. Soient encore les équations

$$x+y+cz=k,\ x+y+c'z=k',\ x+y+c''z=k'':$$

on trouvera, en leur appliquant les formules générales,

$$x=\infty,\ y=\infty,\ z=\frac{0}{0},$$

de sorte que les équations proposées sont incompatibles. En effet, si on les retranche membre à membre, on remplacera leur système par le suivant :

$$x+y+cz=k,\ (c-c')z=k-k',\ (c-c'')z=k-k'',$$

or, ces deux dernières équations ne seront compatibles que si

l'on a $\frac{k-k'}{c-c'}=\frac{k-k''}{c-c''}$, et comme nous n'avons pas fait cette hypothèse, il faut en conclure que les proposées sont contradictoires.

Mais si $\frac{k-k'}{c-c'}=\frac{k-k''}{c-c''}$, les valeurs générales de x et de y se réduiront à $\frac{0}{0}$ * comme celle de z. Mais tandis que z est déterminée et égale à $\frac{k-k'}{c-c'}$, x et y restent indéterminées; car le système des équations proposées est équivalent à celui des deux équations

$$x+y+cz=k,\ (c-c')z=k-k',$$

de sorte que l'on n'a plus, pour déterminer x et y, que la seule équation

$$x+y+c\frac{k-k'}{c-c'}=k, \quad \text{ou} \quad x+y=\frac{ck'-kc'}{c-c'}.$$

On pourra donc assigner une valeur *arbitraire* à l'une d'elles, et la valeur de l'autre sera déterminée.

184. Il est bon de remarquer le cas où, les seconds membres de trois équations à trois inconnues étant nuls, le dénominateur commun

$$R=ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''$$

des valeurs de x, y, z, le sera aussi, auquel cas les formules générales se réduiront à $\frac{0}{0}$. On résoudra donc alors directement les proposées

$$ax+by+cz=0,\ a'x+b'y+c'z=0,\ a''x+b''y+c''z=0;$$

pour cela, on tirera des deux premières

$$x=\frac{bc'-cb'}{ab'-ba'}z,\quad y=\frac{ca'-ac'}{ab'-ba'}z \qquad [4],$$

* On tire, en effet, de cette équation de condition

$$k''-k':c''-c'::k-k':c-c'::k-k'':c-c''.$$

et, en substituant ces valeurs dans la troisième, il viendra

$$Rz = 0;$$

de sorte que le système de ces trois dernières équations remplacera le système des proposées. Or l'équation $Rz = 0$ est vérifiée, quelle que soit la valeur de z, puisque nous supposons que R est nul; donc x et y admettent aussi une infinité de valeurs.

Mais, ce qui est très-remarquable, c'est que si R est nul, sans qu'aucune des trois différences $ab' - ba'$, $ac' - ca'$ et $bc' - cb'$ soit égale à zéro, *les rapports* $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ *et* $\frac{x}{y}$ *seront constants, quoique chacune des trois inconnues admette une infinité de valeurs*. Cela résulte évidemment des équations [4].

CHAPITRE VI.

THÉORIE DES INÉGALITÉS.

---

§ I. PRINCIPES GÉNÉRAUX.

185. La théorie des inégalités repose sur ce principe, savoir : que

Si a $>$ b, *on aura* a $-$ b > 0, *quels que soient les signes de* a *et de* b.

Trois cas peuvent se présenter, selon que a et b sont tous deux positifs, tous deux négatifs, où que a est positif et b négatif. On ne peut pas supposer a négatif et b positif, car on aurait alors $a < b$ (**26**).

1° Si a et b sont positifs, et que a soit $> b$, il est évident que $a - b > 0$.

2° Si a et b sont négatifs, et que a soit $> b$, la valeur absolue de a sera moindre que celle de b, et par conséquent $a - b$ sera positif, puisque le signe de b doit changer en retranchant cette quantité de a.

3° Si $a > 0$ et $b < 0$, il est évident que $a - b$ est la somme de deux quantités positives, donc $a - b > 0$.

Réciproquement *si* a $-$ b > 0, a *est* $>$ b. La démonstration est la même que la précédente.

186. Il suit de ce principe qu'*on n'altère pas une inégalité, en ajoutant à ses deux membres ou en en retranchant une même quantité;* ainsi de $a > b$ on tire $a \pm c > b \pm c$. En effet, puisque $a > b$, on a $a - b > 0$, et par conséquent $a - b \pm c \mp c > 0$, ou, ce qui revient au même,

$$a \pm c - (b \pm c) > 0; \text{ donc } (\mathbf{185})\ a \pm c > b \pm c.$$

187. Il suit de là que, *pour transposer un terme d'un membre d'une inégalité dans un autre, il faut le supprimer dans le membre où il se trouve, et l'écrire dans l'autre avec un signe contraire à celui qu'il avait*, car cela revient à retrancher ce terme, pris

avec son signe, des deux membres de l'inégalité. Ainsi de $a+b>c-d$, on tire $a+d>c-b$.

188. *Si l'on change les signes de tous les termes d'une inégalité, il faudra renverser en même temps le signe qui indique l'inégalité*, car cela revient à faire passer tous les termes du premier membre dans le second et réciproquement. Ainsi de $a-b>c-d$ on tire $-a+b<-c+d$.

189. *On n'altère pas une inégalité en multipliant ou en divisant ses deux membres par une même quantité* POSITIVE, *mais si cette quantité est négative, il faut renverser le signe de l'inégalité.*

1° Supposons $m>0$; je dis que de $a>b$ résulte $ma>mb$ ou $\frac{a}{m}>\frac{b}{m}$. En effet, puisque $a>b$, on a $a-b>0$ et par conséquent $ma-mb>0$ (36) ou $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}>0$ (35); donc $ma>mb$ ou $\frac{a}{m}>\frac{b}{m}$.

2° Si $m<0$, de $a>b$, on tirera $ma<mb$ ou $\frac{a}{m}<\frac{b}{m}$. La démonstration est la même que celle du cas précédent.

190. *On peut ajouter membre à membre plusieurs inégalités qui ont lieu dans le même sens*; ainsi de $a>b$ et de $c>d$, on tire $a+c>b+d$; car ces inégalités reviennent à $a-b>0$ et à $c-d>0$, d'où $a-b+c-d>0$, d'où $a+c>b+d$ (**187**).

191. *On peut retrancher membre à membre deux inégalités qui ont lieu en sens contraires, en donnant à la nouvelle inégalité le signe qu'a celle dont on retranche*; ainsi des inégalités $a>b$ et $c<d$, on tire $a-c>b-d$. En effet, elles reviennent à $a-b>0$ et à $c-d<0$; or, si de la quantité positive $a-b$ on retranche la quantité négative $c-d$, on aura évidemment un résultat positif; donc $a-b-c+d>0$, d'où $a-c>b-d$.

EN GÉNÉRAL, *il n'est point permis de retrancher membre à membre deux inégalités qui ont lieu dans le même sens.* Ainsi de $8>7$ et de $6>2$, on ne tire pas $8-6>7-2$.

192. *On peut multiplier membre à membre plusieurs inégalités qui ont lieu dans le même sens, pourvu que les deux mem-*

bres de chacune soient POSITIFS; c'est-à-dire que si a, b, c, d sont quatre quantités positives et que l'on ait $a > b$ et $c > d$, on en déduira $ac > bd$. Cela est évident, puisque les facteurs du produit ac sont plus grands que ceux du produit bd.

Des inégalités $5 > 3$ et $-6 > -7$, on ne tirerait pas $5 \times (-6) > 3 \times (-7)$, car cela reviendrait à $-30 > -21$.

193. Il suit de là que *l'on peut élever à la même puissance les deux membres d'une inégalité, quand ces deux membres sont des quantités positives.* Ainsi $5 > 3$ donne $5^2 > 3^2$; mais de $5 > -7$, on ne tirerait pas $5^2 > (-7)^2$.

194. *On peut élever à une puissance de degré impair, les deux membres de toute inégalité;* ainsi de $a > b$, on tire, par exemple, $a^{2n+1} > b^{2n+1}$.

En effet, si a est positif et b négatif, la chose est évidente, puisque toute puissance de degré impair d'une quantité négative est négative (38). Si a et b sont négatifs, $a^{2n+1} > b^{2n+1}$, puisque ces deux puissances sont négatives et que la valeur absolue de la première est moindre que celle de la seconde.

195. Avant d'aller plus loin, observons que si l'on élève deux quantités égales et de signes contraires, $+a$ et $-a$, à une puissance de degré pair, $2m$, on trouvera le même résultat $+a^{2m}$ (38); d'où il suit que si l'on demande d'extraire une racine de degré pair $2m$ d'une certaine quantité, et qu'on ignore si cette quantité provient d'une grandeur positive ou d'une quantité négative, on doit, *dans le doute où l'on est*, affecter cette racine du double signe $\pm$*. Ainsi on dira que la racine carrée de 25 est ± 5; que la racine quatrième de 81 est ± 3.

Mais, si le degré de la racine à extraire est impair, on donnera à cette racine le signe même de la quantité dont on l'extrait, car toute puissance de degré impair d'une certaine quantité porte le signe de cette quantité (38).

196. *On peut extraire une racine de degré pair des deux membres d'une inégalité, pourvu que l'on prenne, pour ces racines,*

* Prononcez : *plus* ou *moins*.

des quantités positives. Ainsi de l'inégalité $(a-b)^2 > (c-d)^2$, on tirera $a-b > c-d$, si $(a-b)$ et $(c-d)$ sont des quantités positives; mais si $(a-b)$, par exemple, était négative, comme le carré de $(b-a)$ est le même que celui de $(a-b)$, l'inégalité proposée revenant à $(b-a)^2 > (c-d)^2$, on en tirerait $b-a > c-d$.

197. *On peut extraire une racine de degré impair des deux membres de toute inégalité;* ainsi de $a > b$ on déduit, par exemple, $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$, car toute racine de degré impair d'une quantité négative est aussi négative (**195**).

198. *On peut diviser membre à membre deux inégalités, qui ont lieu en sens contraires, et entre deux quantités* POSITIVES, *en donnant à l'inégalité résultante le signe de celle qu'on a divisée.* Ainsi de $a > b$ et de $c < d$, on tire $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$; cela est évident puisque le premier dividende est plus grand que le second, tandis que le premier diviseur est au contraire moindre que le second.

199. *Si l'on a une suite de fractions* $\frac{a}{b}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots \frac{a_m}{b_m}$, *dont les numérateurs sont quelconques et dont les dénominateurs sont tous positifs, et que l'on forme une fraction* $\frac{a+a_1+a_2+\ldots+a_m}{b+b_1+b_2+\ldots+b_m}$, *dont les deux termes sont les sommes qu'on obtient en ajoutant d'une part tous les numérateurs, et de l'autre tous les dénominateurs des fractions proposées, cette fraction sera comprise entre la plus petite et la plus grande de celles-ci.*

Supposons-les en effet rangées par ordre de grandeur, de manière que $\frac{a}{b}$ soit la plus petite et que $\frac{a_m}{b_m}$ soit la plus grande; on aura évidemment

$$a = b \cdot \frac{a}{b},$$

$$a_1 > b_1 \cdot \frac{a}{b},$$

$$a_2 > b_2 \cdot \frac{a}{b},$$

$$\vdots$$

$$a_m > b_m \cdot \frac{a}{b}.$$

Or, si l'on additionne toutes ces relations membre à membre, il viendra

$$a+a_1+a_2+\ldots+a_m>(b+b_1+b_2+\ldots+b_m)\cdot\frac{a}{b};$$

donc
$$\frac{a+a_1+a_2+\ldots+a_m}{b+b_1+b_2+\ldots+b_m}>\frac{a}{b}.$$

En partant au contraire de l'égalité $a_m=b_m\cdot\frac{a_m}{b_m}$, on trouverait $a_{m-1}<b_{m-1}\cdot\frac{a_m}{b_m}$ etc., et on arriverait ainsi à conclure que

$$\frac{a+a_1+a_2+\ldots+a_m}{b+b_1+b_2+\ldots+b_m}<\frac{a_m}{b_m}.$$

§ II. DES INÉGALITÉS DU PREMIER DEGRÉ A UNE SEULE INCONNUE.

200. Quelle que soit l'inégalité proposée, on pourra toujours faire évanouir les dénominateurs, s'il y en a (**132**), en ayant égard au principe du n° **189**, et la ramener ainsi à la forme

$$ax+b>c+dx \qquad [1]$$

On en tire, en transposant,

$$(a-d)x>c-b,$$

d'où
$$x \gtrless^{*} \frac{c-b}{a-d}, \quad \text{selon que } a-d \gtrless 0.$$

Dans le premier cas, la quantité $\frac{c-b}{a-d}$ est une *limite inférieure* de x, c'est-à-dire que pour vérifier l'inégalité proposée, on pourra assigner à x toutes les valeurs imaginables plus grandes que $\frac{c-b}{a-d}$, en n'oubliant pas ce que nous avons dit au n° **26**, sur les grandeurs relatives des quantités positives et négatives.

* Prononcez *plus grand* ou *plus petit que*.

Dans le second cas, où $a-d<0$, $\frac{c-b}{a-d}$ est une *limite supérieure* de x, de sorte que l'on peut donner à cette inconnue toutes les valeurs plus petites que cette limite.

Lorsque l'inconnue x sera assujettie à satisfaire à deux inégalités différentes, on pourra lui assigner une infinité de valeurs, si elles déterminent à la fois deux limites inférieures, ou deux limites supérieures de cette inconnue ; seulement il faudra partir de la plus grande limite inférieure ou de la plus petite limite supérieure. Mais si l'on tire des deux inégalités une limite inférieure et une limite supérieure de x, on ne saurait donner à cette inconnue que les valeurs comprises entre ces deux limites, de sorte qu'il pourra être impossible de satisfaire aux inégalités proposées, si la limite inférieure trouvée n'est pas moindre que la limite supérieure.

201. Problème. *Un berger, interrogé sur le nombre de ses moutons, répond : Si vous diminuez de 7 unités les $\frac{2}{5}$ de leur nombre, le reste que vous trouverez sera plus grand que 4, et si au tiers de ce nombre vous ajoutez une unité, vous trouverez une somme qui surpassera l'excès de la moitié du nombre de mes moutons sur 4. Quel est le nombre de ces moutons ?*

En le désignant par x, on trouvera facilement les deux inégalités

$$\tfrac{2}{5}x-7>4,\ \frac{x}{3}+1>\tfrac{1}{2}x-4.$$

On en tire successivement

$$2x-35>20, \qquad \text{d'où} \quad x>\frac{55}{2}=27\tfrac{1}{2},$$

$$2x+\ 6>3x-24, \quad \text{d'où} \quad x<30.$$

Or, x devant être un nombre entier, on ne pourra prendre pour sa valeur que les seuls nombres 28 et 29. Il est facile de vérifier que ces nombres satisfont à la question.

Mais, si le reste obtenu en retranchant 7 des $\frac{2}{5}$ du nombre des moutons eût dû être plus grand que 5, on aurait trouvé 30 pour

limite inférieure de x, et comme la limite supérieure est aussi 30, le problème n'aurait pas admis de solution.

§ III. DES INÉGALITÉS ENTRE PLUSIEURS INCONNUES.

202. Considérons deux inégalités entre deux inconnues

$$ax+by>k, \quad a'x+b'y>k'.$$

On en tire

$$x \gtrless \frac{k-by}{a}, \quad \text{selon que} \quad a \gtrless 0,$$

et

$$x \gtrless \frac{k'-b'y}{a'}, \quad \text{selon que} \quad a' \gtrless 0.$$

Si a et a' sont deux quantités positives, on a ainsi deux limites inférieures de x, et alors on pourra assigner à y une valeur arbitraire β, et donner en même temps à x toutes les valeurs plus grandes que la plus grande des deux quantités $\frac{k-b\beta}{a}$ et $\frac{k'-b'\beta}{a'}$.

Si a et a' sont négatifs, on pourra encore donner à y une valeur arbitraire β, et x recevra en même temps toutes les valeurs moindres que la plus petite des deux quantités $\frac{k-b\beta}{a}$ et $\frac{k'-b'\beta}{a'}$.

Si a et a' sont de signes contraires, et si, par exemple, $a>0$ et $a'<0$, on aura

$$x>\frac{k-by}{a} \quad \text{et} \quad x<\frac{k'-b'y}{a'},$$

et cela exige que l'on ait

$$\frac{k-by}{a}<\frac{k'-b'y}{a'},$$

ce qui détermine une limite de y. Alors on assignera à y toutes les valeurs plus grandes que cette limite, si c'est une limite inférieure; plus petites qu'elle, si c'est une limite supérieure; et on accouplera, avec chacune de ces valeurs de y, toutes les va-

leurs de x comprises entre les deux limites correspondantes de cette inconnue.

En résolvant les inégalités proposées par rapport à y, on obtiendrait semblablement la limite de x.

203. Les mêmes considérations conduiront à la *détermination des limites des deux variables* x *et* y, *dans un système quelconque d'inégalités à deux inconnues.*

Supposons, par exemple, que l'on propose de satisfaire aux trois inégalités

$$2y-x>0,\quad 1-2x-3y>0,\quad 7+4x+y>0,$$

par des *valeurs entières* de x et de y. On en tirera, en les résolvant par rapport à x,

$$x<2y,\quad x<\frac{1-3y}{2},\quad x>-\frac{7+y}{4};$$

il faut donc que l'on ait à la fois

$$-\frac{7+y}{4}<2y \qquad \text{et} \qquad -\frac{7+y}{4}<\frac{1-3y}{2}.$$

On en déduit

$$y>-\tfrac{7}{9}, \quad \text{et} \qquad y<\tfrac{9}{5}.$$

Ainsi, puisque y doit être une quantité entière, on ne peut pas lui assigner d'autres valeurs que 0 et 1.

Or, pour $y=0$, on a $x<0$, $x<\frac{1}{2}$, $x>-\frac{7}{4}$.

Donc à $y=0$ on ne peut faire correspondre que -1, puisque c'est là le seul nombre entier compris entre 0 et $-\frac{7}{4}$.

Pour $y=1$, on a $x<2$, $x<-1$, $x>-2$;

or, il n'y a point de nombres entiers compris entre -1 et -2; donc à $y=1$ ne répond aucune valeur de x; de sorte que les inégalités proposées ne peuvent être vérifiées que par le seul couple $y=0$ et $x=-1$.

Il est bon de remarquer que l'on peut quelquefois éliminer une inconnue entre deux inégalités, par la *méthode d'élimination par réduction;* ainsi en ajoutant à la troisième des inégalités

proposées, d'une part, le produit de la première par 4 ; d'une autre part, le produit de la deuxième par 2, x disparaîtra, et il viendra

$$9y+7>0 \text{ d'où } y>-\tfrac{7}{9}, \quad \text{et} \quad 9-5y>0 \text{ d'où } y<\tfrac{9}{5}.$$

Mais ce procédé est, en général, moins commode que le précédent.

CHAPITRE VII.

DE L'ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ.

§ I. ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ A DEUX INCONNUES.

204. Nous avons vu que lorsque le nombre des inconnues surpasse celui des équations à résoudre, ces équations sont indéterminées, c'est-à-dire qu'il existe une infinité de systèmes de valeurs de ces inconnues qui peuvent les vérifier (**161**). Mais si l'on demande que les valeurs des inconnues soient toutes *entières*, le nombre des solutions pourra ne plus être infini, et quelquefois même la question deviendra impossible, surtout si l'on exige encore que ces valeurs soient non-seulement entières, mais encore *positives*. La détermination de ces sortes de valeurs est l'objet de l'*analyse indéterminée.* Pour prendre d'abord le cas le plus simple, nous allons nous occuper de la *résolution*, *en nombres entiers*, *d'une équation du premier degré à deux inconnues.*

205. Toute équation du premier degré à deux inconnues peut, comme nous l'avons vu, être ramenée à la forme

$$Ax + By = K,$$

dans laquelle A, B et K représentent trois nombres entiers. Tâchons de la réduire à la forme la plus simple possible. En conséquence, si ces trois nombres ne sont pas premiers entre eux, on les divisera par leur plus grand commun diviseur, ce qui donnera une équation plus simple

$$A'x + B'y = K'.$$

Maintenant, il pourra se faire que deux des trois quantités A', B' et K' aient un facteur commun ; je suppose d'abord que A' et B' jouissent de cette propriété et que leur plus grand commun

diviseur soit d; je divise tous les termes de l'équation ci-dessus par d, et il viendra

$$A''x + B''y = \frac{K'}{d},$$

équation qui ne pourra être satisfaite par aucun couple de valeurs entières de x et de y, puisque A'' et B'' sont des nombres entiers, et que $\frac{K'}{d}$ n'en est pas un. Donc

Pour qu'une équation à deux inconnues soit soluble en nombres entiers, il FAUT *que le plus grand commun diviseur de leurs coefficients divise le terme tout connu.*

206. Supposons maintenant que, A' et B' étant premiers entre eux, l'un de ces coefficients A', par exemple, ait un facteur commun d avec K' : en divisant tous les termes de l'équation $A'x + B'y = K'$ par ce facteur commun, on trouvera

$$A''x + \frac{B'y}{d} = K'';$$

or, A'' et K'' sont des nombres entiers; donc $\frac{B'y}{d}$ doit aussi être un nombre entier; mais B' et d sont premiers entre eux; donc y doit être un multiple de d, et est ainsi de la forme dy', de sorte que l'équation proposée sera ramenée à

$$A''x + B'y' = K'',$$

et celle-ci sera elle-même susceptible d'être simplifiée, si B' et K'' ne sont pas premiers entre eux. On voit par là que l'on pourra toujours réduire toute équation à deux indéterminées à la forme

$$ax + by = k \qquad [1],$$

dans laquelle *les nombres* a, b *et* k *sont premiers entre eux deux à deux.*

207. Occupons-nous donc de la résolution de cette équation. Rien ne serait plus facile, si l'un des coefficients a, par exemple, était égal à l'unité, car alors on en tirerait immédiatement

$$x = k - by,$$

et on voit ainsi qu'à chaque valeur entière de y correspondrait une pareille valeur de x. En conséquence, nous allons tâcher de faire dépendre la résolution de l'équation [1] de celle d'une équation dans laquelle le coefficient de l'une des inconnues serait l'unité.

a et b étant deux nombres premiers entre eux sont nécessairement inégaux : soit $a<b$. Je résous l'équation [1] par rapport à x, c'est-à-dire par rapport à l'inconnue qui a le plus petit coefficient, ce qui donne

$$x=\frac{k-by}{a}.$$

J'effectue la division de b par a, j'appelle q le quotient et r le reste, de sorte que

$$b=aq+r,$$

et je substitue cette valeur de b dans celle de x; il viendra

$$x=\frac{k-aqy-ry}{a}=-qy+\frac{k-ry}{a}.$$

Pour que cette valeur de x soit entière, *il faut et il suffit* que les valeurs entières que l'on pourra attribuer à y rendent $\frac{k-ry}{a}$ égale à un nombre entier quelconque t, de sorte qu'on aura

$$\frac{k-ry}{a}=t, \quad \text{et} \quad x=-qy+t.$$

La résolution de l'équation [1] se trouve donc ramenée à celle de l'équation

$$\frac{k-ry}{a}=t, \quad \text{qui revient à} \quad ry+at=k \quad [2],$$

et nous nous sommes approchés du but vers lequel nous tendons, car les coefficients r et a des inconnues y et t sont respectivement moindres que ceux a et b, que les inconnues x et y ont dans la proposée. Il est d'ailleurs évident que nous nous en serons d'autant plus approchés que r sera plus petit. Si donc, en faisant la division de b par a, *en dedans*, comme à l'ordinaire,

on trouvait un reste $r > \frac{1}{2}a$, il serait avantageux d'effectuer cette division *en dehors* (*Arithmétique*, **92**), car alors le reste serait plus petit que $\frac{1}{2}a$, en valeur absolue *. Nous supposerons désormais que l'on ait *toujours* fait les divisions en dedans ou en dehors, selon qu'il sera nécessaire pour obtenir un reste moindre que la moitié du diviseur.

Remarquons encore que, si k et r avaient un facteur commun m, la fraction $\frac{k-ry}{a}$ pouvant se mettre sous la forme $\frac{m(k'-r'y)}{a}$, et m étant une quantité première avec a, sans quoi b et a auraient un facteur commun, il faut, pour que $\frac{k-ry}{a}$ soit un nombre entier, que $\frac{k'-r'y}{a}$ soit aussi un nombre entier (*Arith.*, 80), ce qui donne

$$\frac{k'-r'y}{a}=t, \quad \text{d'où} \quad r'y+at=k',$$

et ici le coefficient de y est moindre que dans l'équation [2]. Nous ne négligerons donc pas cette simplification, quand elle se présentera.

Observons encore que l'on pourra effectuer aussi la division de k par a, ce qui conduira à une équation plus simple, et qu'il conviendra de la faire en dedans ou en dehors, selon qu'il sera nécessaire pour avoir un facteur commun au reste de cette division et à celui de b par a, s'il est possible.

Revenons maintenant à l'équation [2], et, en opérant sur elle comme sur la proposée, on en tirera

$$y=\frac{k-at}{r}=-q_1t+\frac{k-r_1t}{r},$$

en posant $a=rq_1+r_1$.

Pour que cette valeur de y soit entière, *il faut et il suffit* que les valeurs entières que l'on attribuera à t rendent $\frac{k-r_1t}{r}$

* L'égalité $b=aq+r$ revient à $b=a(q+1)-a+r$ ou $b=a(q+1)-(a-r)$; or $a-r<\frac{1}{2}a$.

égale à un nombre entier quelconque t_1, de sorte qu'on aura

$$\frac{k-r_1t}{r}=t_1 \quad \text{et} \quad y=-q_1t+t_1.$$

La résolution de l'équation [2] dépendra ainsi de celle de l'équation plus simple

$$\frac{k-r_1t}{r}=t_1, \quad \text{ou} \quad r_1t+rt_1=k \qquad [3].$$

On tire de celle-ci

$$t=\frac{k-rt_1}{r_1}=-q_2t_1+\frac{k-r_2t_1}{r_1},$$

en posant $r=r_1q_2+r_2$. Pour que t soit un nombre entier, il faut et il suffit que l'on donne à t_1 des valeurs entières qui rendent $\frac{k-r_2t_1}{r_1}$ égale à un nombre entier quelconque t_2, de sorte qu'on aura

$$\frac{k-r_2t_1}{r_1}=t_2 \quad \text{et} \quad t=-q_2t_1+t_2.$$

La résolution de l'équation [3] est maintenant ramenée à celle de l'équation plus simple

$$\frac{k-r_2t_1}{r_1}=t_2, \quad \text{ou} \quad r_2t_1+r_1t_2=k \qquad [4].$$

Mais remarquons, sans aller plus loin, que les coefficients des diverses inconnues, dans les transformées successives, sont les restes mêmes que l'on aurait trouvés en cherchant le plus grand commun diviseur de a et de b; car nous avons d'abord divisé b par a, puis a par le reste r de cette première division, puis ce reste par celui r_1 de la seconde, et ainsi de suite. Donc, puisque a et b sont supposés premiers entre eux, on parviendra à un reste égal à l'unité, lequel sera le coefficient de l'avant-dernière des indéterminées que l'on aura introduites dans le cours du calcul. Supposons que r_2 soit ce reste égal à l'unité : on tirera alors de la dernière transformée,

$$t_1=k-r_1t_2.$$

En substituant cette valeur de t_1 dans celle de t, puis en remontant ainsi successivement aux valeurs des diverses inconnues, on parviendra à obtenir, pour x et pour y, des valeurs qui seront des *fonctions entières* (18) de l'indéterminée t_2. Ces valeurs contiendront en général un terme en t_2 et un terme indépendant de cette variable, et seront ainsi de la forme

$$y = \beta + Bt_2,\ x = \alpha + At_2.$$

Le problème sera alors complétement résolu, puisque, pour toutes les valeurs entières que l'on donnera à t_2, on trouvera de pareilles valeurs pour x et pour y*.

208. Exemple I. *Résoudre l'équation*

$$177x - 128y = 95$$

en nombres entiers.

128 n'ayant pas d'autre facteur premier que 2, on voit que les trois nombres 177, 128 et 95, sont premiers entre eux deux à deux. Cela posé, en appliquant la méthode que nous venons de développer, nous trouverons successivement

$$y = \frac{177x - 95}{128} = x + \frac{49x - 95}{128} = x + t;$$

$$\frac{49x - 95}{128} = t,\quad x = \frac{128t + 95}{49} = 3t + \frac{95 - 19t}{49}.$$

---

* Cette méthode démontre qu'*il suffit que les coefficients* a *et* b *soient premiers entre eux pour que l'équation* ax + by = k *soit soluble en nombres entiers :* elle prouve également que *cette condition est nécessaire.* En effet, si a et b ont un commun diviseur r_n, comme les coefficients des deux inconnues, dans chaque transformée, sont les deux derniers restes obtenus, on arrivera à la transformée

$$r_n t_{n-1} + r_{n-1} t_n = k,$$

d'où l'on tirera

$$t_{n-1} = \frac{k - r_{n-1} t_n}{r_n} = -q_{n+1} t_n + \frac{k}{r_n},$$

en désignant par q_{n+1} le quotient de la division de r_{n-1} par r_n ; puis donc que ce quotient est entier, on voit que l'équation ci-dessus sera absurde, à moins que r_n ne divise k.

Or $\frac{95-19t}{49}=\frac{19(5-t)}{49}$, et comme 19 et 49 sont premiers entre eux, il en résulte que $\frac{95-19t}{49}$ ne sera entier que si $(5-t)$ est divisible par 49. Je pose donc

$$\frac{5-t}{49}=t_1,\quad \text{et nous aurons}\quad x=3t+19t_1.$$

De l'équation

$$\frac{5-t}{49}=t_1,\quad \text{on tire}\quad t=5-49t_1,$$

et par suite

$$x=(5-49t_1)3+19t_1=15-128t_1,$$
$$y=15-128t_1\ +5-49t_1=20-177t_1;$$

de sorte qu'en donnant à t_1 toutes les valeurs entières possibles, on tirera des formules

$$x=15-128t_1\quad \text{et}\quad y=20-177t_1$$

toutes les solutions entières de l'équation proposée. Si, par exemple, on suppose

$t=\ \ 0$, on aura $x=\ \ 15$ et $y=\ \ 20$;
$t=-1$, $x=143$ $y=197$,
etc.

Exemple II. *Soit encore l'équation*

$$177x-128y=228.$$

Je vois à l'inspection de cette équation que 128 et 228 sont divisibles par 4, de sorte qu'en divisant tous les termes par 4 et en posant

$$x=4x',\quad \text{on aura}\quad 177x'-32y=57.$$

De même, 177 et 57 étant divisibles par 3, il viendra, en divisant tous les termes de cette dernière équation par 3, et en posant

$$y=3y',\qquad\qquad 59x'-32y'=19.$$

On appliquera la méthode du n° **207** à cette équation, et on trouvera successivement

$$y' = \frac{59x' - 19}{32} = 2x' - \frac{5x' + 19}{32} = 2x' - t,$$

$$\frac{5x' + 19}{32} = t, \quad x' = \frac{32t - 19}{5} = 6t - 3 + \frac{2t - 4}{5} = 6t - 3 + 2t_1,$$

$$\frac{t - 2}{5} = t_1, \qquad t = 2 + 5t_1;$$

$$x' = 6(2 + 5t_1) - 3 + 2t_1 = 9 + 32t_1; \quad x = 36 + 128t_1;$$

$$y' = 2(9 + 32t_1) - (2 + 5t_1) = 16 + 59t_1; \quad y = 48 + 177t_1.$$

209. Les formules

$$x = \alpha + At_2 \quad \text{et} \quad y = \beta + Bt_2,$$

que nous avons obtenues précédemment (**207**), vont nous conduire à une propriété fort remarquable dont jouissent les valeurs de x et de y qui satisfont à l'équation [1].

Je remarque d'abord qu'on peut faire $t_2 = 0$, dans ces formules, ce qui les réduit à $x = \alpha$ et à $y = \beta$, et qu'ainsi α et β forment une solution de l'équation [1]. Cela posé, si l'on substitue $\alpha + At_2$ et $\beta + Bt_2$ à la place de x et de y, dans cette équation, il viendra

$$(Aa + Bb)t_2 = 0,$$

puisque $a\alpha + b\beta = k$, et comme t_2 n'est pas nul, on devra avoir

$$Aa + Bb = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{A}{B} = -\frac{b}{a}.$$

Or, les deux nombres A et B sont premiers entre eux, car s'ils avaient un facteur commun m, les valeurs générales de x et de y pourraient être mises sous la forme

$$x = \alpha + mA't_2 \quad \text{et} \quad y = \beta + mB't_2;$$

de sorte qu'en attribuant à t_2 la valeur fractionnaire $\frac{1}{m}$, on aurait pour x et pour y des valeurs entières, ce qui est contraire à la condition $\frac{k - r_2t_1}{r_1} = t_2$, par laquelle nous avons déter-

miné t_1 en fonction de t_2. Les fractions égales $\frac{A}{B}$ et $-\frac{b}{a}$ étant irréductibles, il faudra que l'on ait $A = \pm b$ et $B = \mp a$; donc

$$x = \alpha \pm bt_2, \quad y = \mp at_2.$$

Si maintenant on remplace t_2 par tous les nombres entiers 0, 1, 2, 3, 4,.... on trouvera que les valeurs de x et de y forment les deux progressions suivantes :

$$\div \ldots\ \alpha - 2b, \quad \alpha - b, \quad \alpha, \quad \alpha + b, \quad \alpha + 2b, \ldots$$
$$\div \ldots\ \beta + 2a, \quad \beta + a, \quad \beta, \quad \beta - a, \quad \beta - 2a, \ldots$$

Ainsi *les solutions entières de l'équation* $ax + by = k$ *sont les termes correspondants de deux progressions par différence, telles que dans la progression qui détermine les valeurs de* x, *la raison est le coefficient de* y, *pris avec son signe ou avec un signe contraire au sien, et que dans celle qui renferme les valeurs de* y, *la raison est le coefficient de* x, *pris avec un signe contraire ou avec son signe.*

210. On peut démontrer autrement ce théorème important :

Soient, en effet, $x = \alpha$ et $y = \beta$ une solution entière de l'équation

$$ax + by = k :$$

nous aurons donc

$$a\alpha + b\beta = k,$$

d'où, en soustrayant ces deux égalités membre à membre *,

$$a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0,$$

et par suite

$$x - \alpha = -\frac{b(y - \beta)}{a}.$$

Or $x - \alpha$ est un nombre entier, donc $\frac{b(y-\beta)}{a}$ en est aussi un ; mais a est premier avec b, donc a divise $y - \beta$; donc, en repré-

* C'est pour écrire, dans l'équation [1], la condition exprimée dans l'identité $a\alpha + b\beta = k$, que nous avons fait cette soustraction. Le résultat, en effet, est le même que si nous avions remplacé dans [1], k par sa valeur tirée de $a\alpha + b\beta = k$.

sentant par t un nombre entier quelconque positif ou négatif, on aura $y-\beta=at$, et par suite

$$y=\beta+at,\quad x=\alpha-bt \qquad [5].$$

Ces formules ne seraient pas plus générales en y affectant le second terme du double signe $\pm$, puisque t doit recevoir toutes les valeurs entières tant positives que négatives.

211. Il résulte des formules [5] que, si une fois on avait déterminé une solution de l'équation [1], on en aurait immédiatement une infinité d'autres; de sorte que le problème de résoudre une équation à deux inconnues en nombres entiers, est ramené à celui de trouver une solution de cette équation. Nous verrons plus loin (**418**) que l'on peut, à l'aide des fractions continues, obtenir cette solution; mais, en attendant, il faut nous en tenir à la méthode que nous avons développée au n° **207**. Cependant il sera souvent possible de trouver cette solution, en examinant attentivement l'équation proposée. Ainsi, quand on pourra reconnaître que la somme ou la différence de deux multiples des coefficients des inconnues sera un diviseur du terme indépendant, on obtiendra facilement un couple de valeurs entières de x et de y qui vérifient l'équation proposée

$$ax+by=k \qquad [1].$$

En effet, si $am\pm bn$ est un diviseur de k, on aura, en appelant q le quotient de la division de k par $am\pm bn$,

$$amq\pm bnq=k,$$

de sorte qu'en faisant dans [1], $x=mq$ et $y=\pm nq$, cette équation deviendra identique. Donc

$$x=mq+bt \quad \text{et} \quad y=\pm nq-at$$

seront alors les formules générales qui la résolvent.

212. Exemple I. *Résoudre*

$$13x+19y=25.$$

On voit facilement que

$$13.3-19.2=1$$

qui est un diviseur de 25. Je multiplie donc tous les termes de cette égalité par 25, ce qui donne

$$13.3.25-19.2.25=25;$$

ainsi, en posant $x=3.25=75$ et $y=-2.25=-50$, j'aurai satisfait à la proposée. Donc

$$x=75-19t \quad \text{et} \quad y=-50+13t.$$

Exemple II. *Résoudre*

$$39x+29y=650.$$

Je remarque d'abord que 39 et 650 ont le facteur commun 13, de sorte qu'en posant $y=13y'$, je ramènerai cette équation à la suivante (**206**),

$$3x+29y'=50 \qquad [6].$$

Je vois ensuite que

$$-3.9+29=2,$$

qui est un diviseur de 50. En multipliant donc tous les termes de cette égalité par $\frac{50}{2}=25$, il viendra

$$-3.9.25+29.25=50,$$

et par conséquent j'aurai une solution de l'équation [6], en posant $x=-9.25=-225$ et $y'=25$; donc

$$x=-225+29t, \quad y'=25-3t, \quad \text{partant} \quad y=325-39t.$$

On aurait résolu les équations proposées plus simplement en observant que $39-29=10$ est un diviseur de 650.

213. Les formules [5] résolvent l'équation [1] en nombres entiers, mais si l'on ne veut admettre que des valeurs positives pour x et pour y, il faudra rejeter les valeurs de t qui conduiraient à des valeurs négatives de ces inconnues. Comment reconnaître ces valeurs de t qu'il faudra rejeter?

Nous supposerons toujours que a soit positif, ce qui est permis, car si a était négatif, il suffirait de changer les signes de tous les termes de l'équation [1], pour rendre ce coefficient

positif : nous aurons alors deux cas à examiner, selon que b sera positif ou négatif.

Soit $b>0$: pour que les valeurs de x et de y, données par les formules [5], soient positives, il faudra que l'on ait

$$\alpha+bt>0, \quad \text{et} \quad \beta-at>0,$$

d'où l'on tire

$$t>-\frac{\alpha}{b} \quad \text{et} \quad t<\frac{\beta}{a}.$$

On a donc ainsi une limite inférieure et une limite supérieure de t, de sorte qu'en donnant à cette variable toutes les valeurs entières comprises entre ces deux limites, on obtiendra toutes les solutions de l'équation $ax+by=k$, en nombres entiers positifs. On pourra même faire t égal à l'une et à l'autre de ces limites, si x et y peuvent recevoir des valeurs égales à zéro.

Le nombre des solutions entières et positives de l'équation [1] est donc *limité*, et cette équation serait même insoluble, si les limites de t, $-\frac{\alpha}{b}$ et $\frac{\beta}{a}$, étaient comprises entre deux nombres entiers consécutifs.

Ces limites d'ailleurs ne sauraient être contradictoires, car, pour qu'elles le fussent, il faudrait que l'on eût

$$-\frac{\alpha}{b}>\frac{\beta}{a}, \quad \text{d'où} \quad a\alpha+b\beta<0,$$

ce qui ne se peut ; car α et β formant une solution de l'équation [1], on a $a\alpha+b\beta=k$, et k n'est pas négatif, sans quoi la proposée ne pourrait être vérifiée par aucun couple de valeurs positives de x et de y.

214. Dans le cas que nous examinons, on peut déterminer le nombre des solutions qu'admet l'équation proposée. En effet, si l'on appelle A et B les nombres entiers, positifs ou négatifs, qui sont immédiatement moindres que $-\frac{\alpha}{b}$ et que $\frac{\beta}{a}$, les valeurs dont t est susceptible seront

$$A+1, \; A+2, \; A+3, \ldots \; B=A+(B-A).$$

On voit donc que le nombre de ces valeurs est $B-A$.

215. Soit maintenant $b<0$; on devra alors avoir, en mettant le signe de b en évidence,

$$\alpha - bt > 0 \quad \text{et} \quad \beta - at > 0,$$

d'où l'on tire

$$t < \frac{\alpha}{b} \quad \text{et} \quad t < \frac{\beta}{a}.$$

Ainsi, en donnant à t toutes les valeurs entières moindres que la plus petite de ces limites, les valeurs correspondantes de x et de y seront positives, et comme il y a une infinité de nombres qui satisfont à cette condition, il s'ensuit que l'équation [1] admet un nombre *illimité* de solutions en nombres entiers et positifs.

216. Problème I. *Payer* 1000^f *en schellings et en guinées, sachant que le schelling vaut* $1^f,20$ *et que la guinée vaut* $26^f,45$.

Soient x le nombre des guinées et y celui des schellings, on aura, d'après l'énoncé,

$$26,45 . x + 1,20 . y = 1000,$$

ou, en multipliant tous les termes par 100, afin de rendre les coefficients entiers,

$$2645x + 120y = 100000,$$

équation qui se réduit à

$$529x' + 3y = 2500,$$

en posant $x = 8x'$. On tire de là

$$y = \frac{2500 - 529x'}{3} = 833 - 176x' + \frac{1-x'}{3} = 833 - 176x' + t,$$

$$\frac{1-x'}{3} = t,\ x' = 1 - 3t,\ x = 8 - 24t,\ y = 657 + 529\,t.$$

Les valeurs de x et de y devant être positives, on posera

$$1 - 3t > 0, \quad \text{d'où} \quad t < \tfrac{1}{3};$$

$$657 + 529t > 0, \quad \text{d'où} \quad t > -\frac{657}{529};$$

et l'on voit ainsi que t ne peut recevoir que les valeurs 0 et -1,

auxquelles correspondent respectivement $x = 8$, $y = 657$, et $x = 32$, $y = 1186$.

Si l'on admet que, pour payer les 1000f, le débiteur ait la faculté de donner à son créancier des guinées ou des schellings, et que celui-ci puisse rendre des schellings ou des guinées, l'*une* des deux inconnues x et y pourra alors recevoir des valeurs négatives, de sorte que pour les déterminer, dans ce cas, on posera

$$\left.\begin{matrix} 1-3t>0 \\ 657+529t<0 \end{matrix}\right\} \text{ d'où } t<\tfrac{1}{3} \text{ et } t<-\frac{657}{529};$$

$$\left.\begin{matrix} 1-3t<0 \\ 657+529t>0 \end{matrix}\right\} \text{ d'où } t>\tfrac{1}{3} \text{ et } t>-\frac{657}{529}.$$

Ainsi, dans le premier cas, on pourra donner à t toutes les valeurs négatives $-2, -3, -4, \ldots$ et dans le second, on ne devra attribuer à t que les valeurs positives $1, 2, 3, 4, \ldots$ Si, par exemple, on fait $t = -2$, on trouvera $x = 56$, $y = -401$, de sorte qu'on acquittera la dette de 1000f, en donnant 56 guinées qui valent 1481f,20, et en recevant, en retour, 401 schellings qui valent 481f,20.

217. Problème II. *Trouver une somme que l'on puisse payer de 6 manières différentes, avec des guinées et des schellings.*

Soient z cette somme inconnue, x le nombre des guinées et y celui des schellings, que l'on emploiera pour la payer. On aura l'équation

$$26{,}45 \,.\, x + 1{,}20 \,.\, y = z,$$

qui revient à

$$529x + 24y = 20z,$$

ou, en posant $x = 4x'$,

$$529x' + 6y = 5z.$$

On tire de cette équation

$$y = \frac{5z - 529x'}{6} = z - 88x' - \frac{z + x'}{6} = z - 88x' - t,$$

$$\frac{z + x'}{6} = t, \quad x' = 6t - z, \quad y = 89z - 529t.$$

Pour que ces valeurs de x' et de y soient positives, on poser

$$6t - z > 0, \quad \text{d'où} \quad t > \frac{z}{6};$$

$$89z - 529t > 0, \quad \text{d'où} \quad t < \frac{89z}{529}.$$

Cela posé, si l'on représente par A le nombre entier immédiatement moindre que $\frac{z}{6}$, il faudra que le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{89z}{529}$ soit $A+6$, puisque l'on veut qu'il y ait 6 couples de valeurs de x' et de y (**214**). Donc, en appelant α et β deux quantités positives, moindres que l'unité, on aura

$$\frac{z}{6} = A + \alpha \quad \text{et} \quad \frac{89z}{529} = A + 6 + \beta,$$

partant

$$\frac{89z}{529} - \frac{z}{6} = 6 + \beta - \alpha;$$

donc, si $\beta > \alpha$, 6 sera le plus grand nombre entier contenu dans la différence des deux limites de t; mais si $\beta < \alpha$, 5 sera ce plus grand nombre entier, de sorte que, pour avoir certainement les 6 solutions demandées, il faudra égaler cette différence successivement à 6 et à 7, ce qui donnera

$$\frac{89z}{529} - \frac{z}{6} = 6, \quad \text{d'où} \quad z = 3808;$$

$$\frac{89z}{529} - \frac{z}{6} = 7, \quad \text{d'où} \quad z = 4443.$$

Pour savoir laquelle de ces valeurs de z il faut prendre, nous allons calculer les limites correspondantes de t. Nous trouverons ainsi

$$z = 3808, \quad t > 634, \quad t < 641.$$

Or, il est évident que t peut admettre ainsi les 6 valeurs 635, 636, 637, 638, 639 et 640, et que 3808f est par conséquent la somme demandée.

§ II. ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES.

218. Nous distinguerons deux cas principaux, suivant que le nombre des inconnues surpassera celui des équations d'*une* ou de *plusieurs unités.*

1er CAS. Considérons d'abord deux équations à trois inconnues

$$ax+by+cz=k,$$
$$a'x+b'y+c'z=k'.$$

Il est clair que ces équations ne seront solubles en nombres entiers que si a, b, c sont premiers entre eux, ainsi que a', b', c', car nous les supposons débarrassées de tout facteur commun à tous leurs termes. D'ailleurs, si deux des coefficients ont un diviseur commun avec le second membre, on le supprimera comme nous l'avons indiqué dans ce qui précède (**206**), et on transformera ainsi les équations proposées en d'autres plus simples. Cela posé, éliminons l'une des inconnues, z par exemple, entre ces équations, et nous pourrons leur substituer le système formé de l'une d'elles

$$ax+by+cz=k \qquad [7],$$

et de l'équation résultante

$$Ax+By=K \qquad [8];$$

de sorte qu'en résolvant cette dernière, on obtiendra tous les couples et les seuls couples de valeurs de x et de y qui, conjointement avec certaines valeurs de z, pourront satisfaire aux équations proposées. En conséquence, pour déterminer ces valeurs de z, on substituera, dans l'équation [7], les valeurs

$$x=\alpha+Bt, \quad y=\beta-At,$$

que l'on aura tirées de l'équation [8], et il ne s'agira plus que d'assigner toutes les valeurs entières de z et de t qui pourront vérifier l'équation résultante

$$Dt+cz=E.$$

On résoudra donc cette dernière, ce qui conduira à des formules

$$z=\gamma+\mathrm{D}t', \quad t=\delta-ct',$$

qui donneront z et t en fonction entière de t'; de sorte qu'en substituant à t cette valeur, dans les formules trouvées précédemment pour x et pour y, nos trois inconnues seront exprimées en fonction entière de la même indéterminée t'. Par conséquent, il suffira d'assigner à t' toutes les valeurs entières possibles, pour obtenir toutes les solutions des équations proposées.

Nous allons effectuer ces calculs, en supposant que les coefficients de l'inconnue z qu'on élimine ne soient pas premiers entre eux. Si nous appelons m leur plus grand commun diviseur, les équations à résoudre seront ainsi représentées par

$$ax+by+mcz=k,$$
$$a'x+b'y+mc'z=k'.$$

On en tirera (156)

$$(ac'-ca')x+(bc'-cb')y=kc'-ck' \qquad [9].$$

Soient $x=\alpha$ et $y=\beta$ une solution de cette équation : on aura donc

$$x=\alpha+(bc'-cb')t, \quad y=\beta-(ac'-ca')t.$$

Je substitue ces valeurs dans la première des proposées, et il viendra, toutes réductions faites,

$$c(ba'-ab')t+mcz=k-a\alpha-b\beta \qquad [10].$$

Or, je dis que le second membre de cette équation est divisible par c. En effet, $x=\alpha$ et $y=\beta$, formant une solution de l'équation [9], on a

$$(ac'-ca')\alpha+(bc'-cb')\beta=kc'-ck',$$

d'où, en mettant c et c' en facteurs communs des quantités qu'ils multiplient,

$$c(k'-a'\alpha-b'\beta)=c'(k-a\alpha-b\beta).$$

Mais c est, par hypothèse, premier avec c', donc il divise

$k-a\alpha-b\beta$; donc, en appelant q le quotient obtenu en divisant cette quantité par c, l'équation [10] se réduira à

$$(ba'-ab')\,t+mz=q \qquad [11],$$

équation qu'il s'agira maintenant de résoudre. Or, si les coefficients de l'inconnue z que nous avons éliminée eussent été premiers entre eux, on aurait eu $m=1$, et l'équation précédente étant alors soluble en nombres entiers, on en aurait tiré immédiatement la valeur de z en fonction entière de t, et le problème se serait trouvé résolu, puisque nous aurions eu ainsi nos trois inconnues x, y, z exprimées en fonction entière de la même indéterminée t. On voit donc qu'*il sera bon d'éliminer de préférence l'inconnue dont les coefficients seront premiers entre eux;* car, indépendamment de la simplicité des calculs, on est certain que les équations proposées ont des solutions entières, si l'équation [9] jouit elle-même de cette propriété.

219. Exemple I. *Résoudre les équations*

$$3x+5y+6z=104,$$
$$9x+3y+8z=164,$$

en nombres entiers positifs.

Les coefficients de y étant premiers entre eux, j'élimine cette inconnue, ce qui donne l'équation

$$36x+22z=508,$$

que l'on ramènera facilement à

$$9x+11z'=127,$$

en posant $z=2z'$. On tire de cette équation

$$x=\frac{127-11z'}{9}=-z'+15-2t,\quad \frac{4+z'}{9}=t,\quad z'=9t-4,$$
$$z=18t-8,\quad x=19-11t.$$

Je substitue ces valeurs dans la première des proposées, et il vient

$$75t+5y=95,\quad y=19-15t.$$

Ainsi les formules générales sont

$$x=19-11t,\quad y=19-15t,\quad z=18t-8.$$

Pour que les valeurs de x, y, z soient positives, on posera

$$19-11t>0,\quad 19-15t>0,\quad 18t-8>0,$$

d'où l'on tire

$$t<\tfrac{19}{11}<2,\quad t<\tfrac{19}{15}<2,\quad t>\tfrac{8}{18}>0;$$

donc la seule valeur entière que t puisse recevoir est $t=1$, à laquelle correspondent

$$x=8,\quad y=4,\quad z=10.$$

Exemple II. *Résoudre les équations*

$$6x+9y+14z=77,\quad 4x+15y+7z=51,$$

en nombres entiers positifs.

Ici les coefficients de chaque inconnue ont un facteur commun, ainsi il faut éliminer celle des trois inconnues dont le rapport des coefficients est le plus simple. J'élimine donc z, ce qui donne

$$2x+21y=25.$$

On reconnaît immédiatement que cette équation est vérifiée par $x=2$ et $y=1$: donc

$$x=2+21t,\quad y=1-2t.$$

Je substitue ces valeurs de x et de y dans la première équation, et il vient

$$54t+7z=28.$$

On tire de cette équation

$$z=4-54t',$$

en posant $t=7t'$, et par suite

$$x=2+147t',\quad y=1-14t'.$$

On verra facilement que t' ne peut avoir que la seule valeur zéro, ce qui donne

$$x=2,\quad y=1,\quad z=4.$$

220. Il est facile d'étendre la méthode que nous venons de

développer (218), pour deux équations à deux inconnues, à la résolution de m équations entre $(m+1)$ inconnues. En effet, on éliminera une de ces inconnues successivement entre l'une des équations proposées et chacune des autres, ce qui fournira $(m-1)$ équations entre les m autres inconnues. On éliminera de même une de ces m inconnues entre l'une de ces équations et chacune des $(m-2)$ autres, et on obtiendra par là $(m-2)$ équations entre les $(m-1)$ autres inconnues, et, en continuant ainsi, on parviendra à trois équations à quatre inconnues, puis à deux équations à trois inconnues, et enfin à une équation à deux inconnues. On pourra remplacer, de cette manière, le système des équations proposées par le système formé de l'une d'elles; d'une des équations à m inconnues; d'une des équations à $(m-1)$ inconnues;.... d'une équation à trois inconnues et de l'équation à deux inconnues (159). On tirera de cette dernière les valeurs des deux inconnues x et y qu'elle renferme, en fonction entière d'une inconnue auxiliaire t; puis on substituera ces valeurs dans l'équation à trois inconnues, ce qui donnera une équation entre les deux inconnues z et t; on la résoudra, et, en substituant la valeur ainsi trouvée pour t, dans celles de x et de y, on aura des formules qui donneront x, y, et z en fonction entière d'une indéterminée t_1. On substituera ces valeurs de x, y, z dans l'équation à quatre inconnues, et on trouvera par là une équation entre les deux inconnues u et t_1, on la résoudra, et, en substituant la valeur ainsi trouvée pour t_1, dans celles de x, de y et de z, les quatre inconnues x, y, z, u seront exprimées en fonction entière d'une même indéterminée t_2. En continuant ainsi de remonter successivement aux équations précédentes, on parviendra à des formules qui donneront les valeurs de toutes les inconnues en fonction entière d'une même indéterminée, et la question sera résolue.

221. Problème. *Un avare possède dans son coffre-fort plusieurs sacs de* 1000^f *chacun. En les comptant un jour* 7 *à* 7, *il en trouva* 2 *de reste; un autre jour, il les compta* 10 *à* 10, *et il lui*

en resta 7. Une troisième fois, il les compta 11 à 11, et il y en eut 5 de reste; et enfin en les comptant une quatrième fois 17 à 17, il en resta 9. Ne pourrait-on pas découvrir combien cet avare avait de sacs d'argent, sachant d'ailleurs qu'il en avait plus de 100 et moins de 300?

1re SOLUTION. Si l'on désigne par x le nombre inconnu des sacs, il résulte des conditions du problème que $\frac{x-2}{7}$, $\frac{x-7}{10}$, $\frac{x-5}{11}$ et $\frac{x-9}{17}$ doivent être des nombres entiers positifs; si donc on désigne ces nombres respectivement par y, z, u et v, les équations du problème seront

$$x-7y=2,\quad x-10z=7,\quad x-11u=5,\quad x-17v=9.$$

J'élimine x entre toutes ces équations, et je pourrai remplacer de cette manière leur système par le suivant :

$$x-7y=2,\ 7y-10z=5,\ 10z-11u=-2,\ 11u-17v=4.$$

On tire de la dernière

$$v=3+11t_1,\quad u=5+17t_1.$$

Je substitue cette valeur de u dans l'équation $10z-11u=-2$, et il vient

$$10z-187t_1=53,\quad \text{d'où}\quad z=24-187t_2.$$

En remplaçant z par cette valeur dans $7y-10z=5$, ou mieux dans l'équation plus simple $7y'-2z=1$ que l'on en déduit, en posant $y=5y'$, on trouvera

$$7y'+374t_2=49,\quad \text{d'où}\quad y'=7-374t_3,$$

en posant $t_2=7t_3$. On aura donc

$$y=35-1870t_3,\quad \text{et partant}\quad x=247-13090t_3;$$

de sorte que la valeur de x devant être comprise entre 100 et 300, on devra faire $t_3=0$, ce qui donnera $x=247$.

Cette solution est un exemple de la méthode que nous avons exposée plus haut (**220**); mais on peut encore résoudre le problème de la manière suivante, qui est très-simple.

2° Solution. Puisque le nombre demandé doit donner 9 pour reste, quand on le divise par 17, il est de la forme

$$x = 17y + 9.$$

Mais en divisant ce même nombre par 11, on doit trouver 5 pour reste, donc

$$\frac{17y + 9 - 5}{11} = \frac{17y + 4}{11}$$

doit être un nombre entier. J'effectue la division de 17 par 11, et il vient

$$\frac{17y + 4}{11} = y + \frac{6y + 4}{11} = y + \frac{2(3y + 2)}{11}:$$

ainsi, pour que $\frac{17y+4}{11}$ soit entier, il faut et il suffit que $\frac{3y+2}{11}$ soit un nombre entier t; donc

$$3y + 2 = 11t,$$

équation à laquelle on satisfait en posant $y = 3$ et $t = 1$. Ainsi la formule générale des valeurs de y est

$$y = 3 + 11t_1, \quad \text{et par suite} \quad x = 60 + 187t_1.$$

Telle est la formule de tous les nombres qui, divisés par 17 et par 11, donnent respectivement pour restes 9 et 5.

Cela posé, on doit trouver le reste 7, en divisant x par 10; donc

$$\frac{187t_1 + 60 - 7}{10} = \frac{187t_1 + 53}{10}$$

doit être un nombre entier; j'effectue la division du numérateur par le dénominateur et je trouve

$$\frac{187t_1 + 53}{10} = 19t_1 + 5 - \frac{3(t_1 - 1)}{10};$$

ainsi, on doit avoir

$$\frac{t_1 - 1}{10} = t_2, \quad \text{d'où} \quad t_1 = 10t_2 + 1,$$

et par conséquent

$$x = 247 + 1870t_2.$$

Telle est la formule de tous les nombres qui donnent pour restes 9, 5 et 7, quand on les divise respectivement par 17, 11 et 10. Il s'agit encore d'exprimer que le reste de la division de x par 7 est 2, c'est-à-dire que

$$\frac{1870t_1+247-2}{7}=\frac{1870t_1+245}{7}=267t_1+35+\frac{t_1}{7}$$

est un nombre entier. Il faut et il suffit, pour cela, que

$$t_1=7t_2 \quad \text{ce qui donne} \quad x=247+13090t_2.$$

222. 2° Cas. Ici le nombre des inconnues surpasse celui des équations de plus d'une unité, et on dit alors que *les équations sont plus qu'indéterminées.*

Soit d'abord l'équation à trois inconnues

$$ax+by+cz=k,$$

supposée simplifiée autant que possible, de sorte que les trois coefficients a, b, c sont premiers entre eux, sans quoi notre équation n'admettrait aucune solution en nombres entiers (**205**). On examinera si deux de ces trois coefficients sont premiers entre eux, et on fera passer dans le second membre celui des trois qui aurait un facteur commun avec l'un des deux autres; si donc a et b sont premiers entre eux, il viendra

$$ax+by=k-cz=k',$$

en posant, pour abréger, $k-cz=k'$. On résoudra l'équation

$$ax+by=k',$$

ce qui donnera $\qquad x=\alpha+bt, \quad y=\beta-at,$

α et β étant des fonctions de k'. En y remplaçant k' par sa valeur $k-cz$, on trouvera des expressions de la forme

$$x=A+A'z+bt, \quad y=B+B'z-at,$$

et à toutes les valeurs entières de z et de t correspondront de pareilles valeurs pour x et pour y.

Mais, si les coefficients a, b, c ne sont pas premiers entre eux deux à deux, comment faire? On transposera encore une des

inconnues, z par exemple, dans le second membre, ce qui donnera une équation de la forme

$$max + mby = k - cz,$$

et on voit ainsi que $k - cz$ doit être un multiple de m; on posera donc

$$k - cz = mt,$$

ce qui donnera $\quad ax + by = t,$

et, en résolvant cette dernière équation, on trouvera

$$x = \alpha + bt', \quad y = \beta - at'.$$

α et β sont des fonctions de t, indéterminée dont les valeurs entières doivent, conjointement avec de pareilles valeurs de z, vérifier l'équation

$$k - cz = mt.$$

On résoudra donc cette équation, et on en tirera

$$z = \gamma + mt'', \quad t = \delta - ct'';$$

de sorte qu'en substituant cette valeur de t dans celles de x et de y, on aura, pour valeurs des trois inconnues x, y, z, des expressions de la forme

$$x = \mathrm{A} + \mathrm{A}'t'' + bt', \quad y = \mathrm{B} + \mathrm{B}'t'' - at', \quad z = \gamma + mt''.$$

Ainsi, quand les coefficients des deux inconnues qu'on laisse dans le premier membre ne sont pas premiers entre eux, il y a une équation de plus à résoudre que dans le cas contraire.

223. Exemple. *Résoudre l'équation.*

$$6x + 22y + 15z = 77$$

en nombres entiers positifs.

Je transpose le terme $6x$, ce qui donne

$$22y + 15z = 77 - 6x = k,$$

et on voit immédiatement que l'on aura une solution de cette équation en posant $y = -2k$ et $z = +3k$; de sorte que

$$y = -2k + 15t, \quad z = 3k - 22t,$$

ou, en remplaçant k par sa valeur,

$$y = -154 + 12x + 15t, \quad z = 231 - 18x - 22t.$$

Pour que ces valeurs de y et de z soient positives, on posera

$$-154+12x+15t>0,\quad 231-18x-22t>0;$$

puis, on tirera de ces inégalités

$$t>\frac{154-12x}{15},\quad t<\frac{231-18x}{22},$$

ce qui détermine une limite inférieure et une limite supérieure de t. Pour qu'elles ne soient pas contradictoires, il faudra que l'on ait

$$\frac{154-12x}{15}<\frac{231-18x}{22},\quad \text{d'où}\quad x<\frac{77}{6}<13.$$

On fera donc successivement $x=1,=2,=3,...=12$ dans les limites de t, et on trouvera pour $x=1$,

$$t>\frac{142}{15}>9\quad \text{et}\quad t<\frac{213}{22}<10,$$

ainsi ces limites sont contradictoires, de sorte qu'il faut rejeter la valeur $x=1$. On trouvera de même que la valeur $x=3$ doit être seule admise. Elle donne

$$t>\frac{118}{15}>7\quad \text{et}\quad t<\frac{177}{22}<9,\quad \text{donc}\quad t=8;$$

par suite

$$y=-154+36+120=2,\quad z=231-54-176=1.$$

224. Si l'on avait plusieurs équations, on ne conserverait, dans leurs premiers membres, qu'un nombre d'inconnues supérieur d'une unité à celui des équations, et on transposerait toutes les autres dans les seconds membres. De cette manière on serait ramené à résoudre un système d'équations qui seraient simplement indéterminées.

225. Exemple. *Résoudre les équations*

$$5x+7y-4z+3u=12,\quad 8x+2y+3z+4u=36,$$

en nombres entiers positifs.

Je remarque qu'en posant $z=2z'$, je pourrai diviser tous les

termes de la deuxième par 2, de sorte que nos deux équations deviendront

$$5x+7y-8z'+3u=12,\quad 4x+y+3z'+2u=18.$$

J'élimine y entre ces deux équations, et je substituerai ainsi à leur système le suivant

$$4x+y+3z'+2u=18,\quad 23x+11u=114-29z'=k.$$

On satisfait évidemment à cette dernière équation, en posant $x=k$, et $u=-2k$; donc

$$x=k-11t=114-29z'-11t,$$
$$u=-2k+23t=-228+58z'+23t.$$

Je substitue ces valeurs de x et de u dans l'équation

$$4x+y+3z'+2u=18,$$

ce qui donnera $\quad y=18-3z'-2t.$

Pour n'avoir que des valeurs positives, on posera

$$114-29z'-11t>0,\quad -228+58z'+23t>0,\quad 18-3z'-2t>0,$$

inégalités d'où l'on tire

$$t<\frac{114-29z'}{11},\quad t>\frac{2(114-29z')}{23},\quad t<\frac{18-3z'}{2}.$$

Pour que ces inégalités soient compatibles, il faudra que l'on ait

$$\frac{2(114-29z')}{23}<\frac{114-29z'}{11}\quad \text{et}\quad \frac{2(114-29z')}{23}<\frac{18-3z'}{2}.$$

On déduit de ces inégalités

$$z'<\tfrac{114}{29}<4\quad \text{et}\quad z'>\tfrac{42}{47}.$$

Ainsi z' ne peut recevoir que les valeurs 1, 2 et 3. En substituant successivement ces valeurs dans les limites de t, on trouvera que ces limites sont contradictoires pour $z'=1$ et pour $z'=3$, et que, pour $z'=2$, on doit avoir $t<6$ et $t>4$; donc $t=5$, et par suite

$$x=114-58-55=1,\quad y=18-6-10=2,$$
$$u=-228+116+115=3,\quad z=4.$$

C'est là la seule solution des équations proposées.

CHAPITRE VIII.

DES ÉQUATIONS DU DEUXIÈME DEGRÉ.

§ I. DES ÉQUATIONS A UNE SEULE INCONNUE.

226. Une équation du deuxième degré à une seule inconnue peut renfermer trois sortes de termes; des termes contenant le carré de l'inconnue, des termes renfermant la première puissance de l'inconnue, et des termes indépendants de cette inconnue. Lorsque tous ces termes entrent dans l'équation, on dit qu'elle est *complète*, et alors on peut la réduire à la forme

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad [1].$$

Il suffit, en effet, pour cela, de transposer tous les termes dans le premier membre, après avoir fait évanouir les dénominateurs, et de l'ordonner ensuite par rapport aux puissances décroissantes de x.

Mais on conçoit que l'équation peut ne contenir ou aucun terme indépendant de l'inconnue, ou aucun terme dans lequel cette inconnue se trouve à la première puissance. Dans le premier cas, on a $c = 0$, et dans le deuxième $b = 0$. L'équation se réduit alors à l'une ou à l'autre des deux formes

$$ax^2 + bx = 0,$$

$$ax^2 + \quad c = 0,$$

et on dit qu'elle est *incomplète*. La résolution de ces deux dernières équations étant évidemment un cas particulier de celle de l'équation générale [1], nous allons d'abord nous occuper de celle-ci.

227. En divisant tous les termes de l'équation [1] par le

coefficient a de x^2, et posant, pour abréger, $\frac{b}{a}=p, \frac{c}{a}=q$, il viendra

$$x^2+px+q=0 \qquad [2].$$

Il s'agit donc de résoudre cette équation. La première chose qui se présente à l'esprit, pour y parvenir, c'est de transposer le terme $+q$ dans le deuxième membre (**127**); et on trouvera ainsi

$$x^2+px=-q.$$

Maintenant il est clair que, si, par l'addition d'une quantité connue aux deux membres de cette équation, on pouvait faire en sorte que le premier devînt le carré d'un binome, en extrayant la racine carrée du deuxième membre, on obtiendrait la valeur de ce binome, et l'équation ainsi formée n'étant que du premier degré, serait alors facile à résoudre.

Or, on sait que le carré d'un binome se compose de trois parties, savoir : du carré du premier terme, du double produit du premier terme par le deuxième, et du carré du deuxième terme (**51**); si donc on regarde x^2 et px comme les deux premiers termes du carré d'un binome, le premier terme de ce binome sera x, et le deuxième sera $\frac{px}{2x}=\frac{p}{2}$. Donc, si nous ajoutons aux deux membres de l'équation

$$x^2+px=-q,$$

le carré $\frac{p^2}{4}$ de ce deuxième terme $\frac{p}{2}$, le premier membre deviendra le carré du binome $\left(x+\frac{p}{2}\right)$, et nous aurons en conséquence

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q.$$

Ainsi $\left(\frac{p^2}{4}-q\right)$ est le carré de la quantité $\left(x+\frac{p}{2}\right)$; donc en extrayant la racine carrée de $\left(\frac{p^2}{4}-q\right)$, on obtiendra la valeur

de cette quantité $\left(x+\frac{p}{2}\right)$. Nous aurons donc (195)

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

équation d'où l'on tire

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \qquad [3].$$

On a ainsi deux nombres qui, substitués dans l'équation [2], y satisferont. Ces nombres se nomment les *racines* de cette équation *.

228. Ainsi, *l'équation générale du deuxième degré a deux racines*. Or, je dis qu'*elle n'en a pas davantage*. Désignons, en effet, une de ces racines par x', son premier membre sera divisible par $x-x'$ (71, 1°), et le quotient de cette division sera un binome du premier degré, que nous pourrons représenter par $x-x''$, de sorte qu'on aura

$$x^2+px+q=(x-x')(x-x'').$$

On voit que x'' est aussi une racine de l'équation [2], puisque,

* On peut observer que x^2 n'étant pas plutôt le carré de $+x$ que celui de $-x$, x^2 et $+px$ sont aussi bien les deux premiers termes du carré du binome $\left(-x-\frac{p}{2}\right)$ que du carré du binome $x+\frac{p}{2}$; de sorte que, au lieu d'écrire $x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, on devra écrire

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \quad \text{et} \quad -x-\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Or, en changeant les signes de tous les termes de cette dernière équation, elle devient la précédente. Donc il était inutile de poser cette dernière équation.

Remarquons encore qu'en extrayant la racine carrée des deux membres de l'équation $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q$, on trouve $\pm\left(x+\frac{p}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, qui revient, comme nous venons de le voir, à $x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$. Donc *il est permis d'extraire la racine carrée des deux membres d'une équation; mais il sera inutile d'affecter les deux membres du double signe* $\pm$.

en faisant $x = x''$, le produit $(x-x')(x-x'')$ devient nul. Cela posé, supposons que x''' soit une troisième racine; le trinome x^2+px+q sera divisible par $x-x'''$, et ce facteur devra en conséquence diviser $x-x'$ ou $x-x''$ (118), ce qui est impossible, puisque x''' est une quantité différente de x' et de x''. Donc cette équation n'a que les deux racines déterminées par la formule [3].

229. En comparant la formule [3] à l'équation [2], on en tire cette règle générale : *L'inconnue d'une équation du deuxième degré, ramenée à la forme* $x^2+px\mp q=0$, *est égale à la moitié du coefficient du deuxième terme pris avec un signe contraire, plus ou moins la racine carrée du résultat que l'on obtient en retranchant du carré de cette moitié le terme tout connu.*

230. Exemple. Résoudre l'équation

$$\frac{5x^2}{8}-\frac{3x}{5}=\frac{x^2}{8}-\frac{x}{6}+\frac{1}{5}.$$

En faisant évanouir les dénominateurs et transposant ensuite, on trouvera

$$60x^2-52x-24=0,$$

ou, en divisant tous les termes par 4,

$$15x^2-13x-6=0.$$

Je dégage maintenant x^2 de son coefficient, ce qui donne

$$x^2-\frac{13}{15}x-\frac{2}{5}=0,$$

puis j'applique la règle, et il vient

$$x=\frac{13}{30}\pm\sqrt{\frac{169}{900}+\frac{2}{5}}=\frac{13}{30}\pm\sqrt{\frac{529}{900}}=\frac{13}{30}\pm\frac{23}{30};$$

ainsi les deux racines demandées sont

$$x'=\frac{13}{30}+\frac{23}{30}=\frac{36}{30}=\frac{6}{5} \quad \text{et} \quad x''=\frac{13}{30}-\frac{23}{30}=-\frac{10}{30}=-\frac{1}{3},$$

comme il est facile de le vérifier, en substituant ces nombres, au lieu de x, dans l'équation proposée.

231. Si dans la formule [3] on remplace p et q par leurs valeurs respectives $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$, il viendra

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}.$$

En réduisant au même dénominateur les deux termes de la quantité soumise au radical (82), puis extrayant la racine carrée du dénominateur $4a^2$, on trouvera enfin

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad [4].$$

La comparaison de cette formule avec l'équation [1] nous montre que l'*inconnue d'une équation du deuxième degré, ramenée à la forme* $ax^2+bx+c=0$, *est égale au coefficient du second terme pris avec un signe contraire, plus ou moins la racine carrée du résultat qu'on obtient en retranchant du carré de ce coefficient le quadruple produit des coefficients des termes extrêmes, le tout divisé par le double du coefficient du premier terme.*

232. Si l'on applique cette règle à l'équation

$$ax^2+2bx+c=0,$$

il viendra

$$x=\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2a}.$$

Mais $\sqrt{4b^2-4ac}=\sqrt{4(b^2-ac)}=2.\sqrt{b^2-ac}$; donc en substituant, puis divisant tous les termes par 2, on aura enfin

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}.$$

Ainsi *lorsque le coefficient du deuxième terme d'une équation du second degré, ramenée à la forme* $ax^2+bx+c=0$, *est* PAIR, *l'inconnue est égale à la moitié du coefficient du deuxième terme pris en signe contraire, plus ou moins la racine carrée du résultat que l'on obtient en retranchant du carré de cette moitié*

le produit des coefficients des termes extrêmes, le tout divisé par le coefficient du premier terme.

La première de ces trois règles est d'une application moins facile que les deux autres.

233. Exemple. *Résoudre l'équation*

$$\frac{8}{a^2}-\frac{4x}{b}+\frac{3}{b^2}=\frac{14}{ab}-\frac{6x}{a}-x^2.$$

On la transformera d'abord dans la suivante

$$a^2b^2x^2+2ab(3b-2a)x+(3a^2-14ab+8b^2)=0.$$

En appliquant ensuite à cette équation la règle du n° **232**, il viendra

$$x=\frac{ab(2a-3b)\pm\sqrt{a^2b^2(4a^2-12ab+9b^2)-a^2b^2(3a^2-14ab+8b^2)}}{a^2b^2},$$

ou, en réduisant,

$$x=\frac{ab\left\{2a-3b\pm\sqrt{a^2+2ab+b^2}\right\}}{a^2b^2}=\frac{2a-3b\pm(a+b)}{ab}.$$

Ainsi les deux racines demandées sont

$$\frac{2a-3b+a+b}{ab}=\frac{3a-2b}{ab},\quad \frac{2a-3b-a-b}{ab}=\frac{a-4b}{ab}.$$

Si l'on applique la règle du n° **231** à l'équation

$$15x^2-13x-6=0$$

que nous avons résolue précédemment, on trouvera

$$x=\frac{13\pm\sqrt{169+360}}{30}=\frac{13\pm\sqrt{529}}{30}=\frac{13\pm23}{30},$$

et on voit ainsi que les calculs exigés par cette méthode sont plus simples que ceux auxquels conduit la première.

234. Discutons maintenant la formule [4]. Il y a trois cas principaux à considérer, selon que la quantité b^2-4ac, soumise au radical, sera positive, nulle ou négative.

1er Cas. Supposons d'abord $b^2-4ac>0$. Si cette quantité est un carré parfait, sa racine carrée sera commensurable, et les deux valeurs de x le seront aussi ; mais elles seront incommensurables si b^2-4ac n'est pas un carré parfait ; de sorte

que la question qui aura conduit à l'équation [1] n'aura pas de solution numérique *exacte*. Toutefois on pourra toujours trouver deux nombres qui différeront d'aussi peu que l'on voudra des véritables valeurs de x (*Arith.*, **202**).

Maintenant, *quels seront les signes de ces valeurs de* x? Il est clair que nous pourrons toujours supposer a positif; car si [illegible] précédé du signe —, on lui ferait acquérir le signe + en changeant les signes de tous les termes de l'équation [1]. Les signes des valeurs de x données par la formule [4], dépendront donc uniquement de celui du numérateur de cette formule. Quant aux coefficients b et c, ils ont des signes semblables ou différents, ce qui donne lieu aux quatre combinaisons suivantes :

$$b > 0, \quad c > 0;$$
$$b < 0, \quad c > 0;$$
$$b > 0, \quad c < 0;$$
$$b < 0, \quad c < 0.$$

Dans le premier cas, le terme $-b$ est négatif; mais $4ac$ étant positif, $b^2 - 4ac < b^2$ et par conséquent $\sqrt{b^2 - 4ac}$ est $< b$, donc $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$ est négatif; donc la première valeur de x est négative; il est évident que la deuxième l'est aussi, puisqu'elle est la somme de deux quantités négatives; ainsi les deux racines sont négatives. On conçoit, en effet, que les trois coefficients étant positifs, aucune valeur positive de x ne saurait satisfaire à l'équation [1].

Dans le deuxième cas, où $b < 0$ et $c > 0$, le terme $-b$ est positif, et par conséquent la quantité $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$ est positive, donc la première valeur de x est positive; la deuxième l'est aussi, car ici, comme tout à l'heure, $\sqrt{b^2 - 4ac} < b$; ainsi les deux racines sont positives. On conçoit, en effet, que, dans l'hypothèse actuelle, aucune valeur négative donnée à x ne pourrait vérifier l'équation [1]; car, par la substitution de cette valeur, le terme bx devient positif et les termes ax^2 et c conservent le signe +.

En raisonnant de la même manière, on verra que, dans les

deux autres cas, les racines sont de signes contraires ; que, dans le premier, la racine négative est la plus grande en valeur absolue, et que le contraire a lieu, dans le deuxième. On peut donc former le tableau suivant :

$$\begin{array}{llllll} a>0, & b>0, & c>0, & x'<0, & x''<0; \\ & b<0, & c>0, & x'>0, & x''>0; \\ & b>0, & c<0, & x'>0, & x''<0; \\ & b<0, & c<0, & x'>0, & x''<0. \end{array}$$

235. Lorsque, dans un polynome, deux termes consécutifs ont les mêmes signes, on dit qu'ils forment une *permanence*, et qu'ils présentent une *variation*, quand ils sont affectés de signes contraires.

Cela posé, il résulte du tableau ci-dessus que *lorsque* b^2-4ac SERA POSITIF, *l'équation* COMPLÈTE *du deuxième degré aura autant de racines positives que son premier membre a de variations, et autant de racines négatives qu'il a de permanences.* Cette règle est fort commode, puisqu'elle offre le moyen de reconnaître les signes des racines de l'équation proposée, à l'inspection seule de cette équation. Ainsi, comme dans l'équation $15x^2-13x-6=0$, la condition $b^2-4ac>0$ est nécessairement remplie, puisque son dernier terme est négatif, on voit immédiatement qu'elle a une racine positive et une racine négative.

236. 2e CAS. Soit $b^2-4ac=0$, alors les deux valeurs de x se réduisent toutes deux à

$$x=-\frac{b}{2a},$$

ce que l'on énonce en disant que *les deux racines de l'équation* [1] *sont égales*, de sorte que cette équation a $-\frac{b}{2a}$ pour seule racine. Pour voir à quoi tient ce résultat singulier, introduisons la condition $b^2-4ac=0$ dans la proposée. On en tire $c=\frac{b^2}{4a}$ et, en substituant cette valeur de c dans [1], il viendra

$$ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}=0,$$

mais il est facile de voir que le premier membre de cette équation est le carré de $\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)$, de sorte que la proposée revient à

$$\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2=0,$$

et alors il est évident qu'elle ne peut être satisfaite qu'en posant

$$x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}=0, \quad \text{d'où} \quad x=-\frac{b}{2a}.$$

237. On voit par là, que la condition nécessaire et suffisante pour que le trinome ax^2+bx+c soit un carré parfait, est $b^2-4ac=0$; car, si ce trinome est un carré parfait, les racines de l'équation [1] sont égales, ce qui exige que le terme affecté du double signe dans la formule [4] soit nul, c'est-à-dire que $b^2-4ac=0$. Ainsi, *pour qu'un trinome du second degré soit un carré parfait, il faut et il suffit que le carré du coefficient du deuxième terme diminué du quadruple produit des coefficients des termes extrêmes soit égal à zéro.*

238. 3ᵉ Cas. Soit $b^2-4ac<0$. On est alors conduit à extraire la racine carrée d'une quantité négative. Mais toute quantité est nécessairement positive ou négative, et, dans ces deux cas, son carré est positif; donc les racines carrées des quantités négatives n'existent pas, et sont en conséquence des *expressions imaginaires.* Par opposition, on dit que les racines carrées des quantités positives sont *réelles;* ainsi, *lorsque* $b^2-4ac>0$ *ou* $=0$, *les valeurs données par la formule* [4] *sont réelles, et elles sont imaginaires quand* $b^2-4ac<0$.

Si la formule [4] *est applicable à ce dernier cas, l'équation* [1] *doit alors exprimer une absurdité*, puisque, pour trouver une quantité qui y satisfasse, il faudrait exécuter une opération impossible. Examinons donc si cette équation est effectivement absurde. Pour cela, je mets a en facteur commun de tous ses termes, ce qui donne

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0;$$

puis, en raisonnant comme au n° **227**, on verra facilement que x^2 et $+\frac{b}{a}x$ sont les deux premiers termes du carré du binome $x+\frac{b}{2a}$, de sorte que, si l'on ajoute $+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}$ à la quantité comprise dans les parenthèses, ce qui est permis, l'équation proposée pourra être mise sous la forme suivante :

$$a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right\}=0,$$

ou bien

$$a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}=0.$$

Ainsi, quelque valeur réelle que l'on donne à x, la quantité comprise dans les accolades restera toujours positive, puisque b^2-4ac étant <0, $4ac-b^2$ est au contraire >0. Donc aucune valeur réelle de x ne peut vérifier l'équation proposée; donc cette équation exprime une absurdité, et *cette absurdité consiste en ce que l'équation* [1] *exprime que la somme des deux quantités* $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ *et* $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$, *qui ont le même signe que* a, *doit être nulle.*

239. On voit encore, par là, que *quand une équation du deuxième degré a ses racines imaginaires, son premier membre conserve constamment le signe du coefficient de son premier terme, quelque valeur que l'on y donne à l'inconnue*, car le facteur $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ sera toujours positif.

240. Si l'on suppose $c=0$, la formule [4] deviendra

$$x=\frac{-b\pm b}{2a},\quad \text{d'où}\quad \begin{cases} x=\dfrac{-b+b}{2a}=0,\\ x=\dfrac{-2b}{2a}=-\dfrac{b}{a}.\end{cases}$$

En effet, l'équation [1] devient alors

$$ax^2+bx=0,$$

ou, en mettant x en facteur commun,

$$(ax+b)x=0.$$

Ainsi, résoudre l'équation proposée, c'est trouver tous les nombres qui substitués à la place de x rendront nul le produit $(ax+b).x$; mais un produit est nul, lorsque l'un de ses facteurs est égal à zéro; donc on satisfera à l'équation

$$ax^2+bx=0,$$

en posant

$$x=0,$$

ou

$$ax+b=0, \quad \text{d'où} \quad x=-\frac{b}{a}.$$

241. Si $b=0$, la formule [4] se réduit à

$$x=\pm\frac{\sqrt{-4ac}}{2a}=\pm\sqrt{\frac{-4ac}{4a^2}}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

C'est, en effet, ce que l'on trouve, en résolvant directement l'équation

$$ax^2+c=0,$$

car, on en tire d'abord, en transposant et en dégageant ensuite x^2 de son coefficient,

$$x^2=-\frac{c}{a}, \quad \text{d'où} \quad x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

242. Si $a=0$, la première valeur de x devient $\frac{0}{0}$, et la seconde $-\frac{2b}{0}$, tandis que, par suite de la même hypothèse, l'équation proposée se réduit à $bx+c=0$, d'où $x=-\frac{c}{b}$; ainsi il semble que la formule [4] n'est pas applicable au cas actuel, ce qui ne serait pas surprenant, puisque, pour obtenir la formule [3], de laquelle on a déduit la formule [4], on a supposé que a n'était pas nul (**227**).

Afin de nous en assurer, reprenons la première valeur de x,

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

laquelle s'est présentée sous la forme $\frac{0}{0}$, et cherchons à découvrir si la véritable valeur de cette fraction ne serait pas $-\frac{c}{b}$. Pour cela, je remarque que si le facteur a est commun aux deux termes de cette fraction, ce qui empêche de le découvrir, c'est

qu'il y a dans son numérateur une opération qui n'est qu'*indiquée*, de sorte qu'aucune réduction ne pouvant s'y effectuer, ce facteur n'est pas apparent. Nous éluderons cette difficulté, en multipliant les deux termes de la fraction par $b+\sqrt{b^2-4ac}$, car, de cette manière, le *numérateur* deviendra la différence des carrés de $\sqrt{b^2-4ac}$ et de b; et par conséquent nous pourrons *effectuer* ces opérations. On trouvera ainsi

$$\frac{b^2-4ac-b^2}{2a(b+\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}} \quad [5],$$

en réduisant et divisant ensuite les deux termes par $2a$. Si maintenant on fait $a=0$, on trouvera que cette fraction se réduit à $-\frac{c}{b}$, qui est la valeur même de x que nous a donnée l'équation proposée.

Quant à la valeur $-\frac{2b}{0}$, on peut la regarder comme la limite vers laquelle tend la fraction

$$-\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

lorsque l'on suppose que a décroît indéfiniment. Multiplions, en effet, les deux termes de cette fraction par $b-\sqrt{b^2-4ac}$, et il viendra, toutes réductions faites,

$$\frac{-2c}{b-\sqrt{b^2-4ac}} \quad [6].$$

Si b et c sont positifs, et que *l'on donne à* a *des valeurs positives* de plus en plus petites, la quantité $\sqrt{b^2-4ac}$, toujours moindre que b, tendra à devenir égale à ce coefficient, de sorte que le dénominateur $b-\sqrt{b^2-4ac}$ pourra prendre une valeur positive aussi petite que l'on voudra; donc, en donnant à a une valeur positive suffisamment petite, notre fraction acquerra une valeur absolue plus grande que toute quantité assignable et sera négative; donc *sa limite est l'infini négatif*. Cette conséquence subsisterait encore si c était négatif, car le numérateur serait positif, et le dénominateur décroîtrait négativement.

Si *on suppose que* a *soit négatif* et prenne des valeurs absolues indéfiniment décroissantes, on verra, par les mêmes raisonnements, que *la limite de la fraction est l'infini positif.*

Il est inutile de s'arrêter au cas où b serait négatif, parce qu'en changeant x en $-x$ dans l'équation proposée, ce qui ne ferait que changer les signes de ses racines (**142**), on retomberait sur le cas précédent.

243. Supposons que l'on ait à la fois $a=0$ et $b=0$, les deux valeurs de x se présenteront sous la forme $\frac{0}{0}$; or, en faisant successivement $b=0$ et $a=0$ dans les formules [5] et [6] auxquelles nous avons ramené la formule [4], on trouvera qu'elles se réduiront à $+\frac{2c}{0}$ et à $-\frac{2c}{0}$. Or, pour $b=0$, l'équation [1] devient

$$ax^2+c=0, \quad \text{d'où} \quad x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Si donc on donne à a des valeurs décroissantes, mais de signe contraire à celui de c, on reconnaît que x a deux valeurs de signes contraires et qui tendent vers l'infini. Donc la formule [4] convient encore au cas actuel.

Enfin, si on a à la fois $a=0$, $b=0$, $c=0$, les formules [5] et [6] se réduisent à $\frac{0}{0}$, et comme l'équation [1] devient alors identique, on en conclut que la formule [4] est encore applicable, si l'on regarde $\frac{0}{0}$ comme le symbole de l'indétermination.

244. Nous avons montré (**228**) qu'en désignant par x' et par x'' les deux racines de l'équation [2], le premier membre de cette équation était le produit des deux facteurs $x-x'$ et $x-x''$, c'est-à-dire que

$$x^2+px+q=(x-x')(x-x'').$$

On voit donc que *le premier membre de toute équation du second degré, ramenée à la forme* $x^2+px+q=0$, *est le produit de deux facteurs du premier, formés en soustrayant chaque racine de l'inconnue.*

Quand le coefficient de x^2 n'est pas l'unité, il faut, pour reproduire le premier membre, multiplier le produit de ces deux

facteurs par ce coefficient. On voit, en effet, que le trinome ax^2+bx+c étant (227) égal à $a(x^2+px+q)$, on a

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'').$$

Ainsi, pour décomposer en facteurs le trinome $6x^2-x-12$, on l'égalera à zéro, et les racines de l'équation résultante étant $\frac{3}{2}$ et $-\frac{4}{3}$, on en conclura que

$$6x^2-x-12=6\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)=(2x-3)(3x+4).$$

245. On formera donc une équation du second degré qui ait pour racines des nombres donnés x' et x'', en égalant à zéro le produit des facteurs $x-x'$ et $x-x''$ trouvés en soustrayant chaque racine de l'inconnue ; ce qui donnera

$$x^2 \left.\begin{matrix}-x'\\-x''\end{matrix}\right| x+x'x''=0.$$

Ce résultat nous apprend que *dans toute équation du second degré, ramenée à la forme* $x^2+px+q=0$, *le coefficient du second terme est égal à la somme des racines prises avec des signes contraires, et que le terme indépendant est égal au produit de ces racines.*

246. Ces propriétés fournissent un nouveau moyen de reconnaître les signes des racines d'une équation du second degré, *lorsque ces racines sont réelles.* Divisons, en effet, tous les termes de l'équation [1] par a, ce qui donnera

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0,$$

et considérons, par exemple, le cas où

$$b<0, \quad c<0.$$

Alors le dernier terme $\frac{c}{a}$, qui est le produit des racines, étant négatif, on voit que *ces racines sont de signes contraires ;* mais le second terme $\frac{b}{a}$ étant négatif, leur somme est positive : donc ***la racine positive est plus grande en valeur absolue que la racine négative.***

247. PROBLÈME I. *Étant donnés la somme* s *de deux nombres et leur produit* p, *trouver chacun d'eux.*

Soit x l'un des nombres demandés : l'autre sera $s-x$, et on aura par conséquent, pour l'équation du problème,

$$x(s-x)=p, \quad \text{d'où} \quad x^2-sx+p=0,$$

équation d'où l'on tire

$$x=\frac{s}{2}\pm\sqrt{\frac{s^2}{4}-p}.$$

Quoique nous trouvions pour x deux valeurs, il ne faut cependant pas en conclure que le problème admette deux solutions, parce que la somme de ces deux valeurs étant la somme donnée s (245), il s'ensuit que ces deux valeurs sont précisément les deux nombres cherchés.

Au reste, on pouvait prévoir que l'équation, qui donnerait l'un des nombres demandés, donnerait aussi l'autre ; car x ne représente pas l'un plutôt que l'autre.

248. L'équation

$$x^2-sx+p=0$$

nous montre que *deux nombres dont on connaît la somme et le produit sont les racines d'une équation du second degré, qui a pour coefficient du premier terme l'unité, pour coefficient du second terme la somme donnée prise avec un signe contraire, et pour terme indépendant le produit donné.*

On aurait pu déduire cette conséquence des propriétés énoncées au n° 245, mais on n'aurait pas raisonné rigoureusement en agissant ainsi, parce qu'on ne sait pas *a priori* si le problème n'a qu'une seule solution.

249. PROBLÈME II. *Trouver, sur la droite qui joint deux points lumineux* A *et* B, *le point* R *où il faudrait placer un écran pour qu'il en reçut des quantités égales de lumière.* On admet ce principe de physique que *l'intensité de la lumière croît en raison inverse du carré de la distance*, c'est-à-dire qu'un écran placé à des distances 2, 3, 4,... fois plus ou moins grandes d'un point

lumineux est 4, 9, 16,... fois moins ou plus éclairé par ce point.

R″ A R B R′

Désignons par d la distance des points fixes A et B, par a et b les quantités de lumière que l'écran reçoit respectivement de ces points lumineux, quand il est successivement placé à l'unité de distance de chacun d'eux, et enfin appelons x la distance du point cherché R au point A. Nous allons calculer les quantités de lumière que l'écran, placé en R, recevra de A et de B, et, en écrivant qu'elles sont égales, le problème sera mis en équation. Or, puisque le point A projette sur l'écran, placé à l'unité de distance, une quantité a de lumière, on trouvera la quantité y de lumière qu'il envoie à ce même écran placé à la distance x, par la proportion

$$a : y :: x^2 : 1, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{a}{x^2}.$$

On verra de même que BR étant égale à $d - x$, la quantité z de lumière que notre écran, placé en R, recevra de B, sera déterminée par la proportion

$$b : z :: (d-x)^2 : 1, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{b}{(d-x)^2};$$

donc l'équation du problème est

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d-x)^2} \qquad [7].$$

Il s'agit donc de résoudre cette équation. Mais, au lieu de la ramener à la forme convenue (226), je remarque qu'on l'abaissera immédiatement au premier degré, en extrayant la racin carrée de ses deux membres (227*) : on trouvera ainsi

$$\frac{\sqrt{a}}{x} = \pm \frac{\sqrt{b}}{d-x},$$

équation d'où l'on tirera facilement

$$x = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \qquad [8]$$

Nous allons maintenant discuter cette formule, et nous distinguerons, pour cela, trois cas principaux, savoir : $a > b$, $a = b$, $a < b$.

1er Cas. $a > b$. La première valeur de x place l'écran entre les points A et B, et plus près du second que du premier; car il est évident que la quantité $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ est plus petite que l'unité et plus grande que $\frac{1}{2}$. En effet, le dénominateur est plus grand que le numérateur, mais il est plus petit que le double de ce numérateur, puisque $a > b$; donc la valeur de x est $< d$ et $> \frac{1}{2}d$. C'est ce qui doit arriver, car pour qu'un écran, placé entre A et B, soit également éclairé par ces deux lumières, il faut évidemment qu'il soit plus près de la plus faible que de la plus brillante.

Quant à la seconde valeur de x, elle est plus grande que d, car $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} > 1$; ainsi il y a une seconde position à donner à l'écran sur le prolongement de AB, en un certain point R'.

2e Cas. $a = b$. La première valeur de x se réduit à $\frac{d}{2}$, et il est évident, en effet, que, dans l'hypothèse actuelle, l'écran qui sera placé au milieu de l'intervalle AB, sera également éclairé par les deux lumières.

La seconde valeur de x devient infinie pour $a = b$. Mais si, au lieu de faire brusquement $a = b$, on suppose que l'intensité du point lumineux B, d'abord moindre que a, augmente de plus en plus, la seconde valeur de x ira en augmentant, et on voit qu'en donnant à b une valeur inférieure à a d'aussi peu que l'on voudra, cette valeur de x pourra devenir plus grande que toute quantité donnée, de sorte que quand on aura $b = a$, il n'y aura plus de position possible à assigner à l'écran sur le prolongement de AB; et en effet, dans toutes ces positions, il sera toujours plus près de B que de A, et par conséquent il sera inégalement éclairé par ces deux lumières.

Si en même temps que $a=b$, on avait $d=0$, la première valeur de x se réduirait à *zéro*, et la seconde à $\frac{0}{0}$; mais, comme il n'y a pas de facteur commun aux deux termes de la fraction $\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, il faudra, pour interpréter ce dernier résultat, faire les hypothèses $a=b$ et $d=0$ dans l'équation du problème. On trouvera ainsi qu'elle se réduit à l'identité

$$\frac{a}{x^2}=\frac{a}{x^2},$$

et qu'en conséquence $\frac{0}{0}$ est ici le symbole de l'indétermination, de sorte que x pouvant recevoir toutes les valeurs possibles, on doit en conclure que, dans quelque position que l'on place l'écran, il sera également éclairé par les deux lumières, ce qui est évident.

3e Cas. $a<b$. Ici la première valeur de x est encore plus petite que d et elle est même $<\frac{d}{2}$, ce qui doit être. Quant à la seconde, elle est négative, ce qui indique que la distance de l'écran au point A doit être portée, non plus à droite du point A sur AB, mais à gauche de ce point, conformément aux conventions faites au n° **22**. Ici la valeur négative de x provient d'une fausse hypothèse faite sur la position du point R', en mettant le problème en équation; car on aurait obtenu la même équation [7], en prenant AR' pour inconnue. Supposons en effet que l'écran doive être placé en R'', et désignons AR'' par x; les quantités de lumière qu'il recevra des points A et B seront respectivement $\frac{a}{x^2}$ et $\frac{b}{(d+x)^2}$, de sorte que l'équation du problème sera alors

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d+x)^2},$$

et c'est là précisément ce que devient l'équation [7], quand on y change x en $-x$ (**145**).

250. Problème III. *Plusieurs personnes, voyageant ensemble, prirent une voiture qui devait les conduire à leur destination,*

moyennant 342 *francs. Le voyage fait, trois voyageurs se trouvèrent sans argent, mais les autres suppléèrent à ce qui leur manquait, et donnèrent chacun* 19^f *de plus. On demande le nombre des voyageurs.*

Soit x le nombre des voyageurs, $x-3$ sera le nombre de ceux qui ont acquitté les 342 francs, et par conséquent $\frac{342^f}{x-3}$ sera la quote-part que chacun aura payée, au lieu de $\frac{342^f}{x}$ qu'il devait. Puis donc que chacun d'eux donne 19^f de plus que si tous les voyageurs avaient également contribué à la dépense, on aura pour l'équation du problème

$$\frac{342}{x-3}-\frac{342}{x}=19.$$

On tire de cette équation $x=9$ et $x=-6$. La première de ces deux valeurs nous indique que les voyageurs étaient au nombre de 9, ainsi qu'il est facile de le vérifier.

Quant à la seconde valeur de x, elle n'a ici aucun sens, car le nombre des voyageurs n'est pas susceptible de recevoir deux modes d'existence opposés. Si l'on veut savoir quelles modifications il faut introduire dans l'énoncé du problème, pour que $+6$ en fournisse une solution, on changera x en $-x$ dans l'équation de ce problème (145), ce qui donnera

$$\frac{342}{-x-3}+\frac{342}{x}=19,$$

ou bien

$$\frac{342}{x}-\frac{342}{x+3}=19.$$

Ainsi $\frac{342}{x}$ représentant toujours la somme que chaque voyageur devrait payer, $\frac{342}{x+3}$ sera celle qu'il paye réellement, de sorte que le nouvel énoncé sera le suivant :

Plusieurs personnes, voyageant ensemble, prirent une voiture qui devait les conduire à leur destination, moyennant 342^f.

Mais trois nouveaux voyageurs étant survenus, la quote-part de chacun se trouva diminuée de 19ᶠ. *On demande le nombre primitif des voyageurs.* On vérifiera facilement que ce nombre était 6.

251. PROBLÈME IV. *En laissant tomber une pierre dans un puits de mine, on a trouvé qu'il s'était écoulé un nombre* t *de secondes, entre l'instant de sa chute et celui où le bruit de son arrivée au fond du puits est parvenu à l'oreille de l'observateur. On propose de calculer la profondeur de ce puits, sachant que la vitesse du son est uniforme et de* a *mètres par seconde, qu'un corps qui tombe dans le vide parcourt* $\frac{1}{2}$ g *mètres pendant la première seconde, et que les espaces parcourus ainsi sont proportionnels aux carrés des temps. On fait d'ailleurs abstraction de la résistance de l'air.*

Désignons la profondeur du puits par x : nous calculerons le temps y que la pierre a mis pour arriver au fond, en posant la proportion

$$\tfrac{1}{2}g : x :: 1 : y^2, \quad \text{d'où} \quad y=\sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

D'un autre côté, la vitesse du son étant de a mètres par seconde, on trouvera le temps z que le son a mis, pour parvenir du fond du puits à l'oreille de l'observateur, en posant la proportion

$$a : x :: 1 : z, \quad \text{d'où} \quad z=\frac{x}{a};$$

mais t est évidemment la somme des nombres y et z : donc l'équation du problème est

$$\sqrt{\frac{2x}{g}}+\frac{x}{a}=t.$$

On tire de cette équation, en isolant le radical dans le premier membre, puis en élevant au carré les deux membres de l'équation résultante,

$$gx^2-2a(gt+a)x+a^2gt^2=0,$$

d'où

$$x=\frac{a}{g}\left\{gt+a\pm\sqrt{a(a+2gt)}\right\}.$$

Il semblerait ainsi que le problème a deux solutions, car ces valeurs de x sont réelles et positives, et cependant il est évident *a priori* qu'il ne peut en admettre qu'une seule. Comment donc distinguer, entre ces deux valeurs de x, celle qui résout le problème? Pour y parvenir, nous observerons qu'en t secondes le son doit parcourir un espace plus grand que la profondeur du puits; donc cette profondeur doit être moindre que at; mais la première valeur de x est au contraire plus grande que at; donc elle doit être rejetée; donc la solution du problème sera donnée par la formule

$$x = \frac{a}{g}\left\{gt + a - \sqrt{a(a+2gt)}\right\}.$$

252. *D'où vient que l'algèbre a ainsi donné une solution étrangère à la question proposée?* Nous remarquerons que, pour rendre rationnelle l'équation du problème, nous avons élevé au carré les deux membres de l'équation $\sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{a}$, et que nous aurions obtenu le même résultat en carrant les deux membres de l'équation $-\sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{a}$; de sorte que les deux racines de l'équation $gx^2 - 2a(gt+a)x + a^2g t^2 = 0$, appartiennent respectivement à ces deux équations, et nous verrons (**261**) que la seconde est satisfaite par la valeur de x que nous avons rejetée.

253. On voit par là que *quand on aura à résoudre une équation qui renfermera un radical du second degré, il faudra d'abord faire évanouir ce radical, en l'isolant dans un membre et en élevant ensuite au carré les deux membres de la nouvelle équation; mais aussi l'équation rationnelle résultante pourra avoir des racines qui ne satisferont pas à la proposée.*

254. Si l'on voulait faire abstraction du temps, toujours très-court, que le son a mis pour venir du fond du puits, il suffirait de supposer que sa vitesse a croît indéfiniment, et de chercher vers quelle limite tend alors la valeur de x. Mais j'observe que quand a augmente, les quantités $(gt+a)$ et $\sqrt{a(a+2gt)}$

croissant en même temps, on ne peut pas reconnaître dans quel sens varie la valeur de x. Pour éluder cette difficulté, je multiplie et je divise l'expression de x par $gt+a+\sqrt{a(a+2gt)}$; de cette manière, le numérateur deviendra égal à la différence des carrés de $gt+a$ et de $\sqrt{a(a+2gt)}$, et l'on trouvera, toutes réductions faites,

$$x=\frac{agt^2}{gt+a+\sqrt{a(2gt+a)}};$$

mais comme la *variable a* se trouve encore dans les deux termes de cette fraction, je les divise l'un et l'autre par a, ce qui donne

$$x=\frac{gt^2}{\frac{gt}{a}+1+\sqrt{2\frac{gt}{a}+1}}.$$

Or, lorsque a augmentera, la quantité $\frac{gt}{a}$, diminuera et pourra même devenir moindre que toute grandeur donnée, lorsqu'on assignera à a une valeur suffisamment grande; donc la limite du dénominateur est $1+1=2$, et par conséquent celle de x est $\frac{gt^2}{2}$; et en effet, en vertu du principe que *les espaces parcourus par un corps, qui tombe dans le vide, sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir*, on calculera l'espace parcouru en t secondes, par la proportion

$$1:t^2::\tfrac{1}{2}g:x=\frac{gt^2}{2}.$$

255. En résolvant les problèmes III et IV, nous avons trouvé des *solutions étrangères* : à quoi cela peut-il tenir? Il y a, en général, dans l'énoncé d'un problème, deux sortes de conditions auxquelles les inconnues doivent satisfaire : les unes que nous appellerons *conditions algébriques*, et qui peuvent toujours être exprimées par des équations; les autres que l'on nomme *conditions physiques*, qui assujettissent les inconnues à être, par exemple, des nombres entiers, des quantités positives, à

être comprises entre certaines limites, etc., et qui, ne pouvant ainsi être exprimées par des équations, doivent être vérifiées après coup. D'où l'on voit que, avant d'admettre, comme solution d'un problème, les valeurs trouvées pour les inconnues, il faudra s'assurer qu'elles satisfont aux conditions physiques de son énoncé, de sorte que celles qui seront incompatibles avec ces conditions devront être rejetées, et les autres seront seules bonnes.

Mais, dira-t-on, pourquoi l'algèbre fournit-elle des solutions étrangères aux questions que l'on veut résoudre? C'est qu'en appliquant l'algèbre à la solution d'un problème, on le dépouille des conditions physiques auxquelles sont assujetties les inconnues, que l'on ne soumet ainsi qu'aux seules conditions algébriques, de sorte que les équations que l'on obtient conviennent à toutes les questions qui comportent les mêmes conditions algébriques, mais diffèrent seulement par les conditions physiques.

Exemple. *Une personne a emprunté un nombre d'écus de* 5^f, *tel que si de* 512 *fois la somme prêtée, évaluée en francs, on retranche le carré de cette même somme, on aura pour reste* 6000 *francs. Quelle est cette somme?*

Désignons-la par x et nous aurons

$$512x - x^2 = 6000; \quad \text{d'où} \quad x = 12 \text{ et } x = 100.$$

Mais les conditions physiques de la question exigent que la somme demandée soit *un nombre entier, positif* et *divisible par* 5; puis donc que des deux nombres 12 et 100 le second satisfait seul à ces trois conditions, la racine 12 doit être rejetée et 100 francs est la somme demandée.

236. Lorsque dans l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ le coefficient a est très-petit, on peut simplifier la formule générale $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, qui se prête mal aux calculs numériques.

Considérons, en effet, l'une seulement des valeurs de x (la

seconde se trouvera ensuite facilement, puisque leur somme est connue et égale à $-\frac{b}{a}\Big)$. De l'équation $ax^2+bx+c=0$, on tirera

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ax^2}{b},$$

et comme a est supposé très-petit, on pourra négliger le terme $\frac{ax^2}{b}$ et prendre comme *première approximation*

$$x=-\frac{c}{b}.$$

L'erreur que l'on commet ainsi est $-\frac{ax^2}{b}$; elle renferme comme facteur la première puissance de a; on dit qu'elle est du *premier ordre*. Désignons-la par ε_1; la valeur exacte de x sera

$$x=-\frac{c}{b}+\varepsilon_1,$$

et, en reportant cette valeur dans le second membre de l'équation $x=-\frac{c}{b}-\frac{ax^2}{b}$, il viendra

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b}+\varepsilon_1\right)^2,$$

c'est-à-dire

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}+\frac{2a\varepsilon_1 c}{b^2}-\frac{\varepsilon_1^2 a}{b};$$

les deux derniers termes sont évidemment du *second* et du *troisième ordre* par rapport à a; et si on les néglige, il viendra comme *seconde approximation*

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3},$$

valeur qui n'est fautive que d'erreurs du second ordre. En désignant l'erreur commise par ε_2, la valeur exacte de x sera donc

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}+\varepsilon_2.$$

Si maintenant nous reportons cette valeur de x dans le second membre de l'équation $x = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b}$, on trouvera facilement

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{{}^{2}ac}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5}$$

comme *troisième approximation*, et l'erreur commise ne renferme que des termes du troisième et du cinquième ordre. Il sera facile de continuer ainsi indéfiniment *.

Remarquons que chacune des formules d'approximation successives s'obtient de la précédente par l'addition d'un terme de correction, et que l'erreur qui subsiste après l'addition de chacun des termes, est toujours *très-petite* par rapport à ce terme.

§ II. RÉSOLUTION DE DEUX ÉQUATIONS DU DEUXIÈME DEGRÉ A DEUX INCONNUES.

257. Une équation *complète* du second degré à deux inconnues doit renfermer tous les termes du second degré, tant en x qu'en y, les premières puissances de ces inconnues et un terme tout connu. Elle peut donc être ramenée à la forme

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0 \qquad [9].$$

Soit encore l'équation complète

$$a'y^2 + b'xy + c'x^2 + d'y + e'x + f' = 0 \qquad [10];$$

et proposons-nous de résoudre ces deux équations.

Si l'une d'elles était du premier degré par rapport à l'une des inconnues, y par exemple, on résoudrait cette équation par rapport à y, et, en substituant la valeur ainsi trouvée dans l'autre équation, l'élimination de y serait effectuée, et le calcul s'achè-

* On a immédiatement la suite des termes de la valeur de x en partant de la formule $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, dans laquelle on développera la quantité $\sqrt{b^2 - 4ac} = (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}$ par la formule du binome pour le cas de l'exposant fractionnaire (339).

verait comme au n° 153, c'est-à-dire que l'on résoudrait *l'équation finale* en x, et qu'on substituerait successivement ses racines dans l'expression de y en fonction de x, ce qui ferait connaître toutes les solutions des équations proposées. On ramènera le cas général à ce cas particulier, en éliminant le carré de y entre les équations proposées, d'après la méthode du n° 156; ce qui nous conduit à substituer au système des équations proposées, le système formé de l'une d'elles et de l'équation ainsi obtenue (la démonstration est celle même que nous avons donnée au n° 156). Nous multiplierons donc les équations [1] et [2] respectivement par a' et par $-a$, nous retrancherons les équations-produits, membre à membre, et il viendra

$$(ab'-ba')xy+(ac'-ca')x^2+(ad'-da')y+(ae'-ea')x+af'-fa'=0 \qquad [11],$$

d'où l'on tire

$$y=-\frac{(ac'-ca')x^2+(ae'-ea')x+af'-fa'}{(ab'-ba')x+(ad'-da')} \qquad [12],$$

et en substituant cette valeur dans l'une des équations proposées, on aura évidemment une équation du quatrième degré, qu'on pourra ramener à la forme

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0 \qquad [13].$$

On démontrerait comme au n° 153 que le système des équations [12] et [13] est équivalent à celui des équations [9] et [11]: d'où il suit que, pour avoir les solutions des équations proposées, il faudra résoudre l'équation [13], ce qui fera connaître toutes les valeurs dont l'inconnue x est susceptible; puis substituer les valeurs ainsi trouvées dans [12], et on obtiendra les valeurs de y qui sont conjuguées avec celles de x.

238. Il semblerait plus naturel, pour éliminer y entre les équations [9] et [10], de tirer de l'une d'elles la valeur de y en fonction de x, et de la substituer ensuite dans la seconde, mais cette méthode, outre sa longueur (233), aurait encore l'inconvénient d'exposer à admettre des couples de valeurs de x et de y

qui ne vérifieraient pas les équations proposées. Supposons, en effet, qu'après avoir ordonné leurs premiers membres par rapport aux puissances descendantes de y, on ait dégagé le carré de cette inconnue de son coefficient : les équations [9] et [10] seront ainsi ramenées à la forme

$$y^2 - 2Py + Q = 0 \qquad [14],$$

$$y^2 - 2P'y + Q' = 0 \qquad [15].$$

On tire de la première

$$y = P + \sqrt{P^2 - Q} \quad [16], \qquad y = P - \sqrt{P^2 - Q} \quad [17].$$

Si l'on substitue la première de ces valeurs dans l'équation [15], on trouvera deux sortes de termes : les uns qui seront indépendants de la quantité $\sqrt{P^2 - Q}$, et d'autres qui la contiendront comme facteur, de sorte que si l'on désigne par A l'ensemble des premiers et par B la somme algébrique (35) des quantités que $\sqrt{P - Q}$ multiplie, l'équation résultante pourra être représentée par $A + B\sqrt{P^2 - Q} = 0$. Comme l'équation [17] ne diffère de l'équation [16] que par le signe dont $\sqrt{P^2 - Q}$ y est affecté, on obtiendra l'équation résultant de la substitution de $P - \sqrt{P^2 - Q}$ dans [15], en changeant, dans l'équation que nous venons d'obtenir, le signe du facteur $\sqrt{P^2 - Q}$. On aura donc ainsi les deux équations

$$A + B\sqrt{P^2 - Q} = 0 \quad [18], \qquad A - B\sqrt{P^2 - Q} = 0 \quad [19],$$

et il est facile de voir, en répétant les raisonnements faits au nº 185, que tout couple de valeurs $x = \alpha$ et $y = \beta$, qui vérifie les équations [14] et [15], vérifie l'équation [16] *ou* l'équation [17], et par suite l'équation [18] *ou* l'équation [19]; et que réciproquement tout couple de valeurs $x = \alpha$ et $y = \beta$, qui vérifie le système des équations [16] et [18], *ou* celui des équations [17] et [19], vérifie les équations [14] et [15]; d'où il suit que si l'on résout, d'une part, le système des équations [16] et [18], d'une autre part, celui des équations [17] et [19], on obtiendra toutes les solutions et les seules solutions des équations propo-

sées. **Mais** ***pour résoudre les équations*** [18] *et* [19], ***il faut les rendre rationnelles, et, pour cela, isoler dans un membre le terme irrationnel, et élever ensuite les deux membres au carré*** **(253). Or,** en effectuant cette opération sur les équations [18] et [19], on obtient l'équation unique

$$A^2 = B^2(P^2 - Q) \qquad [20],$$

qui a par conséquent pour racines toutes les valeurs de x qui pourraient vérifier les équations [18] et [19], de sorte que, quand on aura résolu cette équation, on ne saura plus si une de ses racines α devra être substituée dans [16] ou dans [17]. Il faudra donc, pour éviter toute erreur, substituer cette valeur α de x dans [18], et suivant qu'elle satisfera à cette équation ou qu'elle ne la vérifiera pas, on mettra α au lieu de x dans [16] ou dans [17], ce qui fera connaître la valeur correspondante de y.

Prenons, pour exemple, les deux équations

$$x^2 - 2xy + y^2 - y = 0, \qquad x^2 - 3xy + 2y^2 + y = 0.$$

On tirera de la première

$$x = y + \sqrt{y} \quad [16], \qquad x = y - \sqrt{y} \quad [17];$$

puis, en substituant dans la seconde, on trouvera, toutes réductions faites,

$$-y\sqrt{y} + 2y = 0 \quad [18], \qquad +y\sqrt{y} + 2y = 0 \quad [19].$$

En faisant évanouir les radicaux, il viendra

$$y^3 - 4y^2 = 0\,, \quad \text{ou} \quad y^2(y-4) = 0.$$

Sous cette dernière forme, on voit que y a trois valeurs, dont deux sont égales à zéro, et dont la troisième est égale à 4.

Or $y = 0$, satisfait également à [18] et à [19], donc on devra faire $y = 0$ dans [16] et dans [17], et il en résultera $x = 0$, $x = 0$. On verra ensuite que $y = 4$ vérifie [18], mais ne satisfait pas à [19]; donc on devra substituer $y = 4$ dans [16] et on aura, pour valeur correspondante de x, $x = 6$. **Ainsi les solutions demandées sont**

$y=0$	$y=0$	$y=4$
$x=0$	$x=0$	$x=6$

239. La résolution de l'équation [13] est impossible au point où nous en sommes actuellement de l'algèbre. Cependant on peut résoudre cette équation, dans le cas particulier où les coefficients B et D seraient nuls, c'est-à-dire dans le cas où elle se réduirait à

$$Ax^4 + Cx^2 + E = 0 \qquad [21].$$

Une pareille équation est dite *bi-carrée*.

Posons en effet

$$x^2 = y :$$

elle deviendra, en substituant,

$$Ay^2 + Cy + E = 0.$$

En résolvant cette équation, on en tirera deux valeurs de y, que je représente par a et par b, de sorte que l'on aura ainsi

$$x^2 = a, \quad \text{d'où} \quad x = \pm\sqrt{a},$$

et

$$x^2 = b, \quad \text{d'où} \quad x = \pm\sqrt{b}.$$

La proposée aura donc quatre racines égales deux à deux et de signes contraires. Pour que ces racines soient réelles, il faut d'abord que a et b soient elles-mêmes des quantités réelles, ensuite qu'elles soient positives. Si l'une d'elles est négative, les deux valeurs correspondantes de x seront imaginaires, et si a et b sont toutes deux négatives ou imaginaires, les quatre valeurs de x seront imaginaires. Ainsi l'équation bi-carrée peut avoir ses quatre racines réelles, ou deux racines réelles et deux imaginaires, ou toutes les quatre imaginaires.

On voit qu'elle n'aura de racines égales qu'autant que a sera égal à b, et alors son premier membre sera un carré parfait, car, pour que a soit égal à b, il faut (237) que

$$C^2 - 4AE = 0, \quad \text{d'où} \quad E = \frac{C^2}{4A},$$

et, en substituant cette valeur dans [21], il viendra

$$Ax^4 + Cx^2 + \frac{C^2}{4A} = 0,$$

équation dont le premier membre est le carré de $\left(x^2\sqrt{A}+\frac{C}{2\sqrt{A}}\right)$.

Les valeurs de y étant $y=\frac{-C\pm\sqrt{C^2-4AE}}{2A}$, la formule générale des valeurs de x sera

$$x=\pm\sqrt{\frac{-C\pm\sqrt{C^2-4AE}}{2A}} \qquad [22],$$

et on pourra discuter directement cette formule, en suivant exactement la marche que nous avons tracée aux n^{os} **254**, **256** et **258**.

260. La formule [22] nous montre que, pour obtenir les valeurs de x, il faut *extraire la racine carrée d'un binome composé de deux termes, dont l'un* $-C$ *est rationnel, et dont l'autre* $\sqrt{C^2-4AE}$ *est* en général *une quantité irrationnelle du deuxième degré*; or, on ne peut alors obtenir la valeur de ce terme qu'approximativement, de sorte que les valeurs de x sont ainsi compliquées de deux causes d'erreur. Si, au contraire, on pouvait transformer l'expression de x en une autre dans laquelle les deux radicaux fussent indépendants, on extrairait l'une des racines par excès et l'autre par défaut, si ces radicaux avaient des signes semblables, ou toutes deux dans le même sens, s'ils avaient des signes contraires, et les erreurs commises sur les deux racines se compensant en partie, on aurait ainsi la valeur de x plus exactement.

Soit donc $A+\sqrt{B}$ la quantité dont on demande la racine carrée : il s'agira de trouver deux nombres *rationnels* x et y tels que l'on ait

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

Cette équation n'a rien d'absurde, car si l'on élève ses deux membres au carré, on trouvera

$$A+\sqrt{B}=x+2\sqrt{xy}+y \qquad [23],$$

et les deux membres de celle-ci sont de même forme. Or, cette

équation se décompose dans les deux suivantes

$$A = x + y,$$

$$\sqrt{B} = 2\sqrt{xy},$$

formées en égalant entre eux, d'une part, les termes commensurables, et, de l'autre, les termes incommensurables qui se trouvent dans les deux membres de l'équation [23]. Supposons, en effet, que A ne soit pas égal à $x + y$, et soit d leur différence, de sorte que

$$A = x + y + d.$$

En substituant cette expression de A dans l'équation [23], et simplifiant ensuite, il viendra

$$d + \sqrt{B} = 2\sqrt{xy},$$

d'où, en élevant au carré,

$$d^2 + 2d\sqrt{B} + B = 4xy,$$

et par conséquent

$$\sqrt{B} = \frac{4xy - d^2 - B}{2d},$$

ce qui ne se peut pas; donc

$$A = x + y, \text{ et par conséquent, } \sqrt{B} = 2\sqrt{xy}.$$

Si l'on carre cette dernière équation, on aura pour déterminer x et y les deux équations

$$A = x + y,$$

$$\tfrac{1}{4}B = xy,$$

dont l'une fait connaître la somme et l'autre le produit de ces deux inconnues. Les valeurs de x et de y sont donc (**248**) les racines de l'équation

$$z^2 - Az + \frac{B}{4} = 0.$$

En résolvant cette équation, on trouvera

$$x=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}, \quad y=\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2};$$

par conséquent

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \quad [24].$$

Remarquons que les deux radicaux du deuxième membre doivent avoir des signes semblables, sans quoi, en élevant ce deuxième membre au carré, on ne reproduirait pas le terme $+\sqrt{B}$. Ce serait le contraire si $\sqrt{B}$ était précédée du signe $-$; donc

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \quad [25].$$

On voit que *si* (A^2-B) *n'est pas un carré parfait*, les formules que nous venons de trouver ne rempliront pas le but que nous nous sommes proposé en les calculant, car elles seront plus compliquées que celles auxquelles on voulait les substituer, et alors *il faudra effectuer directement le calcul indiqué par l'expression* $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$.

261. Exemple I. *Soit l'expression* $\sqrt{31-10\sqrt{6}}$. On posera $A=31, \sqrt{B}=10\sqrt{6}$, d'où $\sqrt{A^2-B}=\sqrt{961-600}=\sqrt{361}=19$. La formule [25] est applicable et on trouve

$$\sqrt{31-10\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{31+19}{2}}-\sqrt{\frac{31-19}{2}}=5-\sqrt{6}.$$

Exemple II. Nous avons dit au nº **252** que la valeur de x, $\frac{a}{g}\{gt+a+\sqrt{a^2+2agt}\}$ devait vérifier l'équation $-\sqrt{\frac{2x}{g}}=t-\frac{x}{a}$. Pour le faire voir, je la substitue dans cette équation, qui devient ainsi, après avoir changé les signes des deux membres,

$$\frac{1}{g}\sqrt{2a\{gt+a+\sqrt{a^2+2agt}\}}=\frac{1}{g}\{gt+a+\sqrt{a^2+2agt}\}-t \quad [26].$$

Pour séparer les deux radicaux qui se trouvent dans le premier membre, j'effectue la multiplication indiquée sous le premier radical, puis je pose $A=2agt+2a^2$, $\sqrt{B}=2a\sqrt{a^2+2agt}$, d'où je tire

$$\sqrt{A^2-B}=\sqrt{4a^2g^2t^2+8a^3gt+4a^4-4a^4-8a^3gt}=2agt.$$

La formule [24] est donc applicable ici, et en y remplaçant A et B par leurs valeurs, il viendra

$$\sqrt{2a\left\{gt+a+\sqrt{a^2+2agt}\right\}}=\sqrt{2agt+a^2}+a,$$

et il est alors facile de voir que l'égalité [26] se réduit à une identité.

262. Problème V. *Étant donnés la somme* a^2 *des carrés de deux nombres et leur produit* b^2, *trouver chacun d'eux.*

Soient x et y ces deux nombres, les équations du problème seront

$$x^2+y^2=a^2,$$
$$xy=b^2.$$

On tire de la deuxième

$$y=\frac{b^2}{x},$$

et, en substituant cette valeur dans la première, il viendra

$$x^4-a^2x^2+b^4=0,$$

d'où

$$x=\pm\sqrt{\frac{a^2\pm\sqrt{a^4-4b^4}}{2}}.$$

On voit ici que la quantité $A^2-B=\frac{a^4}{4}-\left(\frac{a^4}{4}-b^4\right)=b^4$ est un carré parfait; donc on pourra appliquer les formules du numéro précédent, et en le faisant, on trouvera

$$x=\pm\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{a^2+2b^2}\pm\sqrt{a^2-2b^2}\right\}.$$

Comme les équations proposées sont symétriques en x et en y, on en conclut immédiatement

$$y=\pm\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt{a^2+2b^2}\pm\sqrt{a^2-2b^2}\right\}.$$

D'où il semble résulter seize couples de valeurs de x et de y.

Mais il n'en est pas ainsi, car le produit xy devant être égal à $+b^2$, il faut que le radical $\sqrt{a^2-2b^2}$ ait des signes contraires dans les valeurs de x et de y, et que les signes qui précèdent les accolades soient les mêmes; ainsi

$$x=\pm\tfrac{1}{2}\{\sqrt{a^2+2b^2}\pm\sqrt{a^2-2b^2}\},$$
$$y=\pm\tfrac{1}{2}\{\sqrt{a^2+2b^2}\mp\sqrt{a^2-2b^2}\},$$

les signes se correspondant dans ces deux formules, c'est-à-dire que l'on doit prendre à la fois dans toutes deux les signes supérieurs ou les signes inférieurs. Si, pour abréger, on représente le premier radical par 2α et le second par 2β, on formera donc les quatre couples

$$x=\alpha+\beta,\qquad y=\alpha-\beta;$$
$$x=\alpha-\beta,\qquad y=\alpha+\beta;$$
$$x=-(\alpha+\beta),\qquad y=-(\alpha-\beta);$$
$$x=-(\alpha-\beta),\qquad y=-(\alpha+\beta);$$

de sorte qu'il n'y a réellement que les deux couples différents

$$\alpha+\beta \quad \text{et} \quad \alpha-\beta,$$
$$-(\alpha+\beta) \quad \text{et} \quad -(\alpha-\beta),$$

qui satisfassent à la question. Ainsi les solutions du problème seront données par les deux formules

$$x=\pm\tfrac{1}{2}\{\sqrt{a^2+2b^2}+\sqrt{a^2-2b^2}\},$$
$$y=\pm\tfrac{1}{2}\{\sqrt{a^2+2b^2}-\sqrt{a^2-2b^2}\}.$$

On peut obtenir encore les solutions des équations proposées d'une manière beaucoup plus simple. Pour cela, ajoutons le double de la deuxième équation avec la première : il viendra

$$(x+y)^2=a^2+2b^2 \quad \text{d'où} \quad x+y=\pm\sqrt{a^2+2b^2}.$$

Ainsi, on connaît la somme $\pm\sqrt{a^2+2b^2}$ et le produit b^2 des deux nombres demandés; donc (**248**) ces nombres sont les racines de la double équation

$$z^2\mp\sqrt{a^2+2b^2}\,z+b^2=0,$$

de laquelle on tire

$$x=\frac{\pm\sqrt{a^2+2b^2}\pm\sqrt{a^2-2b^2}}{2}.$$

Or, le signe + du premier radical appartient aux deux racines de la première équation, et le signe — de ce radical appartient à celles de la seconde; de sorte qu'il y a deux couples de nombres qui satisfont à la question, savoir :

$$\frac{\sqrt{a^2+2b^2}+\sqrt{a^2-2b^2}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{a^2+2b^2}-\sqrt{a^2-2b^2}}{2};$$

$$\text{et} \quad \frac{-\sqrt{a^2+2b^2}+\sqrt{a^2-2b^2}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-\sqrt{a^2+2b^2}-\sqrt{a^2-2b^2}}{2}.$$

La solution du problème sera donc donnée par les deux formules suivantes :

$$x=\pm\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+2b^2}+\sqrt{a^2-2b^2}\right),$$
$$y=\pm\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+2b^2}-\sqrt{a^2-2b^2}\right),$$

dans lesquelles les signes se correspondent.

On voit que, dans cette deuxième méthode, nous avons évité la résolution d'une équation du quatrième degré, et c'est ce que l'on pourra faire souvent par des *artifices de calcul* que suggérera l'habitude. Le problème suivant en offre un exemple.

263. PROBLÈME VI. *En ajoutant* m *fois la somme de deux nombres à la somme de leurs carrés, on obtient le carré de ce nombre* m, *et on retrouve encore ce même carré en ajoutant le produit de ces deux nombres à la somme de leurs carrés : quels sont ces nombres?*

En appelant x et y les deux nombres demandés, on trouvera pour équations du problème

$$m(x+y)+x^2+y^2=m^2,$$
$$xy+x^2+y^2=m^2.$$

On en tire, conformément à la méthode du n° 257,

$$m(x+y)=xy,$$

et il faudrait actuellement éliminer l'une des deux inconnues

entre cette équation et l'une des proposées; mais on reconnaît facilement que l'équation finale serait une équation complète du quatrième degré, de sorte que le problème proposé semble ne pas être possible, au point où nous en sommes de l'algèbre. Or, je remarque que si l'on connaissait la somme des deux nombres demandés, il serait facile de déduire leur produit de l'équation

$$m(x+y)=xy,$$

et par suite de les obtenir eux-mêmes (248). Si du double de la seconde équation on retranche la première, on trouvera

$$(x+y)^2-m(x+y)-m^2=0,$$

d'où l'on tire

$$x+y=\frac{m(1\pm\sqrt{5})}{2},$$

par conséquent

$$xy=\frac{m^2(1\pm\sqrt{5})}{2}.$$

Les nombres demandés sont donc les racines de l'équation

$$z^2-\frac{m(1\pm\sqrt{5})}{2}z+\frac{m^2(1\pm\sqrt{5})}{2}=0,$$

dans laquelle les signes se correspondent. En résolvant cette équation, on trouvera que les valeurs relatives aux signes supérieurs sont imaginaires, et que celles qui se rapportent aux signes inférieurs sont réelles, de sorte que le problème admet une seule solution *réelle*.

§ III. ANALYSE INDÉTERMINÉE DU DEUXIÈME DEGRÉ.

264. Une équation du deuxième degré à deux inconnues donnant en général la valeur de l'une de ces inconnues en fonction irrationnelle de l'autre, on voit que, pour obtenir les solutions entières de cette équation, il faudra trouver pour l'une des inconnues des valeurs commensurables et entières auxquelles correspondent de pareilles valeurs pour l'autre, de sorte que la question à résoudre pourra devenir très-difficile. C'est ce qui a

lieu en effet; aussi, pour ne pas sortir des éléments, nous nous bornerons à examiner quelques-uns des cas les plus simples qui puissent se présenter, et en particulier celui où l'équation proposée sera privée du carré de l'une des deux inconnues.

265. Considérons donc d'abord l'équation

$$bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0 \qquad [27],$$

dans laquelle b, c, d, e, f représentent des nombres entiers et de plus tous premiers entre eux. On en tire, en la résolvant par rapport à y,

$$y = -\frac{cx^2 + ex + f}{bx + d}.$$

Soit m le facteur par lequel il faut multiplier le numérateur de cette expression de y, pour pouvoir effectuer, en termes entiers, la division de ce numérateur par le dénominateur; désignons par $nx + p$ le quotient de cette division, et par q le reste indépendant de x, nous aurons

$$-my = nx + p + \frac{q}{bx + d} \qquad [28].$$

Il pourra se présenter deux cas, selon que q sera nul ou qu'il ne le sera pas. Examinons d'abord ce second cas.

1° q n'étant pas nul, pour que l'équation [28] détermine des valeurs entières pour y, il *faut* que les valeurs entières que l'on donnera à x rendent la quantité $bx + d$ un diviseur exact de q. En conséquence, on calculera tous les diviseurs de q, et on égalera $bx + d$ à chacun de ces diviseurs, affecté tour à tour du signe $+$ et du signe $-$, et les valeurs entières de x tirées de ces différentes équations seront les seules qui pourront faire partie des solutions que l'on cherche. On substituera donc ces valeurs successivement dans l'équation [28], et, à celles de ces valeurs qui rendront le second membre un multiple de m, et à celles-là seulement, correspondront des valeurs entières de y. On obtiendra donc ainsi toutes les solutions entières de l'équation proposée, lesquelles seront nécessairement en nombre

limité. Il pourra même se faire que l'équation [27] n'admette point de pareilles solutions.

2° Si $q=0$, $(cx^2+ex+f)m$ est alors égal à $(bx+d)(nx+p)$, et par conséquent l'équation [27] revient à

$$-my(bx+d)=(bx+d)(nx+p),$$

ou à

$$(bx+d)(my+nx+p)=0.$$

On satisfera à cette équation, en égalant à zéro chacun des facteurs dont son premier membre est le produit, ce qui donnera

$$bx+d=0,$$
$$my+nx+p=0.$$

Si d est un multiple de b, on pourra accoupler avec $x=-\frac{d}{b}$, toutes les valeurs entières possibles pour y, et on aura ainsi une infinité de solutions entières de l'équation [27]. Si m et n sont des nombres premiers entre eux, on en aura encore une infinité, en résolvant l'équation du premier degré $my+nx+p=0$ (207*).

266. Exemple I. $6xy-3x^2+5y-4x+31=0$. On en tire

$$y=\frac{3x^2+4x-31}{6x+5}.$$

En effectuant la division du numérateur par le dénominateur, on trouvera pour quotient $x+1$ et pour reste -129, chaque dividende partiel ayant été multiplié par 2; mais en multipliant le dividende par un certain nombre, on multiplie le quotient et le reste par ce nombre; si donc on avait multiplié le dividende par 4, le deuxième terme du quotient et le reste n'auraient pas changé, mais le premier terme aurait été multiplié par 2; ainsi

$$4y=2x+1-\frac{129}{6x+5}.$$

Les diviseurs positifs de 129 sont 1, 3, 43 et 129. On posera donc

$6x+5=\pm 1$, $6x+5=\pm 3$, $6x+5=\pm 43$, $6x+5=\pm 129$.

On en tire les valeurs entières suivantes

$$x=-1, \qquad x=-8.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de $4y$, on trouvera

$$4y=-\ 2+1+129=128, \quad \text{d'où} \quad y=32;$$
$$4y=-16+1+\ 3=-12, \quad \text{d'où} \quad y=-3.$$

Ainsi l'équation proposée a deux solutions entières, savoir :

$$\left.\begin{matrix} x=-1 \\ y=32 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x=-8 \\ y=-3 \end{matrix}\right\}.$$

Exemple II. Soit l'équation $2xy-6x^2-4y+x+22=0$. On en tire

$$y=\frac{6x^2-x-22}{2x-4}.$$

Pour faire la division indiquée, on commencera par diviser le diviseur par 2, et on trouvera $6x+11$ pour quotient exact, de sorte que

$$6x^2-x-22=(x-2)(6x+11);$$

donc l'équation proposée revient à

$$(x-2)\{2y-6x-11\}=0,$$

équation qui se décompose dans les deux suivantes

$$x-2=0 \quad \text{et} \quad 2y-6x-11=0.$$

La deuxième n'a pas de solution entière (**205**), et la première fournit une infinité de solutions formées de la combinaison de $x=2$ avec toutes les valeurs entières que l'on voudra donner à y.

267. La méthode que nous venons de développer deviendra impraticable, si $b=0$, c'est-à-dire si le produit xy n'entre pas dans l'équation [27]; dans ce cas, on résoudra encore cette équation par rapport à y, ce qui donnera

$$y=-\frac{cx^2+ex+f}{d}.$$

Cela posé, je dis que si $x=\alpha$ est un nombre entier qui, substitué dans cette équation, donne une valeur entière pour y, tous

les nombres compris dans la formule $x=\alpha+dt$, t désignant un nombre entier quelconque, fourniront des solutions entières de l'équation proposée

$$cx^2+dy+ex+f=0 \qquad [29].$$

En substituant en effet $\alpha+dt$ au lieu de x, dans l'expression de y, il viendra

$$y=-\frac{(c\alpha^2+e\alpha+f)+(2cd\alpha+de)t+cd^2t^2}{d}.$$

Mais, par hypothèse, $c\alpha^2+e\alpha+f$ est un multiple de d; donc, en désignant par q le quotient de la division de $c\alpha^2+e\alpha+f$ par d, on aura

$$y=-q-(2c\alpha+e)t-cdt^2.$$

Ainsi, pour toute valeur entière donnée à t, on aura de pareilles valeurs pour y.

Il suit de là que, si l'équation [29] est soluble en nombres entiers, il y aura au moins une valeur de x qui sera plus petite que d. Désignons en effet par α une valeur entière de x plus grande que d et à laquelle correspond une valeur entière de y; la quantité $\alpha+dt$ jouira de la même propriété, ainsi que nous venons de le voir; mais t étant une indéterminée, on pourra toujours lui assigner une valeur positive ou négative, telle que l'on ait $\alpha+dt<d$, de sorte qu'en appelant θ cette valeur de t, $\alpha+d\theta$ sera une valeur de x moindre que d et qui fera partie d'un couple satisfaisant à l'équation [29].

On voit par là que, pour déterminer toutes les solutions entières de cette équation, il faudra essayer tous les nombres $0, 1, 2, 3, \ldots (d-1)$, et, si on trouve qu'à quelques-uns de ces nombres α, α', α'',... correspondent des valeurs entières β, β', β'',... de y, on obtiendra toutes les solutions de l'équation proposée, en posant

$$\left.\begin{aligned}x&=\alpha+dt\\ y&=\beta-(2c\alpha+e)t-cdt^2\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned}x&=\alpha'+dt\\ y&=\beta'-(2c\alpha'+e)t-cdt^2\end{aligned}\right\},\quad \text{etc.}$$

268. Exemple. Soit l'équation $3x^2+5y-7x-16=0$, on en tirera

$$y=\frac{16+7x-3x^2}{5};$$

puis, on substituera dans cette équation les nombres successifs 0, 1, 2, 3 et 4 au lieu de x, et on verra ainsi qu'à $x=1$ et à $x=3$ répondent $y=4$ et $y=2$; en conséquence, on y substituera de nouveau $1+5t$ et $3+5t$ à la place de x, et on trouvera que les formules générales qui renferment toutes les solutions de l'équation proposée sont

$$\left.\begin{array}{l}x=1+5t\\ y=4+t-15t^2\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}x=3+5t\\ y=2-11t-15t^2\end{array}\right\}.$$

§ IV. DES MAXIMUMS ET DES MINIMUMS.

269. *Si l'on a une certaine fonction d'une variable* x *et que l'on y remplace cette variable par une valeur* a, *telle que la valeur* A *que prendra ainsi la fonction soit plus grande ou plus petite que celles qu'elle reçoit pour des valeurs supérieures et inférieures d'aussi peu que l'on voudra à* a, *on dit que* A *est une valeur* MAXIMUM *ou* MINIMUM *de la fonction proposée.*

La théorie des équations du deuxième degré fournit le moyen de trouver les valeurs de x qui rendent la fonction

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'},$$

un maximum ou un minimum.

En effet, si l'on donne à x une certaine valeur, la fonction prendra une valeur correspondante y, et réciproquement étant donnée cette valeur y de la fonction, on retrouvera la valeur correspondante de x en résolvant l'équation

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=y \qquad [30].$$

Or, on comprend que les valeurs de x tirées de cette équation devant être réelles, les valeurs que peut recevoir y seront assujetties à être renfermées entre certaines limites, et ces limites

seront les valeurs maximum et minimum que peut prendre la fonction proposée.

Chassons donc le dénominateur dans l'équation [30], transposons et ordonnons, et il viendra

$$(a-a'y)x^2+(b-b'y)x+c-c'y=0 \qquad [31].$$

Or, pour que les racines de cette équation soient réelles, il faut et il suffit que les valeurs de y soient telles que l'on ait

$$(b-b'y)^2-4(a-a'y)(c-c'y)>0,$$

le signe $>$ *n'excluant pas celui d'égalité*, ou bien

$$ny^2+2py+q>0 \qquad [32],$$

en développant et posant, pour abréger,

$$b'^2-4a'c'=n, \quad 2ca'+2ac'-bb'=p, \quad b^2-4ac=q.$$

Trois cas principaux peuvent se présenter, suivant que n est positif, nul ou négatif.

Dans le premier et dans le troisième cas, les racines de l'équation

$$ny^2+2py+q=0 \qquad [33]$$

peuvent être réelles et inégales, réelles et égales, ou imaginaires. Si elles sont réelles et inégales, il pourra se faire qu'elles soient toutes deux positives, toutes deux négatives, ou que l'une soit positive et l'autre négative.

Dans le deuxième cas, où $n=0$, les signes des coefficients p et q donneront lieu aux quatre combinaisons suivantes :

$$\left.\begin{matrix}p>0\\q>0\end{matrix}\right\}; \quad \left.\begin{matrix}p>0\\q<0\end{matrix}\right\}; \quad \left.\begin{matrix}p<0\\q>0\end{matrix}\right\}; \quad \left.\begin{matrix}p<0\\q<0\end{matrix}\right\}.$$

Nous allons passer en revue ces différents cas.

270. 1er Cas, $n>0$. 1° y' et y'', *racines de l'équation* [33], *sont réelles et positives*, et je suppose $y'<y''$.

La condition exprimée par l'inégalité [32] revient (**244**) à

$$n(y-y')(y-y'')>0.$$

Cela posé, il est évident que, pour toute valeur positive de y

moindre que y' *, les facteurs $y-y'$ et $y-y''$ sont négatifs, donc le trinome $ny^2+2py+q=n(y-y')(y-y'')$ est positif; donc, en donnant des valeurs convenables à x, y recevra toutes les valeurs moindres que y', et on pourra même rendre y égal à y', puisque ce trinome se réduira alors à zéro, et que nous avons dit que, dans la condition [32], le signe $>$ n'excluait pas le signe $=$.

Mais, pour toute valeur de y comprise entre y' et y'', on aura $y-y'>0$ et $y-y''<0$, de sorte que le trinome $ny^2+2py+q$ étant le produit de deux facteurs positifs par un facteur négatif sera négatif, et l'inégalité [32] ne sera pas satisfaite.

Enfin, pour toute valeur de y plus grande que y'', les facteurs $y-y'$ et $y-y''$ seront positifs, et par conséquent le trinome $ny^2+2py+q$ sera positif; d'ailleurs il s'évanouit pour $y=y''$, et ainsi la condition [32] est vérifiée.

En résumé, on voit que y, c'est-à-dire la fonction $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ peut recevoir toutes les valeurs possibles depuis zéro jusqu'à y'; toutes les valeurs depuis y'' jusqu'à l'infini; mais qu'elle ne peut prendre aucune des valeurs comprises entre y' et y''. Donc *les valeurs* MINIMUMS *de la fonction sont zéro et* y'', *et ses valeurs* MAXIMUMS *sont* y' *et l'infini.*

2° y' *et* y'' *sont négatives.* L'inégalité [32] devient alors

$$ny^2+2py+q=n(y+y')(y+y'')>0,$$

en mettant en évidence les signes des racines de l'équation [33]. Or, il est évident que, quelque valeur positive que l'on assigne à y, cette condition sera toujours remplie, et qu'ainsi on peut donner à cette variable toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à $+\infty$. Donc 0 *et* $+\infty$ *sont les valeurs minimum et maximum de* y.

* Nous supposons qu'on cherche les limites des valeurs positives de la fonction proposée, mais si l'on demandait les limites de ses valeurs négatives, il n'y aurait qu'à changer y en $-y$ dans nos calculs.

3° Supposons $y'<0$ et $y''>0$, et, en mettant en évidence le signe de y', l'inégalité [32] deviendra

$$ny^2+2py+q=n(y+y')(y-y'')>0;$$

d'où l'on voit que, pour toute valeur positive de y moindre que y'', cette inégalité n'aura pas lieu, car les facteurs n et $y+y'$ seront positifs et $y-y''$ sera négatif; mais si l'on donne à y la valeur y'' et toutes les valeurs plus grandes que y'', la condition [32] sera toujours vérifiée; donc y peut recevoir toutes les valeurs à partir de y''; donc, *le minimum de la fonction proposée est* y'', *et son maximum est l'infini.*

4° Supposons que $y''=y'$; le trinome $ny^2+2py+q$ deviendra alors égal à $n(y-y')^2$, de sorte que l'inégalité [32] reviendra à

$$n(y-y')^2>0,$$

laquelle sera toujours satisfaite, quelque valeur que l'on assigne à y. Donc, *le minimum de cette fonction est zéro, et son maximum est* $+\infty$.

5° Si les racines de l'équation [33] sont imaginaires, le premier membre de cette équation sera la somme de deux quantités de mêmes signes que n, c'est-à-dire positives (258),

$$ny^2+2py+q=n\left\{\left(y+\frac{p}{n}\right)^2+\frac{qn-p^2}{n^2}\right\};$$

donc y pourra recevoir toutes les valeurs possibles; donc *elle a zéro pour minimum et* $+\infty$ *pour maximum.*

271. 2° Cas, $n=0$. 1° Supposons $p>0$ et $q>0$. *Le minimum de la fonction sera zéro, et son maximum sera* $+\infty$.

2° $p>0$, $q<0$. L'inégalité [32] revient à

$$2p\left(y-\frac{q}{2p}\right)>0,$$

en mettant en évidence le signe de q. D'où l'on conclura que *la fonction a* $\frac{q}{2p}$ *pour minimum, et* $+\infty$ *pour maximum.*

3° $p<0$, $q>0$. On verra de même que, l'inégalité [32] revenant à

$$2p\left(-y+\frac{q}{2p}\right)>0,$$

le *minimum* de la fonction est zéro, et que son *maximum* est $+\frac{q}{2p}$.

4° $p<0$, $q<0$. L'inégalité [32] ne peut évidemment être vérifiée par aucune valeur positive de y; par conséquent la fonction proposée ne pourra prendre aucune valeur positive, quelque valeur que l'on assigne à x; donc *elle n'a ni minimum ni maximum*.

272. 3° CAS, $n<0$. 1° Supposons que y' et y'', racines de l'équation [33], soient réelles et positives, et que y' soit plus petite que y''. L'inégalité [32] revenant à

$$n(y-y')(y-y'')>0,$$

on voit que l'on ne peut pas donner à y des valeurs moindres que y' ou plus grandes que y''; car, pour de pareilles valeurs, son premier membre sera le produit de trois facteurs négatifs ou d'un facteur négatif par deux facteurs positifs, et ainsi il sera négatif. Au contraire, on pourra assigner à y toutes les valeurs depuis $y=y'$ jusqu'à $y=y''$; en effet, lorsque l'on fera $y=y'$ ou $y=y''$, le premier membre de notre inégalité se réduira à zéro, et, pour toutes les valeurs intermédiaires, il sera positif; car le facteur $y-y''$ sera négatif, ainsi que n, mais $y-y'$ sera positif. *La fonction* y *a donc un minimum qui est* y' *et un maximum qui est* y''.

2° Soient $y'<0$ et $y''<0$. On aura, en mettant en évidence les signes de y' et de y'',

$$ny^2+2py+q=n(y+y')(y+y''),$$

quantité qui restera négative, quelque valeur que l'on assigne à y. Donc cette fonction ne peut devenir positive pour aucune valeur de x, et par conséquent *elle n'admet ni minimum ni maximum*.

3° Soient $y'<0$ et $y''>0$. On a alors

$$ny^2+2py+q=n(y+y')(y-y'');$$

d'où l'on voit que la condition exprimée par l'inégalité [32] ne sera remplie qu'autant que l'on n'assignera pas à y des valeurs

plus grandes que y''; ainsi la fonction proposée pourra prendre toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à y'', donc *elle a zéro pour minimum et* y″ *pour maximum.*

4° $y''=y'$. Alors

$$ny^2+2py+q=n(y-y')^2,$$

de sorte que, pour toute valeur positive de y autre que y', l'inégalité [32] ne pourra pas être satisfaite. La fonction n'admet donc pas d'autre valeur positive que y', et ainsi *elle n'a ni minimum, ni maximum.*

5° Supposons enfin que les racines de l'équation [33] soient imaginaires : le trinome $ny^2+2py+q$ conservant alors constamment le signe de n (**239**), sera par conséquent toujours négatif, et ainsi la fonction proposée ne pourra prendre aucune valeur positive, et *n'aura ainsi ni minimum ni maximum.*

273. Pour déterminer les valeurs de x qui font acquérir à la fonction proposée les *valeurs-limites* que la discussion précédente aura fait découvrir, il faudra substituer ces limites dans l'équation [31], et on résoudra ensuite l'équation résultante.

Mais si l'on remarque que *ces valeurs minimum ou maximum autres que zéro et l'infini, étant les racines* y′ *et* y″ *de l'équation* [33], *leur substitution dans l'équation* [31] *rendra égales les racines de cette équation*, de sorte que chacune d'elles sera la moitié de leur somme; on voit que, pour obtenir ces racines, il n'y aura qu'à dégager x^2 de son coefficient $a-a'y$, ce qui donnera

$$x^2+\frac{b-b'y}{a-a'y}x+\frac{c-c'y}{a-a'y}=0,$$

et à remplacer dans $-\frac{b-b'y}{2(a-a'y)}$, moitié du coefficient de x pris en signe contraire, y par y' ou par y''. En effet, lorsque l'équation du deuxième degré est ramenée à la forme $x^2+px+q=0$, la somme de ses racines est égale au coefficient de x, pris en signe contraire (**245**).

Si y a l'infini pour *maximum*, avant de faire cette hypothèse

dans l'équation [31], on divisera tous les termes de cette équation par y, puis on supposera, dans l'équation résultante, que y croisse au delà de toute limite, ce qui fera évanouir tous les termes qui auront y pour dénominateur. Or, ceci reviendra à égaler à zéro le dénominateur $a'x^2 + b'x + c'$ de la fonction proposée.

On pourra encore, dans tous les cas, remplacer y par sa valeur dans la formule qui donne l'expression des racines de l'équation [31], et lorsqu'on devra y faire $y = \infty$, on agira comme nous l'avons indiqué au n° **149**.

274. Problème I. *Partager un nombre donné* a *en deux parties dont le produit soit maximum.*

Soit x l'une des parties demandées, $a - x$ sera l'autre, et leur produit aura pour expression $x(a-x)$; si donc on représente par y la valeur variable de cette fonction, on trouvera

$$x(a-x) = y, \quad \text{d'où} \quad x^2 - ax + y = 0 \qquad [34].$$

Pour que les racines de cette équation soient réelles, il faut et il suffit que l'on ait

$$a^2 - 4y \geqq 0, \quad \text{d'où} \quad y \leqq \frac{a^2}{4}.$$

Donc, la plus grande valeur que l'on puisse assigner à y est $\frac{a^2}{4}$. Les racines de l'équation [34] devenant égales pour cette valeur de y, chacune d'elles sera égale à $\frac{a}{2}$ (273). Ainsi, *pour partager un nombre donné en deux parties dont le produit soit maximum, il faut le diviser en deux parties égales, et la valeur maximum du produit sera le carré de la moitié du nombre donné.*

275. Il suit de là que, *pour partager un nombre donné en* m *parties dont le produit soit maximum, il faut le diviser en* m *parties égales.* En effet, soient a le nombre dont il s'agit, et $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m$ les m parties dans lesquelles on l'a décomposé et dont le produit est *maximum*; je dis qu'on aura

$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_m$; car, si x_1 n'est pas égal à x_2, on pourra substituer à cette décomposition la suivante :

$$a = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_1 + x_2}{2} + x_3 + \ldots + x_m,$$

et le produit de ces m parties de a sera plus grand que $x_1.x_2.x_3 \ldots x_m$, puisque la somme des deux facteurs égaux $\frac{x_1 + x_2}{2}$ et $\frac{x_1 + x_2}{2}$ étant la même que celle de x_1 et de x_2, le produit $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 > x_1.x_2$. Donc, les m parties de a sont égales.

276. Problème II. *Décomposer le nombre* a *en deux facteurs dont la somme soit minimum.*

Soit x l'un des facteurs demandés, l'autre sera représenté par $\frac{a}{x}$, de sorte que l'équation du problème sera

$$x + \frac{a}{x} = y, \quad \text{d'où} \quad x^2 - yx + a = 0.$$

La condition de réalité des racines de cette équation est

$$y^2 - 4a \geqq 0, \quad \text{d'où} \quad y \geqq 2\sqrt{a};$$

donc, le minimum de y est $2\sqrt{a}$, et la valeur correspondante de x sera $\frac{y}{2} = \sqrt{a}$. Ainsi, *pour décomposer un nombre donné en deux facteurs dont la somme soit minimum, il faut le décomposer en deux facteurs égaux, c'est-à-dire extraire sa racine carrée, et cette somme minimum sera égale au double de cette racine carrée.*

On démontrera, comme au nº **275**, que, *pour décomposer un nombre donné en* m *facteurs dont la somme soit minimum, il faut le décomposer en* m *facteurs égaux.*

277. Problème III. *De tous les triangles rectangles qui ont la même hypoténuse* a, *quel est celui qui a le plus grand ou le plus petit périmètre?*

Soit x un des côtés de l'angle droit, l'autre sera $\sqrt{a^2-x^2}$, et, en désignant par y la somme de ces deux côtés, on aura

$$x+\sqrt{a^2-x^2}=y,$$

d'où, en faisant évanouir le radical et transposant,

$$2x^2-2yx+(y^2-a^2)=0 \qquad [35].$$

La condition de réalité des racines de cette équation est

$$2a^2-y^2 \geqq 0, \quad \text{d'où} \quad y \leqq a\sqrt{2}.$$

Ainsi, le *maximum* de y est $a\sqrt{2}$: donc, de tous les triangles rectangles qui ont la ligne a pour hypoténuse, celui qui a le plus grand périmètre est isocèle, et ce périmètre est égal à cette hypoténuse augmentée de la diagonale du carré dont elle est un des côtés.

Si l'on observe que x ne représentant pas un des côtés de l'angle droit plutôt que l'autre, l'équation [35] doit avoir pour racines les longueurs de ces deux côtés, on en conclura que ces deux racines doivent être positives, et qu'en conséquence son premier membre doit présenter deux variations (255); donc il faut que

$$y^2-a^2>0, \quad \text{d'où} \quad y>a.$$

Le minimum de y est donc a, et alors l'une des racines de l'équation [35] étant nulle, on voit que ce triangle se réduit à son hypoténuse, ainsi qu'on pouvait le prévoir.

§ V. DES EXPRESSIONS IMAGINAIRES.

278. La résolution de l'équation

$$ax^2+bx+c=0$$

nous a conduit à des expressions de x qui deviennent imaginaires lorsque $b^2-4ac<0$. Ces expressions sont alors, comme nous l'avons démontré, la conséquence d'une absurdité dans l'équation proposée (258); cependant elles n'en vérifient pas moins cette équation, *si on les traite d'après les règles ordinaires de l'al-*

gèbre, et que l'on considère le carré de la racine carrée d'une quantité négative comme étant cette quantité elle-même, ce qui est conforme à la définition de la racine carrée. En effet, en remplaçant x par $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, le trinome ax^2+bx+c deviendra

$$\frac{b^2\mp 2b\sqrt{b^2-4ac}+b^2-4ac}{4a}+\frac{-b^2\pm b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+c,$$

ou, en réduisant,

$$\frac{b^2}{2a}\mp\frac{b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-c-\frac{b^2}{2a}\pm\frac{b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+c,$$

et il est évident que cette quantité est identiquement nulle.

279. *Les racines imaginaires des équations du second degré peuvent se ramener à la forme*

$$x=\alpha\pm\beta\sqrt{-1},$$

α et β désignant des quantités réelles.

Considérons en effet l'expression $\sqrt{-\mathrm{A}}$, et désignons par a la racine carrée *absolue* de la quantité *positive* A : nous pourrons poser $\sqrt{-\mathrm{A}}=ay$, pourvu que le carré de ay soit égal à $-\mathrm{A}$; ainsi on aura

$$a^2y^2=-\mathrm{A}, \quad \text{d'où} \quad y^2=-1,$$

puisque a étant la racine carrée de A, on a $a^2=\mathrm{A}$. On tire de là $y=\pm\sqrt{-1}$, et par conséquent, si l'*on convient* d'indiquer par $\pm a\sqrt{-1}$ le produit de a par $\pm\sqrt{-1}$, on aura

$$\sqrt{-\mathrm{A}}=\pm a\sqrt{-1}=\pm\sqrt{\mathrm{A}}\sqrt{-1}.$$

Cela posé, la formule

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

revient à

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}},$$

en effectuant la division de chaque terme du numérateur par le dénominateur $2a$. Si donc la quantité $\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$ est négative, et que l'on représente $-\frac{b}{2a}$ par α et la racine carrée de la quantité positive $\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$ par β, cette formule deviendra

$$x=\alpha\pm\beta\sqrt{-1}.$$

280. Remarquons que quand $b^2-4ac=0$, β qui représente la racine carrée de $\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=\frac{4ac-b^2}{4a^2}$, devient zéro, et qu'en même temps les deux valeurs de x se réduisent à $-\frac{b}{2a}$, c'est-à-dire à α : pour rendre la formule $x=\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$ applicable au cas où $b^2-4ac=0$, *on conviendra que le produit* $\beta\sqrt{-1}$ *devient nul lorsque* $\beta=0$.

281. D'après ce que nous avons établi au n° **278**, *lorsque des expressions imaginaires de la forme* $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$ * *entreront dans un calcul*, sans leur attacher aucune idée de quantité, ce qui serait absurde, ***nous*** CONVIENDRONS *de les soumettre aux règles mêmes que nous avons établies pour les quantités réelles.*

282. Par conséquent, nous devons admettre comme vrais, pour des expressions imaginaires de la forme $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, tous les théorèmes que nous avons établis pour des quantités réelles, et dont les démonstrations sont fondées uniquement sur les règles du calcul de ces quantités. Ainsi, la démonstration que nous avons donnée de ce principe : *une équation du deuxième degré n'a pas plus de deux racines* (223), s'applique au cas où ces racines sont des imaginaires de la forme $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$; mais elle ne prouve pas qu'une pareille équation n'a pas de racines imaginaires d'une autre forme, parce que les

* On entend, en général, par *expression imaginaire* toute expression qui n'est susceptible d'aucune valeur réelle, soit positive, soit négative. Ainsi toute racine de degré pair d'une quantité négative est imaginaire. Telles sont $\sqrt[4]{-2}$, $\sqrt[6]{-2}$, $\sqrt[8]{-2}$, etc.

règles relatives au calcul de ces autres expressions imaginaires n'étant pas établies, nous ignorons si les théorèmes sur lesquels nous nous sommes appuyé dans cette démonstration seraient encore vrais pour de pareilles expressions.

283. Remarquons toutefois que, dans toute la suite de cet ouvrage, nous n'aurons à considérer que des expressions imaginaires telles que $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$; ainsi, quand nous écrirons le mot *imaginaire*, on devra toujours entendre qu'il s'agit d'une expression de cette forme.

284. Si l'on combine successivement par voie d'addition, de soustraction, de multiplication et de division les deux expressions imaginaires $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ et $\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$, on trouvera que

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})+(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})=(\alpha+\alpha')+(\beta+\beta')\sqrt{-1};$$

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})-(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})=(\alpha-\alpha')+(\beta-\beta')\sqrt{-1};$$

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})\times(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})=\alpha\alpha'+\beta\alpha'\sqrt{-1}+\alpha\beta'\sqrt{-1}-\beta\beta'$$
$$=(\alpha\alpha'-\beta\beta')+(\beta\alpha'+\alpha\beta')\sqrt{-1};$$

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\alpha'+\beta'\sqrt{-1}}=\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})(\alpha'-\beta'\sqrt{-1})^*}{(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})(\alpha'-\beta'\sqrt{-1})}$$
$$=\frac{(\alpha\alpha'+\beta\beta')+(\beta\alpha'-\alpha\beta')\sqrt{-1}}{\alpha'^2+\beta'^2}=\frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'}{\alpha'^2+\beta'^2}+\frac{\beta\alpha'-\alpha\beta'}{\alpha'^2+\beta'^2}\sqrt{-1}.$$

En comparant le deuxième membre de chacune de ces éga-

---

* On a indiqué le quotient de la division de $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ par $\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$ sous la forme d'une fraction, et on a multiplié les deux termes de cette fraction par $\alpha'-\beta'\sqrt{-1}$, afin que le dénominateur, devenant le produit de la somme de deux quantités par leur différence, se réduise à la différence des carrés de ces deux quantités, c'est-à-dire à une quantité réelle.

Une transformation analogue s'emploie fréquemment pour rendre rationnel le dénominateur d'une fraction, quand il se compose d'un terme commensurable et d'un terme incommensurable du deuxième degré. Ainsi, par exemple, si l'on a les deux expressions

$$\frac{A}{a+\sqrt{b}} \quad \text{et} \quad \frac{A}{a-\sqrt{b}},$$

lités au premier, on reconnait que, *lorsque l'on soumet des expressions imaginaires aux quatre premières opérations de l'algèbre, le résultat est toujours une expression imaginaire de la même forme* $\alpha+\beta\sqrt{-1}$.

Nous verrons plus tard qu'il en est encore ainsi pour l'extraction des racines d'un degré quelconque; mais nous pouvons le vérifier dès à présent pour la racine carrée.

En effet, les formules [24] et [25] que nous avons établies au n° **260** étant vraies, quelques valeurs que l'on y attribue aux lettres A et B, puisque l'on retombe sur des identités en élevant au carré les deux membres de chacune, nous pourrons y faire $A=\alpha$ et $\sqrt{B}=\beta\sqrt{-1}$, ou $B=-\beta^2$, et on trouvera ainsi que

$$\sqrt{\alpha\pm\beta\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\pm\sqrt{\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}.$$

Or, $\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$ est une quantité positive que nous pouvons représenter par α'^2; mais $\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$ est une quantité négative que je désignerai par $-\beta'^2$; nous aurons donc

$$\sqrt{\alpha\pm\beta\sqrt{-1}}=\alpha'\pm\beta'\sqrt{-1},$$

ce qu'il fallait démontrer.

285. Si, dans ces mêmes formules [24] et [25] du n° **260**, on fait $A=0$ et $B=-1$, d'où $\sqrt{A^2-B}=1$, on en tirera

$$\sqrt{+\sqrt{-1}}=\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sqrt{-\sqrt{-1}}=\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \quad [36].$$

On déduit de ces formules ce résultat remarquable

$$\sqrt{+\sqrt{-1}}+\sqrt{-\sqrt{-1}}=\sqrt{2} \quad [37].$$

---

on multipliera les deux termes de la première par $a-\sqrt{b}$ et ceux de la seconde par $a+\sqrt{b}$; ce qui donnera

$$\frac{A}{a+\sqrt{b}}=\frac{A(a-\sqrt{b})}{a^2-b} \quad \text{et} \quad \frac{A}{a-\sqrt{b}}=\frac{A(a+\sqrt{b})}{a^2-b}.$$

Ces transformations doivent être remarquées avec soin.

286. Remarquons que les quatre premières puissances de $+\sqrt{-1}$ étant

$$(+\sqrt{-1})^1=+\sqrt{-1},\ (+\sqrt{-1})^2=-1,\ (+\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1},$$
$$(+\sqrt{-1})^4=+1,$$

si l'on forme les puissances suivantes de $+\sqrt{-1}$, on retrouvera périodiquement

$$+\sqrt{-1},\quad -1,\quad -\sqrt{-1},\quad +1.$$

On peut donc établir les quatre formules qui suivent :

$$\left.\begin{array}{l}(+\sqrt{-1})^{4n}=+1,\ (+\sqrt{-1})^{4n+1}=+\sqrt{-1}\\ (+\sqrt{-1})^{4n+2}=-1,\ (+\sqrt{-1})^{4n+3}=-\sqrt{-1}\end{array}\right\}\ [38].$$

On en déduit

$$\left.\begin{array}{l}(-\sqrt{-1})^{4n}=+1,\ (-\sqrt{-1})^{4n+1}=-\sqrt{-1}\\ (-\sqrt{-1})^{4n+2}=-1,\ (-\sqrt{-1})^{4n+3}=+\sqrt{-1}\end{array}\right\}\ [39].$$

Ces formules conviennent à toutes les puissances, car tout nombre entier est nécessairement de la forme $4n$, $4n+1$, $4n+2$ ou $4n+3$.

287. Si l'on extrait la racine carrée de la somme des carrés des deux quantités α et β, le résultat $+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ est dit le *module* de l'expression $\alpha+\beta\sqrt{-1}$. Ainsi, le module de $4+3\sqrt{-1}$ est $+\sqrt{16+9}=+5$.

288. *Deux expressions imaginaires sont dites* CONJUGUÉES *lorsqu'elles ne diffèrent que par le signe du coefficient de* $\sqrt{-1}$. Telles sont $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ et $\alpha-\beta\sqrt{-1}$. *Deux pareilles expressions ont le même module.*

289. THÉORÈME I. *Pour qu'une expression imaginaire* $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ *soit nulle, il faut et il suffit que son module* $+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ *soit égal à zéro.*

En effet, si le module $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ n'est pas égal à zéro, α et β ne seront pas nuls en même temps, et par conséquent $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ ne sera pas non plus égal à zéro. En second lieu, si $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ est

nul, α et β sont nécessairement égaux à zéro, et alors $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ est identiquement nul (280).

290. Théorème II. *Le module du produit de deux facteurs imaginaires est égal au produit de leurs modules.*

En effet, nous avons vu que le produit de $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ par $\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$ est $(\alpha\alpha'-\beta\beta')+(\alpha\beta'+\beta\alpha')\sqrt{-1}$, et qu'ainsi le module de ce produit est

$$\sqrt{(\alpha\alpha'-\beta\beta')^2+(\alpha\beta'+\beta\alpha')^2}=\sqrt{\alpha^2\alpha'^2+\beta^2\beta'^2+\alpha^2\beta'^2+\beta^2\alpha'^2},$$

en effectuant les opérations indiquées sous le radical et réduisant ensuite. Mais si l'on met α^2 et β^2 en facteur commun des quantités qu'ils multiplient, on trouvera enfin que l'expression de ce module revient à

$$\sqrt{\alpha^2(\alpha'^2+\beta'^2)+\beta^2(\alpha'^2+\beta'^2)}=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha'^2+\beta'^2)},$$

ce qui démontre le théorème, car les modules des deux facteurs que nous avons multipliés sont respectivement $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ et $\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}$.

291. Théorème III. *Le module du quotient de la division de deux expressions imaginaires est égal au quotient de leurs modules.* Soient, en effet, $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ et $\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$, ces deux expressions, et $\alpha''+\beta''\sqrt{-1}$ leur quotient (284) ; on aura

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=(\alpha'+\beta'\sqrt{-1})(\alpha''+\beta''\sqrt{-1}),$$

et par conséquent (290)

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}.\sqrt{\alpha''^2+\beta''^2},\quad \text{d'où}\quad \sqrt{\alpha''^2+\beta''^2}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

292. Théorème IV. *Pour qu'un produit de facteurs imaginaires soit nul, il faut et il suffit que l'un de ces facteurs soit égal à zéro.*

En effet, le produit de plusieurs facteurs imaginaires étant lui-même une expression de la même forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ (284), pour que ce produit soit égal à zéro, il faut et il suffit que son

module soit nul (289); or, ce module est le produit des modules des facteurs que l'on considère (290), et ces modules sont des quantités réelles, de sorte que leur produit ne peut être nul qu'autant que l'un d'eux est égal à zéro *; mais alors le facteur imaginaire correspondant à ce module est zéro, donc notre théorème se trouve démontré.

---

* Il suit évidemment de la définition de la multiplication (*Arith.*, 23), qu'un produit de *quantités réelles* n'est pas nul, si aucun de ses facteurs ne l'est; et qu'au contraire, il est égal à zéro si le multiplicande étant nul, le multiplicateur est commensurable; il en est de même si ce multiplicateur est irrationnel, puisque le produit est alors la limite des produits que l'on obtient, en remplaçant ce multiplicateur incommensurable par des facteurs commensurables qui tendent à en différer d'une quantité moindre que toute grandeur donnée (*Arith.*, 238). Si c'est le multiplicateur qui est nul, le produit est encore égal à zéro, car si l'on considère le produit $a.b$ de deux quantités réelles et finies, il suffira, pour le rendre moindre qu'une quantité donnée δ, de donner à b une valeur moindre que $\frac{\delta}{a}$; donc lorsque le facteur b tend vers zéro, le produit $a.b$ tend aussi vers zéro. Donc *pour qu'un produit de facteurs réels et finis soit nul, il faut et il suffit que l'un d'eux le soit.*

On ne saurait conclure *immédiatement* qu'il en est de même d'un produit de facteurs imaginaires, car on conçoit très-bien que les termes d'un pareil produit pourraient s'entre-détruire, sans qu'aucun de ces facteurs fût égal à zéro.

CHAPITRE IX.

PUISSANCES ET RACINES DES QUANTITÉS ALGÉBRIQUES.

---

§ I. PUISSANCES DES MONOMES.

293. Nous allons nous occuper de la formation des puissances des quantités algébriques et de l'extraction de leurs racines, en suivant la marche que nous nous sommes tracée dans ce que nous avons dit jusqu'ici du calcul algébrique, c'est-à-dire en traitant d'abord des quantités monomes, puis des polynomes; mais, à cause de la liaison intime qu'ont entre elles la formation des puissances et l'extraction des racines, nous ferons suivre immédiatement ces opérations dans les deux divisions que nous venons d'indiquer.

294. Une puissance d'une quantité étant le produit d'autant de facteurs égaux à cette quantité qu'il y a d'unités dans l'exposant de cette puissance, il résulte immédiatement des règles données pour la multiplication des monomes que, *pour élever un monome quelconque à une certaine puissance, il faut élever son coefficient à cette puissance* (40) *et multiplier l'exposant de chaque lettre par celui de cette même puissance*, car l'exposant que chaque lettre aura dans la puissance demandée doit être égal à l'exposant dont elle est affectée dans le monome proposé, répété autant de fois qu'il y a d'unités dans l'exposant de cette puissance. *On donnera d'ailleurs au résultat le signe + si l'exposant de la puissance demandée est pair, et le signe même qu'a le monome, s'il est impair* (38). Ainsi, $(-5a^2b^4c^3d)^3 = -5a^2b^4c^3d \times -5a^2b^4c^3d \times -5a^2b^4c^3d = -125a^6b^{12}c^9d^3$. De même $(\pm 3ab^2c^5)^4 = +81a^4b^8c^{20}$.

§ II. RACINES DES MONOMES.

295. Il suit immédiatement de la règle précédente que, *pour extraire d'un monome une racine d'un certain degré*,

il faut extraire une pareille racine de son coefficient, et diviser l'exposant de chaque lettre par l'indice de la racine demandée. On se rappellera d'ailleurs que toute racine de degré pair doit être affectée du double signe $\pm$, *et que toute racine de degré impair porte le signe de la quantité dont on l'extrait* (195). On trouvera ainsi que $\sqrt[4]{16a^8b^{12}c^4} = \pm 2a^2b^3c$ et que $\sqrt[3]{-27a^3b^6c^{15}} = -3ab^2c^5$.

296. Corollaire. *Pour que la racine d'un monome puisse être obtenue exactement, il faut et il suffit que son coefficient soit une puissance parfaite du degré marqué par l'indice de cette racine, et que l'exposant de chaque lettre soit divisible par cet indice.* Lorsque ces conditions ne seront pas remplies, on ne pourra qu'indiquer l'opération arithmétique qu'il faudra faire, quand on substituera des nombres aux lettres; mais cette expression sera souvent susceptible de simplification. On sait, en effet, que pour élever un produit à une certaine puissance, il faut élever chacun de ses facteurs à cette puissance, et qu'en conséquence, pour extraire la racine m^{me} d'un produit, il n'y a qu'à extraire la racine m^{me} de chaque facteur, et multiplier ces racines entre elles. D'après cela, *si la quantité soumise à un radical peut être décomposée en deux facteurs, dont l'un soit une puissance parfaite du degré marqué par l'indice de ce radical, on extraira la racine de ce facteur, et on la multipliera par la racine indiquée de l'autre.* Si, par exemple, on demande la racine cinquième de $-64a^3b^{10}c^7$, ce qui s'indique $\sqrt[5]{-64a^3b^{10}c^7}$, on observera que $64 = 2^5 . 2$, que $c^7 = c^5 . c^2$ et qu'ainsi $\sqrt[5]{-64a^3b^{10}c^7} = -\sqrt[5]{2^5b^{10}c^5 . 2a^3c^2} = -2b^2c\sqrt[5]{2a^3c^2}$.

297. En général, *pour faire sortir un facteur de dessous un radical, il faut diviser son exposant par l'indice de la racine indiquée, puis l'écrire hors du radical avec le quotient de cette division pour exposant, et sous le radical avec un exposant égal au reste de cette même division.*

298. Au contraire, *pour faire passer sous un radical une quantité qui le multiplie, il faudra l'écrire sous ce radical, en*

l'élevant à la puissance marquée par l'indice de la racine. Ainsi $2a^3\sqrt[5]{b}=\sqrt[5]{32a^{15}b}$.

§ III. CALCUL DES RADICAUX.

299. Le grand nombre de cas dans lesquels on ne peut extraire exactement les racines, et la longueur de l'opération nécessaire pour les avoir par approximation, ont conduit les géomètres à transformer les opérations indiquées sur des radicaux en d'autres opérations telles que l'extraction de la racine fût rejetée à la fin du calcul, pour n'avoir à l'effectuer que sur les expressions les plus simples que l'on puisse obtenir. Nous allons, en conséquence, nous occuper immédiatement du calcul des radicaux.

300. On dit que *deux radicaux sont* SEMBLABLES *lorsqu'ils ont le même indice, et qu'après les avoir simplifiés autant que possible* (**296**), *les quantités soumises à ces radicaux sont elles-mêmes semblables.* Telles sont les expressions $\sqrt[3]{40a^4b^2}$ et $\sqrt[3]{5ab^5}$, car elles reviennent respectivement à $2a\sqrt[3]{5ab^2}$ et à $b\sqrt[3]{5a^{2}}$.

301. *L'addition et la soustraction des radicaux s'effectuent de la même manière que l'addition et la soustraction des quantités rationnelles, et, si le résultat contient des radicaux semblables, on en fait la réduction* (29).

EXEMPLE. $(2a\sqrt[3]{a^2b}+5b\sqrt{a})+(3b\sqrt{a}-4a\sqrt[3]{a^2b}+5ab\sqrt{ab})$ $-(2ab\sqrt{ab}-3a\sqrt[3]{a^2b})=2a\sqrt[3]{a^2b}+5b\sqrt{a}+3b\sqrt{a}-4a\sqrt[3]{a^2b}$ $+5ab\sqrt{ab}-2ab\sqrt{ab}+3a\sqrt[3]{a^2b}=a\sqrt[3]{a^2b}+8b\sqrt{a}+3ab\sqrt{ab}$.

302. On distingue deux cas dans la multiplication et dans la division des quantités radicales, selon que les radicaux ont ou n'ont pas les mêmes indices.

1° *Pour multiplier ou pour diviser l'un par l'autre deux radicaux de même indice, il faut faire la multiplication ou la division des quantités soumises à ces radicaux et couvrir le résultat du radical commun.* Ainsi

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab},\quad \text{et}\quad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

En effet, si on élève, par exemple, $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$ à la puissance m, on trouvera $\frac{a}{b}$; car, pour élever une fraction à une certaine puissance, il faut élever ses deux termes à cette puissance (84), donc la fraction $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$ est la racine m^{me} de $\frac{a}{b}$ (*Arith.*, **190**).

2° *Si les deux radicaux que l'on veut multiplier ou diviser l'un par l'autre n'ont pas le même indice, on les y réduit, ce qui ramène au cas précédent.*

Occupons-nous donc de *la réduction des radicaux au même indice.* Nous établirons d'abord le principe suivant :

303. *On n'altère pas la valeur d'un radical en multipliant l'indice de ce radical par un certain nombre entier et positif, pourvu que l'on élève la quantité qui lui est soumise à la puissance dont l'exposant est égal à ce nombre.* En effet, on a identiquement

$$(\sqrt[m]{a})^m = a;$$

si on élève les deux membres de cette égalité à la puissance n, il viendra (**294**)

$$(\sqrt[m]{a})^{mn} = a^n,$$

ce qui exprime que $\sqrt[m]{a}$ est la racine du degré mn de a^n (*Arith.*, **190**); donc

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n};$$

cette égalité démontre le principe énoncé, et nous apprend, en outre que l'*on n'altère pas la valeur d'un radical, en divisant son indice par un certain nombre entier, pourvu que l'on extraie en même temps de la quantité qui lui est soumise une racine dont l'indice est égal à ce nombre.*

304. Cela posé, *pour réduire plusieurs radicaux au même indice, on cherchera le plus petit multiple de tous leurs indices; on divisera ce plus petit multiple successivement par chaque indice, puis on multipliera l'indice de chaque radical par le quotient correspondant, et on élèvera en même temps la quantité*

*soumise à ce radical à la puissance dont l'exposant est égal à ce quotient**. Il est évident, en effet, que de cette manière chaque radical a conservé sa valeur (303) et que chacun a actuellement pour indice le plus petit multiple des indices primitifs.

EXEMPLE. *Faire le produit des quantités*

$$\sqrt[4]{a^2-b^2} \quad \text{et} \quad \sqrt[6]{a^2+b^2}.$$

Le plus petit multiple de 4 et de 6 est 12; $\frac{12}{4}=3$, $\frac{12}{6}=2$; donc

$$\sqrt[4]{a^2-b^2}\times\sqrt[6]{a^2+b^2}=\sqrt[12]{(a^2-b^2)^3.(a^2+b^2)^2}=\sqrt[12]{(a^4-b^4)^2.(a^2-b^2)}.$$

305. *Pour élever un radical à une certaine puissance, on élève à cette puissance la quantité qui lui est soumise;* ainsi $(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{a^n}$. En effet, il résulte de la règle donnée pour multiplier entre eux plusieurs radicaux qui ont le même indice, que pour élever $\sqrt[m]{a}$ à la n^{me} puissance, il faut faire le produit de n facteurs égaux à a, ce qui donnera a^n, et extraire de ce résultat la racine m^{me}. Donc

$$(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{a^n}.$$

306. *Si l'indice du radical est divisible par l'exposant de la puissance, on* DEVRA *le diviser par cet exposant.* En effet, on a

$$(\sqrt[mn]{a})^n=\sqrt[mn]{a^n}\,(305)=\sqrt[m]{a}\,(303).$$

307. *Si l'indice du radical et l'exposant de la puissance ont un facteur commun, on* DEVRA *diviser l'indice par ce facteur, et élever la quantité soumise au radical à une puissance dont l'exposant est égal au quotient de celui de la puissance proposée par ce même facteur.* Ainsi $(\sqrt[mn]{a})^{np}=\sqrt[m]{a^p}$. En effet, on a

$$(\sqrt[mn]{a})^{np}=\sqrt[mn]{a^{np}}\,(305)=\sqrt[m]{a^p}\,(303).$$

---

* Il est bon de remarquer l'analogie qui existe entre cette règle et celle que l'on suit pour réduire plusieurs fractions au plus petit dénominateur commun.

308. *Pour extraire une racine d'un radical, on multiplie l'indice de ce radical par celui de cette racine.* Ainsi $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$. En effet, nous venons de voir (305) que

$$(\sqrt[mn]{a})^n=\sqrt[m]{a},$$

ce qui signifie que $\sqrt[mn]{a}$ est la racine n^{me} de $\sqrt[m]{a}$.

309. *Si la quantité soumise au radical est une puissance parfaite du degré de la racine à extraire, on* DEVRA *extraire cette racine;* ainsi $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n}}=\sqrt[m]{a}$. En effet,

$$(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{a^n},$$

ce qui signifie que $\sqrt[m]{a}$ est la racine n^{me} de $\sqrt[m]{a^n}$.

310. Il résulte immédiatement de là que *si l'on a plusieurs racines successives à extraire, on pourra intervertir l'ordre dans lequel on doit extraire ces racines;* $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$.

311. Nous avons vu que la racine carrée d'un nombre avait deux valeurs, et nous démontrerons plus tard qu'un radical a toujours autant de valeurs distinctes qu'il y a d'unités dans son indice : or, *dans tout ce qui précède, nous avons constamment supposé que les quantités radicales que nous considérions étaient* RÉELLES, *et nos raisonnements ont porté uniquement sur les* VALEURS ABSOLUES *des radicaux;* il faut donc bien se garder d'attribuer aux règles, établies ci-dessus, une extension plus grande que celle que nous leur avons donnée, autrement on s'exposerait à des erreurs grossières. Ainsi, par exemple, si, considérant l'expression $\sqrt{-a^2}$, on multipliait l'indice du radical par 2, et qu'on élevât au carré la quantité soumise au radical, on trouverait $\sqrt{-a^2}=\sqrt[4]{a^4}=\pm a$, ce qui est évidemment absurde, et cependant on aurait appliqué exactement le principe du nº 305. Nous verrons plus tard comment doivent se modifier les règles que nous avons établies plus haut, lorsque l'on veut considérer les radicaux dans toute leur généralité; toutefois nous allons examiner ici quelques-uns des cas qui se présentent le plus

souvent, lorsqu'on a à multiplier entre eux des radicaux imaginaires. *Nous supposerons que chaque radical n'ait pas d'autre signe que celui dont il sera affecté.*

1° Soit à multiplier $+\sqrt{-a}$ par $+\sqrt{-a}$; la règle du n° 269 donne $\sqrt{+a^2}=\pm a$. Ainsi il semble qu'il y ait incertitude sur la valeur de ce produit. Est-il $+a$ ou $-a$? Pour lever cette difficulté, je rappellerai l'observation que j'ai déjà faite (195), savoir, que quand on ignore comment a été formé le carré $+a^2$, et qu'on demande sa racine, on doit assigner également $+a$ et $-a$, pour cette racine; mais que si l'on sait d'avance laquelle de ces deux quantités a été multipliée par elle-même, pour former $+a^2$, il n'est pas permis, quand on revient sur ses pas, d'en prendre une autre. Or, ce cas est celui qui se présente ici; car, puisque la quantité $+a^2$ comprise sous le radical $\sqrt{+a^2}$, provient de $-a\times-a$, l'ambiguïté cesse et la racine carrée de $+a^2$ est certainement $-a$; donc $+\sqrt{-a}\times+\sqrt{-a}=-a$, ce qui est d'ailleurs une conséquence de la définition de la racine carrée.

2° Soit $+\sqrt{-a}\times-\sqrt{-b}$. La règle du n° 302 donne $-(\sqrt{ab})$. Or devra-t-on prendre la racine carrée de ab positivement ou négativement, et écrire $+\sqrt{-a}\times-\sqrt{-b}=+\sqrt{ab}$ ou $=-\sqrt{ab}$? Pour cela, j'observe que, en désignant par α et par β, les racines carrées respectives de a et de b, on a (279) $+\sqrt{-a}=+\alpha\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-b}=-\beta\sqrt{-1}$, et qu'ainsi $+\sqrt{-a}\times-\sqrt{-b}=-\alpha\beta.(\sqrt{-1})^2=-\alpha\beta\times-1=+\alpha\beta$ $=+\sqrt{ab}$.

§ IV. CALCUL DES EXPOSANTS FRACTIONNAIRES.

312. Nous avons vu que si les exposants des lettres qui entrent dans un monome, sont divisibles par l'indice de la racine à extraire, on obtient cette racine en divisant chacun de ces exposants par cet indice; mais si ces divisions ne peuvent pas se faire exactement, il se présente naturellement à l'esprit l'idée d'indiquer l'extraction de la racine,

en indiquant la division de chaque exposant par l'indice de cette racine. Ainsi nous *conviendrons* désormais que $\sqrt[m]{a^n}$ et $a^{\frac{n}{m}}$ seront deux expressions équivalentes, c'est-à-dire qu'*un exposant fractionnaire signifie qu'il faut élever la quantité, au-dessus de laquelle il est placé, à la puissance marquée par son numérateur, et extraire du résultat une racine dont l'indice est égal à son dénominateur.*

313. Examinons maintenant quelles sont *les règles qu'il faudra suivre dans le calcul des quantités affectées d'exposants fractionnaires*. Ces règles *sont les mêmes que celles que l'on observe quand ces exposants sont entiers*. Cela est évident pour l'addition et pour la soustraction, considérons donc d'abord le cas de la multiplication :

1° Soit $a^{\frac{p}{q}} . a^{\frac{r}{s}}$, je dis que le produit est $a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$. En effet, $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$, $a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[s]{a^r}$; donc $a^{\frac{p}{q}} . a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p} . \sqrt[s]{a^r}=\sqrt[qs]{a^{ps+qr}}$, ou, en revenant aux exposants fractionnaires,

$$a^{\frac{p}{q}} . a^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{ps+qr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

Il suit de là que le symbole $a^{\frac{n}{m}}$ a sur $\sqrt[m]{a^n}$ l'avantage de conduire tout de suite à la simplification dont $\sqrt[m]{a^n}$ est susceptible, lorsque $n>m$. Car soit $n=mq+r$, on aura $a^{\frac{n}{m}}=a^{q+\frac{r}{m}}=a^q . a^{\frac{r}{m}}=a^q \sqrt[m]{a^r}$.

2° On démontrerait de même que $\dfrac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}}=a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$.

3° Proposons-nous maintenant d'élever le monome $a^{\frac{p}{q}}$ à la puissance dont l'exposant est la fraction $\frac{r}{s}$. Cela revient à extraire la racine s^{me} de la r^{me} puissance de ce monome. Ainsi, en substituant aux exposants fractionnaires les expressions radicales qu'elles remplacent, on trouvera successivement

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}}=\sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r}=\sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{pr}}}\,(303)=\sqrt[qs]{a^{pr}}\,(308)=a^{\frac{pr}{qs}}\,(312).$$

Donc *pour élever à une certaine puissance une quantité mo-*

nome affectée d'un exposant fractionnaire, *il faut*, comme pour les exposants entiers, *multiplier l'exposant du monome par celui de la puissance à laquelle on veut l'élever*.

Cette règle comprend évidemment le cas de l'élévation d'un monome à une puissance entière et celui de l'extraction des racines, car on peut, dans la démonstration précédente, supposer $s=1$ ou $r=1$.

314. Considérons actuellement des quantités affectées d'exposants incommensurables, mais auparavant définissons soigneusement ce qu'on doit entendre par *une puissance de degré irrationnel d'une quantité. C'est la limite vers laquelle tendent tous les résultats que l'on obtient, lorsque l'on remplace l'exposant incommensurable par des valeurs rationnelles qui tendent à en différer d'une quantité moindre que toute grandeur donnée.*

315. Supposons que, α et β étant deux quantités incommensurables, on ait à multiplier a^α par a^β. Soient α' et β' deux quantités commensurables variables qui peuvent approcher respectivement de α et de β d'aussi près que l'on voudra ; cela posé, on a, d'après ce qui précède (313),

$$a^{\alpha'}\times a^{\beta'}=a^{\alpha'+\beta'},$$

et cette égalité subsistera toujours, lorsque α' et β' tendront à devenir égaux à α et à β. Or, lorsque deux quantités variables restent constamment égales entre elles, dans tous les états de grandeur par lesquels elles passent, leurs limites sont égales (*Arith.*, **237**); mais les limites de $a^{\alpha'}$ et de $a^{\beta'}$ sont a^α et a^β (**314**), de sorte que la limite du produit $a^{\alpha'}\times a^{\beta'}$ est $a^\alpha\times a^\beta$, et que celle de $a^{\alpha'+\beta'}$ est $a^{\alpha+\beta}$; donc

$$a^\alpha\times a^\beta=a^{\alpha+\beta}.$$

La règle que l'on observe dans la multiplication des quantités affectées d'exposants incommensurables est donc la même que quand ces exposants sont commensurables. Il en est de même o ur la division, l'élévation aux puissances et l'extraction des

racines, car il est évident que la démonstration précédente s'appliquerait à ces différents cas.

316. Si, m et n désignant deux quantités positives fractionnaires ou incommensurables, m est plus petit que n et que l'on appelle p leur différence $n-m$, on aura

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}=a^{-p}, \quad \text{et comme} \quad \frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}=\frac{1}{a^p},$$

on en conclura, comme au n° 56, que a^{-p} et $\frac{1}{a^p}$ sont deux symboles équivalents, de sorte qu'il y aura des exposants fractionnaires ou incommensurables négatifs, de même qu'il y en a de positifs. Or, en reprenant pour ces nouveaux exposants, les raisonnements que nous avons faits au n° 88, on verra qu'il faut, dans le calcul des quantités affectées d'exposants fractionnaires ou irrationnels négatifs, suivre les mêmes règles que pour les exposants positifs.

Il est donc démontré que *les règles du calcul des quantités affectées d'exposants sont indépendantes de la nature de ces exposants, qu'ils soient entiers ou fractionnaires, commensurables ou incommensurables, positifs ou négatifs.*

§ V. DES COMBINAISONS.

N. B. Comme la théorie de la formation des puissances des polynomes est fondée sur celle des *combinaisons*, nous allons développer d'abord cette théorie, afin de ne pas interrompre plus tard la suite des raisonnements.

317. *On appelle* ARRANGEMENTS *tous les groupes que l'on obtient, en disposant à la suite les uns des autres, et dans tous les ordres possibles*, 2 *à* 2, 3 *à* 3, 4 *à* 4, *etc., un nombre déterminé d'objets, de manière que le même objet n'entre qu'une fois dans chaque groupe.* Ainsi tous les mots de 5 lettres, que l'on peut former avec les 25 lettres de notre alphabet, sont tous les arrangements de ces 25 lettres 5 à 5, pourvu toutefois qu'une même lettre n'entre pas deux fois dans le même mot.

318. Problème I. *Déterminer le nombre des arrangements que l'on peut faire avec* m *lettres prises* n *à* n.

J'observe d'abord que m lettres prises 1 à 1 donnent évidemment m arrangements : d'où il suit que si, connaissant le nombre des arrangements de m lettres $(n-1)$ à $(n-1)$, on pouvait en déduire le nombre des arrangements de ces m lettres n à n, le problème pourrait être regardé comme résolu, puisque du nombre des arrangements 1 à 1, on déduirait celui des arrangements 2 à 2, de celui-ci on passerait au nombre des arrangements 3 à 3, et ainsi de suite.

Supposons donc formés tous les arrangements des m lettres $(n-1)$ à $(n-1)$: représentons leur nombre par A_{n-1} et par A_n le nombre des arrangements de ces m lettres n à n. Si, à la droite de chaque arrangement de $(n-1)$ lettres, on écrit successivement chacune des $\{m-(n-1)\}$ lettres qui n'y entrent pas, chacun de ces arrangements en fournira évidemment $\{m-(n-1)\}$ de n lettres, et par conséquent le nombre total de ces nouveaux arrangements sera égal à autant de fois $\{m-(n-1)\}$ qu'il y a d'unités dans A_{n-1}, c'est-à-dire qu'il sera égal à $A_{n-1}.\{m-(n-1)\}$. Or, je dis qu'on aura formé ainsi tous les arrangements de m lettres n à n. En effet, soit $abc....rs$ un quelconque de ces arrangements : si on en retranche la dernière lettre, il restera un arrangement $abc....r$ de $(n-1)$ lettres, lequel se trouvera ainsi compris parmi ceux dont nous avons représenté le nombre par A_{n-1}; donc, puisqu'à la droite de chacun de ces arrangements on a écrit successivement chacune des lettres qui n'y entrent pas, la lettre s a été écrite à la droite de $abc....r$, et par conséquent l'arrangement $abc....rs$ a été formé, donc on a obtenu tous les arrangements des m lettres n à n. D'un autre côté, tous les arrangements que l'on a formés sont *distincts*, car deux d'entre eux diffèrent nécessairement ou par la dernière lettre, ou au moins par l'ordre des lettres qui la précèdent; donc enfin

$$A_n = A_{n-1}.\{m-(n-1)\} \qquad [1].$$

Ainsi, en faisant successivement $n=2, =3, =4,\dots$ dans cette formule, on trouvera, puisque $A_1=m$,

$$A_2=m(m-1);$$
$$A_3=A_2(m-2)=m(m-1)(m-2);$$
$$A_4=A_3(m-3)=m(m-1)(m-2)(m-3);$$
etc.,

pour expression du nombre des arrangements de m lettres prises 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, etc.

Mais, pour obtenir la formule générale demandée, on remplacera n successivement par $n-1$, $n-2,\dots$ 3 et 2 dans l'équation [1], ce qui donnera

$$A_{n-1}=A_{n-2}\{m-(n-2)\},$$
$$A_{n-2}=A_{n-3}\{m-(n-3)\},$$
$$\vdots$$
$$A_3=A_2\ (m-2),$$
$$A_2=A_1\ (m-1),$$

Si on multiplie membre à membre toutes ces équations avec l'équation [1], on verra que le produit $A_{n-1}A_{n-2}\dots A_3A_2$ est facteur commun aux deux membres de l'équation-produit; on pourra donc le supprimer, et, en remplaçant A_1 par m, on trouvera ainsi

$$A_n=m(m-1)(m-2)\dots\{m-(n-1)\} \qquad [2].$$

De là cette règle : *Du nombre total des lettres, retranchez successivement les nombres entiers de la suite naturelle depuis zéro jusqu'à celui qui marque le nombre des lettres, moins un, qui doivent entrer dans chaque arrangement; multipliez tous ces restes entre eux, et vous aurez le nombre des arrangements demandé.*

319. *On appelle* PERMUTATIONS *tous les groupes que l'on obtient, en disposant les uns à la suite des autres et dans tous les ordres possibles, un nombre déterminé d'objets, de manière que tous ces objets entrent dans chaque groupe et que chacun n'y entre qu'une fois.* Tels sont tous les changements d'ordre que l'on peut faire subir aux facteurs d'un produit.

320. Problème II. *De combien de permutations un produit de* n *facteurs est-il susceptible ?*

J'observe d'abord qu'un produit de deux facteurs donne évidemment deux permutations : d'où il suit que si, connaissant le nombre des permutations d'un produit de $(n-1)$ facteurs, on pouvait en déduire celui d'un produit de n facteurs, le problème pourrait être regardé comme résolu, car du nombre des permutations d'un produit de 2 facteurs, on déduirait celui des permutations d'un produit de 3 facteurs; de celui-ci, on passerait au nombre des permutations d'un produit de 4 facteurs, et ainsi de suite.

Supposons donc que l'on ait mis de côté l'une des n lettres, et qu'on ait ensuite formé toutes les permutations dont est susceptible le produit des $(n-1)$ facteurs restants. Soient P_{n-1} le nombre de ces permutations et P_n celui des permutations que l'on peut faire avec n lettres. Si maintenant on écrit la lettre isolée, à la droite de chaque permutation de $(n-1)$ lettres, il en résultera P_{n-1} permutations de n lettres, terminées par celle dont il s'agit; de sorte qu'en faisant passer cette lettre successivement par toutes les places, en allant de droite à gauche, on obtiendra autant de fois n permutations de n lettres qu'il y a d'unités dans P_{n-1}; c'est-à-dire que le nombre de ces permutations sera égal à nP_{n-1}. Or, je dis qu'on aura formé ainsi toutes les permutations dont notre produit de n facteurs est susceptible. En effet, soient *csb...ra*, une quelconque de ces permutations et s la lettre qu'on avait d'abord isolée; si on la retranche, il restera une permutation *cb...ra* de $(n-1)$ lettres, laquelle a ainsi été formée. Comme on l'a placée à la droite de toutes les permutations fournies par le produit des $(n-1)$ lettres restantes, cette lettre s a été écrite à la droite de *cb...ra*, ce qui a donné *cb...ras;* mais on lui a fait parcourir toutes les places, en allant de droite à gauche, donc elle est venue se mettre à la gauche de b, et par conséquent la permutation *csb...ra* a été formée. De plus, toutes les permutations que nous avons obtenues sont *distinctes*, car deux quelconques

d'entre elles diffèrent, soit par la place qu'y occupe la lettre s, soit par l'ordre des autres lettres; donc enfin

$$P_n = nP_{n-1} \qquad [3].$$

Ainsi, en faisant successivement $n=3$, $=4$, $=5$,.. dans cette formule, on trouvera

$$P_3 = 3P_2 = 3.2;$$
$$P_4 = 4P_3 = 4.3.2;$$
$$P_5 = 5P_4 = 5.4.3.2;$$
etc.,

pour expression du nombre des permutations d'un produit de 3, de 4, de 5.... facteurs.

Mais, pour obtenir la formule générale demandée, on remplacera n successivement par $(n-1)$, $(n-2)$,...4, 3 dans l'équation [3], ce qui donnera

$$P_{n-1} = (n-1)P_{n-2},$$
$$P_{n-2} = (n-2)P_{n-3},$$
$$\vdots$$
$$P_4 = 4P_3,$$
$$P_3 = 3P_2.$$

En multipliant toutes ces équations membre à membre et avec l'équation [3], omettant le facteur $P_{n-1}P_{n-2}...P_4P_3$ commun aux deux membres de l'équation-produit, et en remplaçant P_2 par 2.1, on trouvera

$$P_n = 1.2.3.4...n \qquad [4].$$

Ainsi, *pour trouver le nombre des permutations d'un produit, multipliez entre eux tous les nombres entiers depuis* 1 *jusqu'à celui qui indique combien il y a de facteurs dans ce produit.*

321. Remarquons qu'en faisant $m=n$ dans la formule [2], elle donnerait le nombre des arrangements que l'on peut obtenir avec n lettres prises n à n, c'est-à-dire le nombre des permutations d'un produit de n facteurs; et en effet son second membre se réduit alors à $n(n-1)(n-2)...2.1$.

322. *On appelle* COMBINAISONS *tous les groupes que l'on ob-*

tient en disposant les uns à la suite des autres et dans tous les ordres possibles 2 *à* 2, 3 *à* 3, 4 *à* 4,... *un nombre déterminé d'objets, de manière que le même objet n'entre qu'une fois dans chaque groupe et que deux quelconques de ces groupes diffèrent au moins par un des objets qui s'y trouvent.* Tels sont tous les produits différents que l'on obtient en multipliant, par exemple, 4 facteurs 3 à 3.

325. Problème III. *Combien peut-on former de combinaisons avec* m *lettres prises* n *à* n?

Supposons que l'on ait formé toutes les combinaisons n à n de nos m lettres, et désignons-en le nombre par C_n. Si l'on veut obtenir tous les arrangements n à n que peuvent fournir ces m lettres, il suffira d'effectuer sur chaque combinaison toutes les permutations dont elle est susceptible ; car, si l'on prétendait que l'arrangement de n lettres $abc...rs$ n'a pas été obtenu, on observerait que le produit dont les facteurs sont a, b, c,...r, s se trouve nécessairement parmi ceux dont C_n désigne le nombre ; et comme on a fait subir à chacun de ces produits toutes les permutations qu'il peut admettre, il faut en conclure que l'arrangement $abc...rs$ a été formé.

Cela posé, puisque chaque produit de n facteurs admet P_n permutations, les C_n produits de n facteurs chacun, fourniront donc C_n fois P_n permutations ; donc

$$A_n = P_n \,.\, C_n, \text{ d'où } C_n = \frac{A_n}{P_n} \qquad [5],$$

formule qui nous apprend que *pour calculer le nombre des combinaisons* n *à* n *que l'on peut obtenir avec* m *lettres, il faut diviser le nombre des arrangements dont ces* m *lettres sont susceptibles* n *à* n, *par le nombre des permutations qu'on peut former avec* n *lettres.*

Si, dans la formule [5], on remplace A_n et P_n par leurs valeurs données par les formules [2] et [4], il viendra

$$C_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\{m-(n-1)\}}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\, n} \qquad [6].$$

Telle est la formule qui résout le problème.

Pour faire usage de cette formule, on observera que les facteurs du numérateur formant une progression par différence dont la raison est l'unité, il suffira, pour écrire ce numérateur, de former son dernier facteur $\{m-(n-1)\}$. D'ailleurs il y a autant de facteurs au dénominateur qu'au numérateur. Veut-on le nombre des combinaisons de m lettres 2 à 2, ou 3 à 3, ou 4 à 4,... on fera $n=2$, ou $=3$, ou $=4$,... ce qui donnera $\{m-(n-1)\}=m-1$, ou $=m-2$, ou $=m-3$,... et par conséquent

$$C_2=\frac{m(m-1)}{1\,.\;2},$$

$$C_3=\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\;2\,.\;3},$$

$$C_4=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\;2\,.\;3\,.\;4},$$

etc.

Si, dans la formule [5], on remplace A_n et P_n par leurs valeurs données par les formules [1] et [3], on trouvera

$$C_n=\frac{A_{n-1}}{P_{n-1}}\cdot\frac{m-n+1}{n};$$

mais, en vertu de la formule [5], $\frac{A_{n-1}}{P_{n-1}}$ est égal à C_{n-1}, donc

$$C_n=C_{n-1}\cdot\frac{m-n+1}{n} \qquad [7],$$

formule qui donne le nombre des combinaisons de m lettres n à n en fonction du nombre des combinaisons de ces m lettres $(n-1)$ à $(n-1)$. Ainsi, en observant que $C_1=m$, ce qui est évident, on pourra déduire successivement de la formule [7], les valeurs que nous avons trouvées plus haut pour C_2, C_3, C_4, etc.

324. *Lorsque le nombre* n *des lettres qui entrent dans chaque combinaison surpasse la moitié de* m, *au lieu de calculer le nombre des combinaisons des* m *lettres* n *à* n, *on cherche celui de leurs combinaisons* (m—n) *à* (m—n), parce que ces deux

nombres sont égaux. Ainsi, veut-on savoir combien on peut former de combinaisons avec 10 quantités prises 8 à 8, on cherchera le nombre de leurs combinaisons 2 à 2, et on trouvera $\frac{10.9}{1.2}=45$. En faisant $m=10$ et $n=8$ dans la formule [6], on aurait eu $\frac{10.9.8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6.7.8}=\frac{10.9}{1.2}$.

Pour démontrer que *le nombre des combinaisons de* m *lettres* n *à* n *est le même que celui de leurs combinaisons* m—n *à* m—n, nous observerons que si l'on divise le produit des m lettres successivement par toutes les combinaisons n à n, les quotients que l'on obtiendra seront toutes les combinaisons $m-n$ à $m-n$ que l'on peut faire avec ces m lettres ; car, si l'on nie que $abc...pqr...uv$ étant le produit de ces m lettres, la combinaison $qr...uv$, par exemple, ait été formée, on répondra qu'en divisant $abc...pqr...uv$ par $abc...p$, combinaison de n lettres, on obtiendra $qr...uv$; or cette division a été faite : donc le nombre des combinaisons de m lettres $m-n$ à $m-n$ est égal à celui de leurs combinaisons n à n.

323. La méthode qui nous a conduit à la formule [5] entraînerait dans de très-grandes longueurs, si on voulait l'employer pour *former toutes les combinaisons de* m *lettres* n *à* n. On pourra résoudre cette question de la manière suivante.

Supposons que l'on ait formé toutes les combinaisons dont nos m lettres sont susceptibles $(n-1)$ à $(n-1)$, et que, dans chacune, on ait rangé les lettres qui y entrent suivant l'ordre alphabétique. Si l'on écrit maintenant, à la suite de chacune de ces combinaisons, successivement toutes les lettres qui suivent la dernière de cette combinaison, je dis que l'on obtiendra toutes les combinaisons de nos m lettres n à n. Car soit $cde...rs$ un produit de n facteurs que l'on prétende n'avoir pas été formé ; on voit, d'après ce qui précède, que le produit $cde...r$ a été fait; donc $cde...rs$ l'a été aussi ; de plus, la même combinaison ne se trouve pas répétée deux fois, puisque, dans chacune, les lettres se succèdent dans l'ordre alphabétique.

326. Exemple. *Former toutes les combinaisons 4 à 4 des 5 lettres* a, b, c, d, e.

Combinaisons 1 à 1... *a, b, c, d, e,*

2 à 2... *ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de.*

3 à 3... *abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde**.

4 à 4... *abcd, abce, abde, acde, bcde***.

***327.** Le nombre des combinaisons n à n que l'on peut obtenir avec m lettres étant nécessairement entier, on doit en conclure que le second membre de la formule [6] est un pareil nombre. On peut toutefois se proposer d'établir directement cette propriété, indépendamment de la théorie des combinaisons. Pour y parvenir, je multiplie les deux termes du deuxième membre de l'équation [6] par $1.2.3...(m-n)$; de cette manière, le numérateur deviendra le produit de la suite naturelle de tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à m, de sorte que si l'on représente par p la différence $(m-n)$, on aura

$$\frac{m(m-1)(m-2)...\{m-(n-1)\}}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ n}=\frac{1.2.3\ .\ .\ .\ m}{1.2.3...n\times1.2.3..p} \quad [8];$$

et il est évident que si nous démontrons que le numérateur de ce deuxième membre contient tous les facteurs premiers de son dénominateur, et chacun autant de fois au moins que celui-ci le contient, il sera prouvé que l'expression proposée est entière.

Soit donc a un *nombre premier* qui ne surpasse pas m; je vais chercher quelle est la plus haute puissance de a qui divise le produit $1.2.3...m$. Pour cela, j'effectue la division de m par a et j'appelle m' la partie entière du quotient, de sorte que $m'a$ est au plus égal à m; par conséquent tous les multiples a, $2a, 3a,...m'a$ de a se trouveront parmi les facteurs de $1.2.3...m$; donc ce produit est divisible par $a.2a.3a...m'a=1.2.3...m'.a^{m'}$.

* *ae, be, ce, de* n'ont pu rien fournir.

** *abe, ace, ade, bce, bde, cde*, n'ont pu rien fournir.

D'où l'on voit que la plus haute puissance de a qui divise $1.2.3...m$, est le produit de $a^{m'}$ par la plus haute puissance de a qui divise $1.2.3...m'$. Mais, par la même raison, celle-ci est le produit de $a^{m''}$ par la plus haute puissance de a qui soit renfermée dans $1.2.3...m''$, si on appelle m'' la partie entière du quotient de m' par a; cette dernière sera semblablement le produit de $a^{m'''}$ par la plus haute puissance de a qui divise $1.2.3....m''$, en désignant par m''' la partie entière du quotient de m'' par a : et on continuera ainsi jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un quotient $< a$. Supposons donc, pour fixer les idées, que m''' soit ce quotient $< a$; le produit $1.2.3...m'''$ ne sera pas divisible par a, et par conséquent la plus haute puissance de a qui divise $1.2.3...m$ sera $a^{m'+m''+m'''}$.

D'après cela, si on nomme $n', n'', n''',...$ et $p', p'', p''',...$ les quotients que l'on trouve en divisant, d'une part, n par a, puis n' par a, ensuite n'' par a...; d'une autre part, p par a, puis p' par a, ensuite p'' par a...; les plus hautes puissances de a qui divisent respectivement $1.2.3...n$ et $1.2.3...p$ seront $a^{n'+n''+n'''+\cdots}$ et $a^{p'+p''+p'''+\cdots}$; de sorte que la plus haute puissance de a contenue dans le produit $1.2.3...n \times 1.2.3...p$ est $a^{n'+n''+n'''+\cdots+p'+p''+p'''+\cdots}$. Mais de l'égalité $m=n+p$, on tire

$$\frac{m}{a}=\frac{n}{a}+\frac{p}{a},$$

et par suite
$$m' = \text{ou} > n' + p',$$
$$m'' = \text{ou} > n'' + p'',$$
$$m''' = \text{ou} > n''' + p''',$$
$$\vdots$$

donc $m'+m''+m'''+\ldots = \text{ou} > n'+n''+n'''+\ldots+p'+p''+p'''+\ldots$

Donc le numérateur $1.2.3...m$ contient le facteur premier a du dénominateur $1.2.3...n \times 1.2.3...p$ à une puissance au moins aussi élevée que celle où il entre dans ce dénominateur ; donc l'expression [8] est entière.

§ VI. BINOME DE NEWTON.

328. Le moyen qui se présente naturellement à l'esprit, pour élever un polynome à une puissance entière et positive, consiste à faire le produit d'autant de facteurs égaux à ce polynome qu'il y a d'unités dans l'exposant de cette puissance : mais ce procédé, déjà très-long par lui-même, a l'inconvénient d'exiger qu'on recommence toujours le même calcul pour chaque cas particulier que l'on veut traiter. *Newton* a trouvé, mais sans en donner la démonstration, une formule générale pour élever directement un binome à telle puissance que l'on veut, sans passer par les puissances inférieures, et on en déduit facilement le moyen de former la même puissance de tout polynome donné.

Parmi un grand nombre de démonstrations que l'on a données de la *formule du binome de Newton*, la suivante, fondée sur la théorie des combinaisons, est la plus élémentaire.

329. Le moyen qui paraît le plus naturel, pour obtenir cette formule, est de former les premières puissances d'un binome $(x+a)$ par des multiplications successives, et de chercher à saisir la loi qui régit les exposants de x et de a dans les développements de ces puissances, ainsi que celle des coefficients numériques des différents termes de chacune. Élevons donc successivement le binome $(x+a)$ à la 1re, à la 2e, à la 3e,... puissance, et nous trouverons

$$(x+a)^1 = x + a,$$
$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3,$$
$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4,$$
$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5,$$
etc.

En considérant attentivement ce tableau, nous remarquerons que *le premier terme de chaque développement est* x *élevé à la même puissance que le binome proposé ; que cet exposant diminue d'une unité, en allant d'un terme au suivant, jusqu'au dernier*

où il est zéro (56, 1°) ; *que les exposants de* a *suivent la loi inverse, de sorte que la somme des exposants de* x *et de* a *dans chaque terme est égale à l'exposant de la puissance demandée.* Cette loi est générale, car, dans le passage d'une puissance à la suivante, la multiplication par $(x + a)$ ne fait qu'augmenter d'une unité les exposants de x et de a dans chaque terme. Ainsi nous pouvons écrire immédiatement la partie algébrique des termes qui doivent entrer dans le développement demandé.

Voyons si nous serons aussi heureux dans la recherche de la loi que suivent les coefficients. Nous reconnaissons, à l'inspection de notre tableau, que *le coefficient du premier terme est l'unité; que celui du deuxième terme est égal à l'exposant de la puissance;* mais pour les termes suivants, nous ne pouvons rien découvrir, sinon que *les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux.* Or, il résulte du procédé de la multiplication algébrique, que ces coefficients numériques naissant des réductions qui se font entre les termes semblables du produit, si on multiplie entre eux m facteurs binomes $(x + a)$, $(x + b)$, $(x + c)$,... $(x + k)$, qui ont tous le même premier terme x et des seconds termes différents, *tous les termes du résultat seront dissemblables*; que, par conséquent, il n'y aura pas de coefficients numériques, de sorte que l'on pourra espérer de découvrir la loi qui régira les termes de ce produit. Cette loi reconnue, il suffira de supposer que les seconds termes de nos binomes deviennent tous égaux à a, et elle deviendra celle que doivent suivre les termes du développement de la m^{me} puissance du binome $(x + a)$.

330. Tâchons donc de découvrir quelle est la forme du produit des m facteurs $(x + a)$, $(x + b)$, $(x + c)$,... $(x + k)$. On voit d'abord que l'on obtiendra un terme quelconque de ce produit, en prenant un terme dans chaque facteur et en multipliant tous ces termes entre eux ; d'où il suit 1° que deux termes de notre produit seront x^m et $abc...k$; 2° qu'il renfermera en outre toutes les puissances de x moindres que la m^{me}; car, si l'on multiplie les premiers termes de $(m-n)$ de nos binomes par les seconds

termes des n autres, on aura un terme du produit, qui contiendra x^{m-n}. En conséquence, si on ordonne ce produit par rapport aux puissances descendantes de x, le coefficient de x^{m-n} sera la somme de tous les produits différents que l'on peut obtenir, en multipliant n à n tous les seconds termes de nos binomes*; d'ailleurs ce terme, où x a l'exposant $(m-n)$, en aura n avant lui, puisque les exposants de x décroissent d'une unité, à partir du premier terme où cette lettre entre à la puissance m. On voit donc

1° Que, *dans le premier terme du développement*, x *a un exposant égal au nombre des binomes que l'on a multipliés;*

2° *Que l'exposant de* x *diminue d'une unité dans le passage d'un terme au suivant, jusqu'au dernier terme où il est zéro;*

3° *Que le coefficient du premier terme est l'unité; que celui d'un terme quelconque est égal à la somme des produits différents que l'on obtient en multipliant les seconds termes des binomes pris en nombre marqué par le nombre des termes qui précèdent celui que l'on considère, de sorte que le coefficient du deuxième terme est la somme des deuxièmes termes des binomes, que celui du troisième est la somme de leurs produits distincts 2 à 2, et ainsi de suite; enfin que le coefficient du dernier terme est le produit de tous les seconds termes des facteurs binomes.*

D'après cela, si l'on convient de représenter, en général, par S_n la somme des combinaisons n à n des m quantités $a, b, c, \ldots k$, on aura

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k)=x^m+\ldots+S_n x^{m-n}+\ldots+abc\ldots k \quad [9].$$

En faisant successivement $n=1, =2, =3, \ldots, =(m-1)$, on

* Si l'on prétendait qu'une de ces combinaisons ne fait point partie de ce coefficient, on réfuterait cette objection, en disant que, si l'on multiplie les seconds termes des n binomes où se trouvent les lettres qui entrent dans cette combinaison par les premiers termes de tous les autres binomes, on aura certainement un terme du produit, lequel terme est formé de la combinaison dont il s'agit multipliée par x^{m-n}.

déduira de $S_n x^{m-n}$ tous les termes qui sont compris entre le premier x^m et le dernier *abc...k*.

331. Cette égalité étant indépendante des valeurs particulières des quantités *a*, *b*, *c*...*k*, on pourra y supposer toutes ces quantités égales entre elles, ce qui réduira le premier membre à $(x+a)^m$. Quant au second membre, le terme x^m ne changera pas, et le dernier deviendra a^m. S_n étant la somme des combinaisons *n* à *n* des *m* quantités *a*, *b*, *c*...*k*, et chacune de ces combinaisons devenant a^n, lorsqu'on suppose $a=b=c=...=k$, S_n sera alors égale à a^n répété autant de fois que l'on peut former de combinaisons avec *m* lettres prises *n* à *n*; donc on aura (323)

$$S_n = \frac{m(m-1)(m-2)...\{m-(n-1)\}}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ n} a^n,$$

et par conséquent *la formule du binome de Newton* sera

$$\left.\begin{array}{l}(x+a)^m = x^m + ... + \dfrac{m(m-1)(m-2)...\{m-(n-1)\}}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ n} a^n x^{m-n} \\ \quad + ... + a^m\end{array}\right\} [10],$$

dans laquelle il faudra donner à *n* les valeurs successives 1, 2, 3,...$(m-1)$, pour obtenir tous les termes compris entre le premier x^m et le dernier a^m.

332. Si l'on désigne par T_{n+1} le terme du rang $n+1$, c'est-à-dire celui qui en a *n* avant lui, on aura

$$T_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)...\{m-(n-1)\}}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ n} a^n x^{m-n} \quad [11],$$

et cette formule est appelée *le terme général* du développement de $(x+a)^m$, parce qu'elle fait connaître tous les termes de ce développement, à partir du second, en y faisant successivement $n=1, =2, =3, ... = m$. Elle a, comme on voit, l'avantage de fournir chaque terme de la m^{me} puissance de $(x+a)$, indépendamment des autres. Ainsi, si l'on a besoin de connaître le sixième terme, on observera que, ce terme en ayant 5 avant lui, il faudra faire $n=5$, ce qui donnera

$$T_6 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5} a^5 x^{m-5}.$$

333. Si, dans la formule [11], on change n en $n+1$, elle deviendra

$$T_{n+2}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\{m-(n-1)\}(m-n)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ \ n\ \ .\ \ (n+1)}a^{n+1}x^{m-n-1}.$$

En comparant cette valeur de T_{n+2} à celle de T_{n+1}, et en observant que le terme T_{n+1} est le $(n+1)^{me}$ du développement, on en conclura que pour déduire un terme quelconque du précédent, il faut multiplier celui-ci par l'exposant dont x y est affectée, diviser le produit par le nombre qui marque le rang de ce terme, augmenter l'exposant de a d'une unité et diminuer d'autant celui de x. On pourra donc énoncer de la manière suivante la règle qu'il faut suivre pour élever un binome à une certaine puissance :

Pour élever un binome (x + a) *à une puissance donnée, élevez le premier terme de ce binome à cette puissance et vous aurez le premier terme du développement; pour former un terme quelconque de cette puissance, multipliez le terme précédent par l'exposant dont* x *y est affectée, et divisez le produit par le nombre qui marque le rang de ce terme, puis augmentez d'une unité l'exposant de* a *et diminuez d'autant celui de* x.

On comprend qu'au moyen de cette règle, on pourra d'abord former le premier terme; puis en déduire le second; à l'aide de celui-ci obtenir le troisième, et ainsi de suite.

Le développement de $(x+a)^m$ se terminera nécessairement, puisque dans le $(m+1)^{me}$ terme, x aura l'exposant zéro, et que par conséquent le terme suivant sera nul.

En appliquant la règle précédente, on trouvera

$$(x+a)^m=x^m+\frac{m}{1}ax^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\ .\ 2}a^2x^{m-2}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}a^3x^{m-3}+\ldots,$$

et on voit que le coefficient numérique d'un terme quelconque est le nombre des combinaisons que l'on peut faire avec m lettres prises en nombre marqué par le nombre des termes qui

précèdent celui que l'on considère, ce qui s'accorde avec ce que nous avons vu au nº 331.

334. Dans la pratique, on emploie la règle que nous venons de donner, seulement pour calculer les coefficients des $\left(\frac{m}{2}+1\right)$ ou des $\frac{m+1}{2}$ premiers termes du développement, selon que m est pair ou impair, parce que ceux des autres seront connus par cela même, puisque *les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux*. Comme ce principe n'a été établi que par induction (329), nous allons le démontrer complétement.

1re Démonstration. Le terme qui en a n après lui est le $(n+1)^{me}$, en comptant de la droite vers la gauche, et, comme le nombre total des termes du développement est $(m+1)$, on voit qu'il en a $(m+1)-(n+1)=m-n$ avant lui, de sorte que son coefficient est égal au nombre des combinaisons que l'on peut faire avec m lettres prises $(m-n)$ à $(m-n)$; mais ce nombre est égal à celui des combinaisons de m lettres n à n (324), lequel nombre est le coefficient du terme qui en a n avant lui; donc, etc.

2e Démonstration. Soit ka^nx^{m-n} le terme qui, dans le développement de $(x+a)^m$, en a n avant lui : je remarque que la quantité $(x+a)^m$ ne changeant pas, lorsqu'on y permute x et a, son développement ne devra pas non plus être altéré par cette permutation des deux lettres x et a, et que par conséquent, puisqu'il contient le terme ka^nx^{m-n}, il renfermera aussi le terme kx^na^{m-n}. Or, ce terme en a $(m-n)$ avant lui, puisque l'exposant de a dans un terme quelconque est égal au nombre des termes qui le précèdent; donc le terme kx^na^{m-n} est le $(m-n+1)^{me}$, et comme le nombre total des termes du développement de $(x+a)^m$ est $(m+1)$, on voit qu'il en a $(m+1)-(m-n+1)=n$ après lui; donc les deux termes ka^nx^{m-n} et kx^na^{m-n} sont également distants des deux extrêmes.

335. Si le second terme du binome est négatif, il n'y aura de différence, dans la formule, qu'en ce que les termes seront

alternativement positifs et négatifs, puisque a a un exposant pair dans tous les termes de rang impair et un exposant impair dans tous les termes de rang pair. Ainsi

$$\left.\begin{aligned}(x-a)^m = x^m - max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\ .\ 2}a^2x^{m-2}\\ -\frac{m(m-1)(m-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}a^3x^{m-3} + \text{etc.}\end{aligned}\right\}\ [12].$$

Exemple. *Élever le binome* (x—a) *à la sixième puissance.* On devra calculer directement les *quatre* premiers termes du développement, et en négligeant les signes, on trouvera

$$x^6,\quad \frac{6x^5a}{1},\quad \frac{6.5x^4a^2}{2}=15x^4a^2,\quad \frac{15.4x^3a^3}{3}=20x^3a^3;$$

donc

$$(x-a)^6 = x^6 - 6ax^5 + 15a^2x^4 - 20a^3x^3 + 15a^4x^2 - 6a^5x + a^6.$$

336. Si on voulait former le développement de la m^{me} puissance d'un binome quelconque, par exemple, de $2ax^2-3b^2c$, il faudrait d'abord élever $(x+a)$ à cette puissance, puis remplacer dans le développement x par $2ax^2$ et b par $-3b^2c$. Mais les calculs effectués de cette manière seraient encore assez longs. On les abrége en donnant à la formule du binome une forme qui en facilite beaucoup l'application. Il suffit, pour cela, de mettre x^m en facteur commun de tous les termes du développement de $(x+a)^m$, ce qui donnera

$$(x+a)^m = x^m\left\{1 + m\,.\,\frac{a}{x} + m\,.\,\frac{m-1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2 + m\,.\,\frac{m-1}{2}\,.\,\frac{m-2}{3}\left(\frac{a}{x}\right)^3 + \ldots\right\}.$$

Cette formule nous apprend que, *pour obtenir la* m^{me} *puissance d'un binome quelconque, il faut former d'abord la suite des nombres*

$$m,\quad \frac{m-1}{2},\quad \frac{m-2}{3},\quad \frac{m-3}{4},\ldots,$$

ainsi que le rapport du second terme du binome au premier, puis on écrira un polynome, dont le premier terme sera l'unité ; le se-

cond terme se formera en multipliant ce premier terme par le premier nombre m *et par le rapport du second terme du binome au premier ; le troisième, en multipliant ce second terme par le second nombre* $\frac{m-1}{2}$ *et encore par le rapport du second terme du binome au premier, et ainsi des autres. On multipliera enfin le polynome ainsi obtenu par la* m^{me} *puissance du premier terme du binome, et on aura le développement demandé.*

337. Exemple. *Développer la sixième puissance du binome* $2ax^2-3b^2c$. On écrira la suite des nombres

$$6,\quad \frac{6-1}{2}=\frac{5}{2},\quad \frac{6-2}{3}=\frac{4}{3},\quad \frac{6-3}{4}=\frac{3}{4},\quad \frac{6-4}{5}=\frac{2}{5},\quad \frac{6-5}{6}=\frac{1}{6},$$

et le rapport du second terme du binome au premier étant $-\frac{3b^2c}{2ax^2}$, on aura

$$(2ax^2-3b^2c)^6=(2ax^2)^6.\left\{1-6.\frac{3b^2c}{2ax^2}+15.\frac{9b^4c^2}{(2ax^2)^2}-20.\frac{27b^6c^3}{(2ax^2)^3}\right.$$
$$\left.+15.\frac{81b^8c^4}{(2ax^2)^4}-6.\frac{243b^{10}c^5}{(2ax^2)^5}+\frac{729b^{12}c^6}{(2ax^2)^6}\right\},$$

ou, en effectuant les calculs,

$$(2ax^2-3b^2c)^6=64a^6x^{12}-576a^5b^2cx^{10}+2160a^4b^4c^2x^8-4320a^3b^6c^3x^6$$
$$+4860a^2b^8c^4x^4-2916ab^{10}c^5x^2+729b^{12}c^6.$$

338. Si, dans les formules [10] et [12], on suppose $x=a=1$, on verra que tous les termes des seconds membres se réduiront à leurs coefficients, mais que le premier membre de la première deviendra 2^m, tandis que celui de la seconde s'anéantira. On voit donc que *la somme des coefficients de tous les termes d'une puissance quelconque d'un binome est égale à la puissance même degré de 2, et que la somme des coefficients des termes de rang pair est égale à celle des coefficients des termes de rang impair.*

339. La démonstration que nous avons donnée de la formule du binome de Newton suppose essentiellement que l'exposant m

de cette puissance est un nombre entier et positif, puisque nous avons obtenu cette formule en supposant, dans le développement du produit des m binomes $(x+a)$, $(x+b)$, $(x+c)$,....$(x+k)$, que tous les seconds termes de ces binomes devenaient égaux. Cependant cette formule est encore vraie, quelle que soit la nature de l'exposant m, mais la démonstration rigoureuse, pour ce cas général, sort des éléments. Ainsi, on aura :

$$(x+a)^{-1}=x^{-1}+(-1)ax^{-2}+\frac{(-1)(-2)}{1\,.\,2}a^2x^{-3}$$
$$+\frac{(-1)(-2)(-3)}{1\,.\,2\,.\,3}a^3x^{-4}....$$

ou bien :

$$(x+a)^{-1}=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}-\frac{a^3}{x^4}+....$$

On trouvera de même que :

$$(x+a)^{-\frac{2}{3}}=x^{-\frac{2}{3}}+(-\tfrac{2}{3})ax^{-\frac{5}{3}}+\frac{(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{1\,.\,2}a^2x^{-\frac{8}{3}}$$
$$+\frac{(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})(-\frac{8}{3})}{1\,.\,2\,.\,3}a^3x^{-\frac{11}{3}}+....$$

ou bien

$$(x+a)^{-\frac{2}{3}}=x^{-\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}ax^{-\frac{5}{3}}+\frac{5}{9}a^2x^{-\frac{8}{3}}-\frac{40}{81}a^3x^{-\frac{11}{3}}+....$$

340. La formule de Newton nous permet de compléter ici une théorie que nous n'avons pu exposer dans nos *Leçons d'arithmétique*, que pour des cas très-particuliers : nous voulons parler de l'extraction de la racine m^{me} des nombres. Il suit, en effet, de cette formule, que si l'on représente par x les dizaines d'un nombre et par a ses unités, la m^{me} puissance de ce nombre se composera de la m^{me} puissance des dizaines de ce nombre, *plus* de m fois le produit de la $(m-1)^{me}$ puissance de ses dizaines multipliée par ses unités, *plus* d'une suite d'autres termes. Cela posé, en remplaçant, dans la théorie que nous avons donnée de la racine cubique des nombres, les expressions de cube et de racine cubique par celles de m^{me} puissance et de racine m^{me}, et le nombre 3 par le nombre m, partout où il sera

question du degré de la racine demandée, on trouvera la méthode qu'il faut suivre pour extraire la racine m^{me} d'un nombre.

§ VII PUISSANCES DES POLYNOMES.

341. Le développement de la m^{me} puissance d'un polynome quelconque $a+b+c+d+e+\dots$ se déduit facilement de la règle que nous avons donnée pour former la m^{me} puissance d'un binome; car, si on représente par α la somme $b+c+d+e+\dots$ de tous les termes qui suivent le premier, on sera ramené à développer $(a+\alpha)^m$, et on trouvera un polynome qui procédera suivant les puissances ascendantes de α, c'est-à-dire suivant les puissances ascendantes d'un polynome qui a un terme de moins que le polynome proposé. En désignant de même par β la somme $c+d+e+\dots$ de tous les termes qui suivent le premier terme de α, on fera dépendre la formation des 2e, 3e, 4e,... m^e puissances de α des puissances du même degré de β, c'est-à-dire d'un polynome contenant deux termes de moins que le polynome proposé, de sorte qu'en continuant ainsi, on finira par n'avoir plus à former que les puissances successives d'un binome, ce qui n'offre aucune difficulté.

Exemple. *Former le cube de* $(a+b+c+d)$.

$\alpha=b+c+d,\quad (a+b+c+d)^3=(a+\alpha)^3=a^3+3a^2\alpha+3a\alpha^2+\alpha^3;$

$\beta=c+d,\quad \alpha=b+\beta,\quad \alpha^2=b^2+2b\beta+\beta^2;$

$\alpha^3=b^3+3b^2\beta+3b\beta^2+\beta^3;$

$\beta^2=c^2+2cd+d^2,\quad \beta^3=c^3+3c^2d+3cd^2+d^3;$

$\alpha^2=b^2+c^2+d^2+2(bc+bd+cd);$

$\alpha^3=b^3+c^3+d^3+3(b^2c+b^2d+bc^2+bd^2+c^2d+cd^2)+6bcd;$

$$(a+b+c+d)^3=a^3+b^3+c^3+d^3+3(a^2b+a^2c+a^2d+b^2c+b^2d+c^2d+cd^2+ab^2+ac^2+ad^2+bc^2+bd^2)+6(abc+abd+acd+bcd).$$

***342.** Proposons-nous de trouver l'expression du *terme général* du développement de la m^{me} puissance d'un polynome;

mais auparavant donnons une autre forme à l'expression que nous avons obtenue précédemment (352) pour T_{n+1}. Nous multiplierons les deux termes de cette formule par $1.2.3\ldots(m-n)$, de sorte que le numérateur deviendra le produit de tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à m; ce qui donnera

$$T_{n+1}=\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots n\times 1.2.3\ldots(m-n)}a^n x^{m-n} \qquad [13].$$

Cette formule a sur la formule [11] l'avantage de fournir *tous* les termes du développement de $(x+a)^m$, en y donnant à n les valeurs successives 0, 1, 2, 3,... m, *pourvu que l'on convienne de ne pas tenir compte du facteur* $1.2.3\ldots n$ *quand on supposera* $n=0$, *non plus que du facteur* $1.2.3\ldots(m-n)$ *lorsque* n *sera égal à* m.

Cela posé, le polynome proposé étant $(a+b+c+d+\ldots)$, on posera, comme nous l'avons dit plus haut, $b+c+d+\ldots=\alpha$, ce qui conduira à développer $(a+\alpha)^m$, et le terme général de ce développement sera

$$A\alpha^n a^{m-n},$$

en posant, pour abréger,

$$A=\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots n\times 1.2.3\ldots(m-n)}.$$

Soit fait maintenant $c+d+e+\ldots=\beta$, de sorte que $\alpha=b+\beta$; le terme général de $\alpha^n=(b+\beta)^n$ sera donc

$$B\beta^p b^{n-p},$$

en posant, pour abréger,

$$B=\frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots p\times 1.2.3\ldots(n-p)}.$$

De cette formule $B\beta^p b^{n-p}$, on déduira toutes les puissances successives de α, si pour chaque valeur de n, on attribue à p toutes les valeurs depuis *zéro* jusqu'à celle de n dont il s'agit; donc en multipliant toutes ces valeurs de α^n par les valeurs correspondantes de Aa^{m-n}, on obtiendra tous les termes du développement de $(a+b+c+d+\ldots)^m$; donc

$$ABa^{m-n}b^{n-p}\beta^p$$

serait le terme général de ce développement, si β était un monome.

Posons maintenant $d+e+...=\gamma$, de sorte que $\beta=c+\gamma$; le terme général de β^p sera

$$C\gamma^q c^{p-q},$$

en faisant, pour abréger,

$$C=\frac{1.2.3...p}{1.2.3...q\times 1.2.3...(p-q)};$$

et, en raisonnant comme tout à l'heure, on verra que

$$ABCa^{m-n}b^{n-p}c^{p-q}\gamma^q$$

sera le terme général de $(a+b+c+d+...)^m$, si γ est un monome, et ainsi de suite.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il en soit ainsi; nous remplacerons dans l'expression précédente A, B, C par leurs valeurs respectives, et, en ayant soin de supprimer les facteurs communs aux deux termes de la fraction-produit, il viendra

$$\frac{1.2.3...m}{1.2.3...(m-n)\times 1.2.3...(n-p)\times 1.2.3...(p-q)\times 1.2.3...q}a^{m-n}b^{n-p}c^{p-q}d^q;$$

car alors $\gamma=d$.

Si l'on observe que la somme des exposants $m-n$, $n-p$, $p-q$, et q est égale à m, on en conclura que la formule du terme général de la m^{me} puissance du polynome $(a+b+c+d+e...)$ est

$$\frac{1.2.3...m}{1.2.3...n\times 1.2.3...p\times 1.2.3......q\times 1.2.3...r\times \text{etc.}}a^n b^p c^q d^r...,$$

en y joignant la condition $n+p+q+r+...=m$, de sorte que, pour déduire de cette formule tous les termes du développement demandé, il faudra chercher tous les systèmes de valeurs entières et positives de n, p, q, r,..., qui peuvent satisfaire à cette équation de condition et les substituer ensuite successivement dans la formule, en ayant soin toutefois de ne pas tenir compte, dans le dénominateur du coefficient numérique, du facteur qui se terminerait par *zéro*.

343. Lorsque le polynome que l'on veut élever à une certaine



puissance est ordonné suivant les puissances d'une même lettre, on peut, en modifiant légèrement la méthode du n° **341**, faire en sorte que la puissance demandée soit ordonnée immédiatement, suivant les puissances de cette lettre. Supposons, par exemple, que l'on demande le cube du polynome $(a+bx+cx^2+dx^3)$. Je représenterai par αx la somme de tous les termes qui suivent le premier, c'est-à-dire que je poserai $b+cx+dx^2=\alpha$; j'aurai ainsi

$$(a+bx+cx^2+dx^3)^3=(a+\alpha x)^3=a^3+3a^2\alpha x+3a\alpha^2x^2+\alpha^3x^3.$$

Il s'agit actuellement de former α^2 et α^3. Pour cela, je représenterai par βx la somme de tous les termes qui, dans la valeur de α, suivent le premier, c'est-à-dire que je poserai $c+dx=\beta$, et j'aurai ainsi

$$\alpha^2=(b+\beta x)^2=b^2+2b\beta x+\beta^2x^2,$$
$$\alpha^3=(b+\beta x)^3=b^3+3b^2\beta x+3b\beta^2x^2+\beta^3x^3.$$

Il faut actuellement calculer β^2 et β^3; mais, comme β représente le binome $c+dx$, il n'y aura aucune difficulté pour cela, et on trouvera

$$\beta^2=c^2+2cdx+d^2x^2,\quad \beta^3=c^3+3c^2dx+3cd^2x^2+d^3x^3,$$

et par suite

$$\alpha^2=b^2+2bcx+\left.\begin{array}{l}2bd\\+c^2\end{array}\right|x^2+2cdx^3+d^2x^4,$$
$$\alpha^3=b^3+3b^2cx+\left.\begin{array}{l}3b^2d\\+3bc^2\end{array}\right|x^2+\left.\begin{array}{l}6bcd\\+c^3\end{array}\right|x^3+\left.\begin{array}{l}3bd^2\\+3c^2d\end{array}\right|x^4+3cd^2x^5+d^3x^6,$$

et enfin, pour le développement demandé,

$$a^3+3a^2bx+\left.\begin{array}{l}3a^2c\\+3ab^2\end{array}\right|x^2+\left.\begin{array}{l}3a^2d\\+6abc\\+b^3\end{array}\right|x^3+\left.\begin{array}{l}6abd\\+3ac^2\\+3b^2c\end{array}\right|x^4+\left.\begin{array}{l}6acd\\+3b^2d\\+3bc^2\end{array}\right|x^5+\left.\begin{array}{l}3ad^2\\+6bcd\\+c^3\end{array}\right|x^6+\left.\begin{array}{l}3b^2d\\+3c^2d\end{array}\right|x^7+3cd^2x^8+d^3x^9$$

344. Il arrive souvent que, dans le développement d'une puissance d'un polynome ordonné suivant les puissances ascendantes de x, on n'ait besoin que des premiers termes de ce développement; on peut encore les obtenir facilement par la méthode précédente, et en évitant de calculer des termes de degré supé-

rieur à ceux dont on a besoin. Supposons, par exemple, que l'on demande les quatre premiers termes de la cinquième puissance du polynome $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+gx^6$. Je poserai, comme précédemment,

$$b+cx+dx^2+ex^3+fx^4+gx^5=\alpha,$$

et le développement demandé sera équivalent à

$$(a+\alpha x)^5=a^5+5a^4\alpha x+10a^3\alpha^2x^2+10a^2\alpha^3x^3+\ldots:$$

on s'arrête au terme en x^3, puisqu'on n'a pas besoin de termes d'un degré supérieur au troisième. On voit, d'après cela, que dans les valeurs de α, α^2, α^3, on ne devra pas conserver de termes d'un degré plus élevé respectivement que le deuxième, le premier et le degré zéro par rapport à x. Je pose actuellement

$$c+dx+ex^2+fx^3+gx^4=\beta,$$

et j'en conclus

$$\alpha^2=(b+\beta x)^2=b^2+2b\beta x, \quad \alpha^3=b^3.$$

Pour que α^2 soit du premier degré en x, il faut que β soit du degré zéro ; donc

$$\beta=c, \quad \alpha=b+cx+dx^2, \quad \alpha^2=b^2+2bcx, \quad \alpha^3=b^3,$$

par suite

$$(a+bx+cx^2+\ldots)^5=a^5+5a^4bx+\left.\begin{matrix}5a^4c\\10a^3b^2\end{matrix}\right|x^2+\left.\begin{matrix}5a^4d\\+20a^3bc\\+10b^3\end{matrix}\right|x^3+\ldots$$

§ VIII. RACINE CARRÉE DES POLYNOMES.

345. L'extraction de la racine carrée des polynomes repose sur les deux principes suivants :

1er PRINCIPE. *Lorsqu'un polynome et son carré sont ordonnés par rapport aux puissances d'une même lettre, le premier terme du carré est* SANS RÉDUCTION *le carré du premier terme de ce polynome.*

Ce principe n'est qu'un cas particulier de celui qui sert de base à la théorie de la division des polynomes (58).

346. 2° PRINCIPE. *Lorsqu'un polynome et son carré sont ordonnés par rapport aux puissances d'une même lettre, si du carré total on retranche le carré de la somme des* n *premiers termes du polynome, le premier terme du reste sera* SANS RÉDUCTION *le double produit du premier terme de ce polynome par son* $(n+1)^{me}$ *terme.*

Représentons, en effet, par A la somme des *n* premiers termes du polynome, et par B la somme des termes suivants, de sorte que l'expression de ce polynome sera $A+B$; celle de son carré sera donc $A^2+2AB+B^2$, et si l'on en retranche le carré de la somme de ses *n* premiers termes, c'est-à-dire A^2, il restera $2AB+B^2$. Or, si l'on suppose que l'on ait ordonné par rapport aux puissances décroissantes, par exemple, d'une même lettre, on voit que, A renfermant cette lettre à une puissance plus élevée que B, elle aura dans $A.2B=2AB$ un exposant plus élevé que dans $B.B=B^2$; donc le premier terme de 2AB sera le premier du reste; mais ce premier terme est sans réduction le double du produit du premier terme de A, c'est-à-dire du premier terme du polynome proposé, par le premier terme de B, c'est-à-dire par le $(n+1)^{me}$ terme de ce polynome; donc, etc.

347. Ces principes établis, passons à l'extraction de la racine carrée d'un polynome. J'ordonne ce polynome par rapport aux puissances d'une même lettre, et je conçois que la racine demandée soit ordonnée de la même manière. En vertu du premier principe, le premier terme du polynome est sans réduction le carré du premier terme de cette racine; donc nous aurons ce premier terme en extrayant la racine carrée du premier terme du polynome. Maintenant, en vertu du deuxième principe, si du polynome on retranche le carré du premier terme de la racine, le premier terme du reste sera sans réduction le double du produit du premier terme de cette racine multiplié par le deuxième : donc, en le divisant par le double du premier terme de la racine, on obtiendra le deuxième terme de cette racine. En vertu du

même principe, si du polynome proposé on retranche le carré de la somme des deux premiers termes de la racine, le premier terme du reste sera le produit du double du premier terme de cette racine par le troisième ; donc en le divisant par ce double, on trouvera ce troisième terme. Mais nous observerons qu'au lieu de retrancher du polynome le carré de la somme des deux premiers termes de la racine, il suffira de soustraire du premier reste, le double produit du premier terme de la racine par le deuxième, plus le carré du deuxième, puisqu'on a déjà retranché du polynome donné le carré du premier terme de la racine. Ainsi on écrira le second terme de la racine à la suite du double du premier, on multipliera le binome ainsi formé par ce second terme, on retranchera le produit du premier reste, et en divisant le premier terme du nouveau reste par le double du premier terme de la racine, on obtiendra son troisième terme. En continuant ainsi, on trouvera successivement tous les termes dont la racine doit se composer, et on disposera le tableau des calculs, comme nous l'avons fait dans l'arithmétique, pour l'extraction de la racine carrée des nombres.

Si le polynome proposé n'est pas un carré parfait, l'application de la méthode que nous venons d'exposer conduira à une expression de la racine qui sera composée d'une infinité de termes : il est donc nécessaire de savoir *à quel point de l'opération il convient de s'arrêter, pour reconnaître que la racine n'est pas exacte* et éviter ainsi des calculs inutiles. Or, si le polynome donné était un carré parfait, son dernier terme serait sans réduction le carré du dernier terme de la racine (345), et par conséquent le dernier terme de cette racine serait la racine carrée du dernier terme de notre polynome. *On arrêtera donc l'opération quand on sera parvenu à un reste nul, auquel cas le polynome trouvé sera évidemment la racine demandée* (puisqu'on aura obtenu ce reste nul en retranchant son carré du polynome proposé), *ou à un reste tel qu'en divisant son premier terme par le double du premier terme de la racine, on serait conduit à écrire à cette racine un terme dans lequel l'exposant de la lettre ordon-*

natrice serait moindre ou plus grand que la moitié de celui qu'a cette lettre dans le dernier terme du polynome, suivant que l'on aura ordonné par rapport aux puissances descendantes ou ascendantes d'une même lettre. On sera sûr alors que ce polynome n'est pas un carré parfait.

348. Il existe des caractères auxquels on reconnaît immédiatement qu'*un polynome n'est pas un carré parfait*; ce sont les suivants :

1° *Si son premier terme étant un carré parfait, le dernier* **n'en** *est pas un*; car on ne trouvera à la racine que des termes rationnels, et le dernier terme de cette racine ne doit pas l'être.

2° *Si le polynome étant entier, le premier terme d'un reste* **n'est** *pas exactement divisible par le double du premier terme* **trouvé** *à la racine*, car alors cette racine serait fractionnaire, et par conséquent son carré le serait aussi.

349. *Extraire la racine carrée de* $4x^4-12ax^3+25a^2x^2-24a^3x+16a^4$.

$4x^4-12ax^3+25a^2x^2-24a^3x+16a^4$	$2x^2-3ax+4a^2$
$-4x^4$	$4x^2-3ax$
$+12ax^3-\ 9a^2x^2$	$-3ax$
$+16a^2x^2$	$4x^2-6ax+4a^2$
$-16a^2x^2+24a^3x-16a^4$	$+4a^2$
0	

Le premier terme de la racine est $2x^2$ qui est la racine carrée de $4x^4$. On retranche le carré de $2x^2$ du polynome et on divise $-12ax^3$, premier terme du reste, par $4x^2$ double du premier terme de la racine. On trouve $-3ax$ pour le deuxième terme. On l'écrit à la droite de $4x^2$, on multiplié le binome $4x^2-3ax$ par $-3ax$, on soustrait le produit du premier reste, et on divise le premier terme $+16a^2x^2$ du deuxième reste par $4x^2$, ce qui donne $4a^2$ pour troisième terme de la racine. On écrit $4a^2$ à la suite de $4x^2-6ax$ double de la somme des deux premiers termes de la racine, et on retranche du deuxième reste le produit du trinome $4x^2-6ax+4a^2$ par $4a^2$. Le reste est nul, et ainsi la racine demandée est $\pm(2x^2-3ax+4a^2)$.

330. Problème. *Etant donné le polynome* $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$, *trouver les relations qui doivent exister entre ses coefficients* A, B, C, D et E, *pour qu'il soit un carré parfait.*

Si les coefficients étaient déterminés comme on le demande, il faudrait qu'en extrayant la racine carrée du polynome on trouvât un reste nul : mais puisque le polynome est du quatrième degré par rapport à x, sa racine sera du deuxième ; donc le reste correspondant au terme de cette racine qui est indépendant de x sera du premier degré, et par conséquent de la forme A_1x+A_2. Ce reste devant être nul, quelque valeur que l'on assigne à x, il faudra, pour qu'il en soit ainsi, que A_1 et A_2 soient chacun égaux à zéro ; car, x conservant une indétermination complète et restant une quantité purement algébrique, les termes du polynome A_1x+A_2 sont dissemblables, et par conséquent ne peuvent pas s'entre-détruire, de sorte que ce polynome ne sera nul qu'autant que chacun de ses termes sera séparément égal à zéro*. Extrayons donc la racine carrée du polynome proposé, et nous trouverons que le reste du premier degré est $\left\{D-\frac{B(4AC-B^2)}{8A^2}\right\}x+E-\frac{(4AC-B^2)^2}{64A^3}$; donc les équations de condition demandées sont

$$D-\frac{B(4AC-B^2)}{8A^2}=0, \quad E-\frac{(4AC-B^2)^2}{64A^3}=0,$$

ou bien, en chassant les dénominateurs,

$$B^3-4ABC+8A^2D=0, \quad (B^2-4AC)^2-64A^3E=0.$$

On trouve ainsi deux équations entre les cinq coefficients A, B, C, D, E, et on peut par conséquent disposer arbitrairement de trois d'entre eux.

* Comme ce raisonnement s'appliquerait très-bien à un polynome composé d'un plus grand nombre de termes, on peut établir le théorème suivant :
Pour qu'un polynome ordonné suivant les puissances d'une certaine lettre x *soit nul,* QUELQUE VALEUR QUE L'ON PUISSE ASSIGNER A CETTE LETTRE, *il faut et il suffit que les coefficients des diverses puissances de* x *soient chacun égaux à zéro.*

§ IX. DE LA RACINE CUBIQUE DES POLYNOMES.

351. 1er Principe. *Lorsqu'un polynome et son cube sont ordonnés par rapport aux puissances d'une même lettre, le premier terme du cube est* SANS RÉDUCTION *le cube du premier terme de ce polynome.*

Ce principe est une conséquence directe de ceux que nous avons établis aux nos **345** et **58**.

352. 2e Principe. *Si un polynome et son cube sont ordonnés par rapport aux puissances d'une même lettre, et que de ce cube on retranche le cube de la somme des* n *premiers termes du polynome proposé, le premier terme du reste sera* SANS RÉDUCTION *le triple produit du carré du premier terme de ce polynome multiplié par son* $(n+1)^{me}$ *terme.*

Soient A la somme des n premiers termes de notre polynome et B la somme des suivants : ce polynome sera représenté par $A+B$, et son cube par $A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$, de sorte que si l'on en retranche le cube A^3 de la somme des n premiers termes du polynome, il restera $3A^2B+3AB^2+B^3$. Or, on voit que le produit $3A^2B$ est d'un degré plus élevé, par rapport à la lettre ordonnatrice, que les deux autres (nous supposons, pour fixer les idées, que l'on ait ordonné suivant les puissances décroissantes d'une même lettre); car, les deux termes $3A^2B$ et $3AB^2$ ont le facteur commun $3AB$, et le facteur A restant du premier est d'un degré plus élevé que le facteur B restant du second, de sorte que la lettre ordonnatrice entre avec un exposant plus grand dans $3A^2B$ que dans $3AB^2$. Par une raison semblable, $3AB^2$ est, par rapport à la lettre ordonnatrice, d'un degré plus élevé que B^3. Donc le premier terme de $3A^2B$ est le premier terme du reste; mais il résulte, sans réduction, de la multiplication de 3 fois le premier terme de A^2, c'est-à-dire de 3 fois le carré du premier terme du polynome proposé par le premier terme de B, c'est-à-dire par son $(n+1)^{me}$ terme ; donc, etc.

353. Soit proposé maintenant d'extraire la racine cubique

d'un polynome. Nous l'ordonnerons par rapport aux puissances d'une même lettre, et nous concevrons que la racine cubique demandée soit ordonnée de la même manière. En vertu du premier principe, le premier terme du polynome est sans réduction le cube du premier terme de cette racine, de sorte que nous obtiendrons ce premier terme en extrayant la racine cubique du premier terme du polynome. Je l'appelle a. En vertu du deuxième principe, si du polynome on retranche le cube du premier terme de la racine, le premier terme du reste, c'est-à-dire le deuxième terme du polynome, sera sans réduction le produit du triple du carré du premier terme de la racine par son deuxième terme, et par conséquent on trouvera ce deuxième terme, que je désignerai par b, en divisant le deuxième terme du polynome par le triple du carré du premier terme de la racine. En vertu du second principe, si du polynome donné on soustrait le cube de la somme des deux premiers termes de la racine, le premier terme du reste sera sans réduction le produit du triple du carré du premier terme de la racine par son troisième terme : donc en le divisant par ce triple carré, on aura ce troisième terme. Mais nous observerons que, comme on a déjà retranché du polynome proposé le cube a^3 du premier terme a de la racine, pour en soustraire le cube de la somme $(a+b)$ des deux premiers termes, il suffira de retrancher $3a^2b+3ab^2+b^3$ du premier reste. Or cette quantité revient à $(3a^2+3ab+b^2)b$, ou encore à $\{3a^2+(3a+b)b\}b$; de sorte que, pour la former, on ajoutera b au triple de a, on multipliera la somme par b; on ajoutera le produit à $3a^2$, et on multipliera la somme par b; donc en soustrayant ce dernier produit du premier reste, et en divisant le premier terme du deuxième reste par $3a^2$, on obtiendra le troisième terme c de la racine. Pour trouver maintenant le quatrième terme, on devra retrancher du polynome le cube de la somme $(a+b+c)$ des trois premiers termes de la racine et diviser le premier terme du reste par $3a^2$; mais je remarque que $(a+b+c)^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$, et que, comme on a déjà retranché $(a+b)^3$ du polynome, il suf-

fira de soustraire du reste correspondant $3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$. Or cette quantité revient à $\{3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2\}c = \{3(a+b)^2+[3(a+b)+c]c\}c$. Pour l'obtenir, je forme d'abord $3(a+b)^2$, et comme nous avons calculé tout à l'heure, d'une part $(3a+b)b=3ab+b^2$, d'une autre part $3a^2+(3a+b)b=3a^2+3ab+b^2$, on voit qu'en ajoutant b^2 avec ces deux quantités, nous aurons $3a^2+6ab+3b^2=3(a+b)^2$. Cela fait, on ajoutera c au triple de $(a+b)$, on multipliera la somme par b, on ajoutera le produit à $3(a+b)^2$, ce qui donnera $3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2$; on multipliera cette somme par c, et on trouvera $3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$. On soustraira donc ce produit du deuxième reste, et en divisant le premier terme du troisième reste par $3a^2$, on aura le quatrième terme d de la racine, et ainsi de suite. On disposera d'ailleurs les calculs comme on le voit ci-dessous (*Arithm.*, **224**) :

Polynome proposé.	$a+b+c+d+\ldots\ldots$	*racine*
$-a^3$	$3a^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$	$3a+b$
Premier reste.	$3ab+b^2$	
$-3a^2b-3ab^2-b^3$	$3a^2+3ab+b^2$	
Deuxième reste.	$+b^2$	
$-3(a+b)^2c-3(a+b)c^2-c^3$	$3(a+b)^2\ldots\ldots\ldots$	$3(a+b)+c$
Troisième reste.	$3(a+b)c+c^2$	
etc.	$3(a+b)^2c+2(a+b)c+c^3$	
	etc.	

Si le polynome proposé est un cube parfait, son dernier terme sera le cube du dernier terme de sa racine, de sorte que le dernier terme de cette racine sera la racine cubique du dernier terme de ce polynome. *On arrêtera donc la série des calculs que nous venons de développer, lorsqu'on sera parvenu à un reste nul, auquel cas le polynome trouvé sera évidemment la racine demandée, ou à un reste tel qu'en divisant son premier terme par le triple du carré du premier terme de ce polynome trouvé, on serait conduit à écrire à la racine un terme dans lequel l'exposant de la lettre ordonnatrice serait plus petit ou plus grand que le tiers de celui qu'a cette lettre dans le dernier terme du polynome*

proposé, selon qu'on l'aura ordonné suivant les puissances descendantes ou ascendantes d'une même lettre. On sera sûr alors que le polynome n'est pas un cube parfait.

354. Théorème. *La racine cubique de toute quantité* A *admet trois valeurs que l'on obtient en multipliant, par les trois racines cubiques de l'unité, la* DÉTERMINATION ARITHMÉTIQUE a *de la racine cubique de* A, *c'est-à-dire la quantité obtenue en extrayant la racine cubique de* A *par la méthode donnée en arithmétique, si* A *est un nombre, ou par les procédés indiqués aux* nos **293** *et* **353**, *si* A *est une quantité algébrique.*

Nous pourrons poser, en effet, $\sqrt[3]{A}=ay$, pourvu que le cube de ay soit égal à A ; ainsi on aura

$$a^3y^3=A, \quad \text{d'où} \quad y^3-1=0,$$

puisque a étant la détermination arithmétique de la racine cubique de A, on a $a^3=A$. Ainsi on obtiendra toutes les valeurs de $\sqrt[3]{A}$ en multipliant a successivement par chacune des racines de l'équation $y^3-1=0$, lesquelles sont évidemment les racines cubiques de l'unité, puisque leurs cubes doivent être égaux à l'unité (**127**). Résolvons donc cette équation. Son premier membre est divisible par $(y-1)$, et revient (**72**) ainsi à $(y-1)(y^2+y+1)=0$; donc pour que y^3-1 soit nul, il faut et il suffit (**292**) que l'on ait

$$y-1=0, \quad \text{d'où} \quad y=1,$$

ou

$$y^2+y+1=0, \quad \text{d'où} \quad y=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}.$$

Ainsi la racine cubique de l'unité admet trois valeurs dont l'une est réelle, et dont les deux autres sont imaginaires. Par conséquent, après avoir trouvé la détermination arithmétique a de la racine cubique d'une quantité donnée A, il faudra encore multiplier cette détermination arithmétique par 1, par $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et par $-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, pour obtenir toutes les valeurs de cette racine cubique.

355. Remarquons que si l'on forme le carré de l'une de ces deux valeurs imaginaires, on retrouvera l'autre; ainsi

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{-3}-3}{4}=\frac{-2-2\sqrt{-3}}{4}=-\frac{1+\sqrt{-3}}{2},$$

de sorte qu'en représentant l'une d'elles par α, l'autre le sera par α^2, et qu'on aura en conséquence

$$\sqrt[3]{A}=a, \quad =a\alpha, \quad =a\alpha^2.$$

356. Il suit de ce qui précède que, si l'on n'a trouvé qu'une seule valeur en appliquant la méthode du n° 353, c'est que l'on n'a pris pour valeur du premier terme de la racine que la détermination arithmétique de la racine cubique du premier terme du polynome, tandis que l'on aurait dû prendre ses trois valeurs a, $a\alpha$, $a\alpha^2$.

En opérant de cette manière, on aurait obtenu

$$a+b+c+\ldots, \quad (a+b+c+\ldots)\alpha, \quad (a+b+c+\ldots)\alpha^2.$$

En effet, quoique le premier terme de la racine ait les trois valeurs a, $a\alpha$, $a\alpha^2$, son cube n'en a qu'une seule, et par conséquent le premier reste n'a qu'une seule valeur. Le triple du carré du premier terme aura les trois valeurs $3a^2$, $3a^2\alpha^2$, $3a^2\alpha^4=3a^2\alpha.\alpha^3=3a^2\alpha$, car α étant une racine cubique de l'unité, $\alpha^3=1$. Or, en divisant le premier terme du reste par $3a^2$, on a trouvé b; donc en le divisant par $3a^2\alpha^2$ et par $3a^2\alpha$, on trouvera $\frac{b}{\alpha^2}=\frac{b\alpha}{\alpha^3}=b\alpha$ et $\frac{b}{\alpha}=\frac{b\alpha^2}{\alpha^3}=b\alpha^2$; donc le deuxième terme a pour valeurs b, $b\alpha$, $b\alpha^2$, etc.

357. Exemple. *Extraire la racine cubique de* $8x^6-36ax^5+102a^2x^4-171a^3x^3+204a^4x^2-144a^5x+64a^6$.

$8x^6-36ax^5+102a^2x^4-171a^3x^3+204a^4x^2-144a^5x+64a^6$	$2x^2-3ax+4a^2$	
$-8x^6$	$12x^4$	$6x^2-3a$[…]
0	$-18ax^3+9a^2x^2$	
$+36ax^5-54a^2x^4+27a^2x^3$	$12x^4-18ax^3+9a^2x^2$	
$+48a^2x^4-144a^3x^3$	$+9a^2x^2$	
$-48a^2x^4+144a^3x^3-204a^4x^2+144a^5x-64a^6$	$12x^4-36ax^3+27a^2x^2$	$6x^2-9a$[…]
0	$+24a^2x^2-36a^3x+16a^4$	
	$12x^4-36ax^3+51a^2x^2-36a^3x+16a^4$	

Le premier terme de la racine est $\sqrt[3]{8x^6} = 2x^2$; le triple du carré de ce premier terme est $12x^4$, de sorte que le premier terme du reste étant le deuxième terme $-36ax^5$ du polynome, le second terme de la racine est égal à $\frac{-36ax^5}{12x^4} = -3ax$. Le triple du premier terme de la racine plus le deuxième est $6x^2 - 3ax$; on l'a multiplié par le deuxième, ce qui a donné $-18ax^3 + 9a^2x^2$; on a ajouté ce produit à $12x^4$, on a multiplié la somme $12x^4 - 18ax^3 + 9a^2x^2$ par $-3ax$, et on a retranché le produit du premier reste. La division du premier terme $48a^2x^4$ du second reste par $12x^4$ a donné le troisième terme $4a^2$ de la racine. On a alors formé le triple du carré de la somme des deux premiers termes de la racine, en ajoutant $9a^2x^2$ avec les polynomes $-18ax^3 + 9a^2x^2$ et $12x^4 - 18ax^3 + 9a^2x^2$; puis on a ajouté à ce triple carré le produit de $6x^2 - 9ax + 4a^2$, triple de la somme des deux premiers termes de la racine et du troisième, par ce troisième, et enfin on a retranché du deuxième reste le produit de la somme ainsi obtenue $12x^4 - 36ax^3 + 51a^2x^2 - 36a^3x + 16a^4$, par le troisième terme de la racine. On a trouvé zéro pour reste, et on en a conclu que $2x^2 - 3ax + 4a^2$ est la détermination arithmétique *exacte* de la racine du polynome proposé.

§ X. RACINE D'UN DEGRÉ QUELCONQUE DES POLYNOMES.

338. 1er Principe. *Si un polynome et sa* m*me* *puissance sont ordonnés par rapport aux puissances d'une même lettre, le premier terme de la puissance est* SANS RÉDUCTION *la* m*me* *puissance du premier terme du polynome.*

En effet, le premier terme du produit de m polynomes ordonnés est sans réduction le produit des premiers termes de ces polynomes (58); or, si les polynomes sont tous égaux, leur produit devient la m^{me} puissance de l'un d'eux, et le premier terme de ce produit devient en même temps la m^{me} puissance du premier terme du polynome.

359. 2e Principe. *Lorsqu'un polynome et sa* m^{me} *puissance sont ordonnés par rapport aux puissances d'une même lettre, si de cette puissance on soustrait la* m^{me} *puissance de la somme des* n *premiers termes du polynome, le premier terme du reste sera* SANS RÉDUCTION *égal à* m *fois la* (m—1)^{me} *puissance du premier terme de ce polynome multiplié par son* (n+1)^{me} *terme.*

En effet, en faisant usage des notations adoptées précédemment, l'expression du reste sera

$$mA^{m-1}B + \ldots + C_n A^{m-n} B^n + \ldots + B^m,$$

en représentant le coefficient du terme général par C_n. Or, si on compare ce terme général au premier, on voit qu'ils ont le facteur commun $A^{m-n}B$, mais l'autre facteur mA^{n-1} du premier terme est, par rapport à la lettre ordonnatrice, d'un degré plus élevé que l'autre facteur $C_n B^{n-1}$ du terme général, puisqu'en supposant qu'on ait ordonné suivant les puissances décroissantes d'une même lettre, A est d'un degré plus élevé que B; donc le degré du polynome $mA^{m-1}B$ surpasse celui du polynome $C_n A^{m-n} B^n$, et cela quelque valeur plus grande que l'unité que l'on attribue à n; donc le premier terme de $mA^{m-1}B$ sera le premier terme du reste; mais il provient sans réduction de m fois la $(m-1)^{me}$ puissance du premier terme de A, c'est-à-dire du premier terme du polynome, par le premier terme de B, c'est-à-dire par le $(n+1)^{me}$ terme de ce polynome; donc, etc.

360. En répétant les raisonnements que nous avons faits en exposant la théorie de la racine carrée et celle de la racine cubique des polynomes, on formera la règle générale suivante :

Pour extraire la racine m^{me} *d'un polynome, ordonnez-le par rapport aux puissances d'une même lettre, extrayez la racine* m^{me} *de son premier terme, et vous aurez le premier terme de la racine demandée. Retranchez ensuite du polynome la* m^{me} *puissance de ce premier terme, et en divisant le premier terme du reste, c'est-à-dire le deuxième terme du polynome, par* m *fois la* (m—1)^{me} *puissance du premier terme de la racine, vous obtien-*

drez le deuxième terme de cette racine. Retranchez alors du polynome la m^{me} *puissance de la somme des deux termes trouvés, et divisez le premier terme du reste par* m *fois la* (m—1)^{me} *puissance du premier terme de la racine. Vous obtiendrez ainsi le troisième terme, et vous continuerez de cette manière jusqu'à ce que vous soyez arrivé à un reste nul, auquel cas le polynome trouvé est exactement la racine* m^{me} *demandée; ou bien à un reste tel qu'en divisant son premier terme par* m *fois la* (m—1me) *puissance du premier terme trouvé à la racine, vous soyez conduit à écrire à cette racine un terme dans lequel l'exposant de la lettre ordonnatrice serait plus petit ou plus grand que la* m^{me} *partie de celui qu'a cette lettre, dans le dernier terme du polynome, selon que l'on aura ordonné par rapport aux puissances descendantes ou ascendantes d'une même lettre. On sera sûr alors que le polynome proposé n'est pas une* m^{me} *puissance parfaite.*

On reconnait d'ailleurs immédiatement qu'*un polynome n'est pas une puissance parfaite du degré* m, 1° *lorsque son premier terme étant une puissance exacte de ce degré, son dernier terme n'en est pas une;* 2° *lorsque le polynome étant entier, le premier terme d'un reste n'est pas exactement divisible par* m *fois la* (m—1)^{me} *puissance du premier terme trouvé à la racine* (**348**).

§ XI. DÉVELOPPEMENT DE $(a+b\sqrt{-1})^m$.

361. Considérons l'expression imaginaire $(a+b\sqrt{-1})^m$; si nous la développons par la formule du binome, il viendra :

$$(a+b\sqrt{-1})^m = a^m + ma^{m-1}b\sqrt{-1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^{m-2}b^2(\sqrt{-1})^2$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{m-3}b^3(\sqrt{-1})^3$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}a^{m-4}b^4(\sqrt{-1})^4$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}a^{m-5}b^5(\sqrt{-1})^5 + \text{etc.}$$

Rappelons-nous que l'on a (286) :

$$(+\sqrt{-1})^1 = +\sqrt{-1}; \quad +(\sqrt{-1})^2 = -1;$$
$$(+\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}; \quad +(\sqrt{-1})^4 = +1;$$

et qu'en formant les puissances successives de $+\sqrt{-1}$ on retrouve périodiquement

$$+\sqrt{-1}, \quad -1, \quad -\sqrt{-1}, \quad +1;$$

le développement deviendra donc :

$$(a+b\sqrt{-1})^m = a^m + ma^{m-1}b\sqrt{-1} - \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^{m-2}b^2$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{m-3}b^3\sqrt{-1} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}a^{m-4}b^4$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}a^{m-5}b^5\sqrt{-1} - \text{etc.}$$

On peut grouper d'une part tous les termes réels, de l'autre tous les termes imaginaires, et on aura :

$$(a+b\sqrt{-1})^m = \text{A} + \text{B}\sqrt{-1},$$

en posant :

$$\text{A} = a^m - \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}a^{m-4}b^4 - \text{etc.},$$

$$\text{B} = ma^{m-1}b - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{m-3}b^3$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}a^{m-5}b^5 - \text{etc.}$$

Dans chacune de ces deux expressions, les termes sont alternativement positifs et négatifs; la première ne renferme que les puissances paires de b, la seconde renferme toutes les puissances impaires.

Si l'on pose

$$\left.\begin{array}{l} a = \rho\cos\omega \\ b = \rho\sin\omega \end{array}\right\}; \quad \text{d'où} \quad \rho = \sqrt{a^2+b^2}$$

viendra :

$$a + b\sqrt{-1} = \rho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)$$
$$(a + b\sqrt{-1})^m = \rho^m(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)^m.$$

Or, d'après le théorème de MOIVRE (*Trigonométrie*, 46),

$$(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)^m = \cos m\omega + \sqrt{-1}\sin m\omega;$$

donc :

$$(a + b\sqrt{-1})^m = \rho^m(\cos m\omega + \sqrt{-1}\sin m\omega).$$

Cette transformation des expressions imaginaires est souvent employée; nous y reviendrons en traitant de la résolution trigonométrique des *équations binomes*.

CHAPITRE X.

DES PROGRESSIONS ET DES SÉRIES.

---

§ I. PROGRESSIONS.

(Nous nous bornerons à rappeler ici la définition des progressions et leurs principales propriétés, renvoyant, pour de plus grands développements, à l'*Arithmétique*, n^{os} **266** et suivants).

PROGRESSIONS PAR DIFFÉRENCES.

362. *On appelle* PROGRESSION PAR DIFFÉRENCES *ou* ARITHMÉTIQUE *une suite de nombres tels que chacun d'eux surpasse celui qui le précède ou en est surpassé d'une quantité constante qu'on appelle* RAISON *de la progression.*

363. *Un terme quelconque est égal au premier augmenté ou diminué d'autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.* Ainsi, soient a le premier terme et r la raison de la progression

$$\div a.a+r.a+2r.a+3r.....;$$

soit l le terme qui occupe le n^{me} rang, il aura pour expression :

$$l=a+(n-1)r \qquad [1].$$

364. *Insérer des moyens différentiels entre deux nombres donnés, c'est trouver des nombres qui forment une progression par différences dont les deux nombres donnés soient les deux extrêmes. On obtient la raison de cette progression en divisant la différence des deux nombres donnés par le nombre des moyens à insérer plus un.*

Ainsi, soient a et l les deux nombres donnés, m le nombre

des moyens à insérer; la raison r de la progression sera donnée par la formule :

$$r=\frac{l-a}{m+1}.$$

363. *La somme des termes d'une progression par différences est égale à la moitié du produit qu'on obtient en multipliant la somme des deux extrêmes par le nombre des termes.* On a donc, en appelant s cette somme :

$$s=\frac{(a+l)n}{2} \quad [2].$$

Si on remplace l par sa valeur en fonction de a et r [1], il viendra

$$s=\frac{\{2a+(n-1)r\}n}{2} \quad [3].$$

Si l'on demande, par exemple, la somme des n premiers nombres 1, 2, 3, 4, ... n, on fera $a=1$, $l=n$, et l'on trouvera $s=\frac{(n+1)n}{2}$.

De même, pour avoir la somme des n premiers nombres impairs 1, 3, 5, 7 ... $2n-1$, on fera $a=1$, $l=2n-1$, et il viendra $s=\frac{2n.n}{2}=n^2$, c'est-à-dire *le carré du nombre des termes additionnés.* Ce résultat fournit le moyen de *trouver deux carrés dont la somme soit elle-même un carré.* Il suffit, en effet, de prendre dans la progression ÷ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . etc., un terme $2n-1=a^2$ qui soit un carré parfait, et d'y ajouter le carré $(n-1)^2$ du nombre des termes qui le précèdent; car cette somme sera égale au carré n^2 du nombre n qui exprime le rang du terme carré que l'on a choisi :

$$(2n-1)+(n-1)^2=n^2,$$

ou bien :

$$a^2+\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2,$$

puisque $a^2=2n-1$. Telle est la formule qui résoudra le problème, a étant un nombre impair quelconque.

366. Les deux équations [1] et [2] ont lieu entre les *cinq* quantités a, r, l, n et s; de sorte que si l'on donne *trois* quelconques de ces quantités, il sera facile de calculer les deux autres. Or, comme avec ces cinq quantités on peut former seulement *dix* combinaisons (323), savoir :

a et r, a et l, a et n, a et s, r et l, r et n, r et s, l et n, l et s, n et s,

on voit qu'il y a ainsi *dix* problèmes à résoudre sur les progressions par différences. Nous ne nous occupérons que du huitième.

Problème. *Étant donnés* a, r *et* s, *on demande* l *et* n.

On remplacera dans [2], l par sa valeur donnée par [1], et il viendra :

$$s=\frac{\{2a+(n-1)r\}n}{2}\ [3],\quad \text{d'où}\quad n^2+\frac{(2a-r)n}{r}-\frac{2s}{r}=0\ [4].$$

Ainsi, en résolvant cette équation, on obtiendra la valeur de n, et en la substituant dans la formule [1] on aura celle de l.

n étant un nombre entier positif, il faudra, pour que le problème soit possible, que les racines de l'équation [4] soient réelles, et qu'il y en ait au moins une qui soit positive et entière. Si r et s sont de signes contraires, il faudra, pour que les racines de l'équation [4] soient réelles et positives, que l'on ait

$$(2a-r)^2+8rs>0 \quad \text{et} \quad 2a-r<0;$$

et si de plus les deux racines de l'équation [4] sont entières le problème aura deux solutions.

Si r et s sont de mêmes signes, le dernier terme $-\frac{2s}{r}$ de l'équation [4] sera négatif, et les deux racines seront réelles et de signes contraires; de sorte que si la racine positive est entière le problème aura une solution.

Si la racine négative est aussi entière, on pourra se proposer

d'en trouver l'interprétation. Pour y parvenir, on changera n en $-n$ dans la formule [3], ce qui donnera

$$s=\frac{\{2a+(-n-1)r\}(-n)}{2} \quad \text{ou} \quad s=\frac{\{-2a+(n+1)r\}n}{2},$$

en changeant les signes des deux facteurs du numérateur, ce qui n'altère pas sa valeur. Ainsi il faudra, en se reportant à la formule [2], que $-2a+(n+1)r$ représente la somme des deux extrêmes de la progression. Mais si l'on désigne par x le premier de ces termes, cette somme aura pour expression $2x+(n-1)r$; donc on devra avoir

$$2x+(n-1)r=-2a+(n+1)r, \quad \text{d'où} \quad x=-(a-r);$$

de sorte qu'il faudra faire commencer la progression par $-(a-r)$.

367. *Trouver la somme des puissances semblables des termes d'une progression par différences.*

Soient la progression $\div a.b.c.d\ldots.k.l$, et r sa raison; on a :

$$b=a+r,$$
$$c=b+r,$$
$$d=c+r,$$
$$\vdots$$
$$l=k+r.$$

Si nous élevons les deux membres de chacune de ces équations à la puissance $(m+1)^{me}$, il viendra (333) :

$$b^{m+1}=(a+r)^{m+1}=a^{m+1}+(m+1)a^m r+\frac{(m+1)m}{1.2}a^{m-1}r^2\ldots+r^{m+1},$$

$$c^{m+1}=(b+r)^{m+1}=b^{m+1}+(m+1)b^m r+\frac{(m+1)m}{1.2}b^{m-1}r^2\ldots+r^{m+1},$$

$$d^{m+1}=(c+r)^{m+1}=c^{m+1}+(m+1)c^m r+\frac{(m+1)m}{1.2}c^{m-1}r^2\ldots+r^{m+1},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$l^{m+1}=(k+r)^{m+1}=k^{m+1}+(m+1)k^m r+\frac{(m+1)m}{1.2}k^{m-1}r^2\ldots+r^{m+1}.$$

Ajoutons toutes ces équations membre à membre, et désignons

par n le nombre des termes $a, b, c, d, \ldots, k$; il viendra, en posant $S_1 = a + b + c + d + \ldots + k$, $S_2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots + k^2, \ldots, S_m = a^m + b^m + c^m + d^m + \ldots + k^m$;

$$l^{m+1} = a^{m+1} + (m+1) r\, S_m + \frac{(m+1)m}{1.2} r^2 S_{m-1} + \ldots + nr^{m+1}.$$

Cette équation fera connaître S_m en fonction de S_{m-1}, $S_{m-2} \ldots S_2, S_1$. En y faisant successivement $m = 1, = 2, = 3$, etc., on obtiendra successivement S_1, puis S_2, puis S_3.

Supposons, par exemple, que la progression soit la suite naturelle des nombres :

$$\div 1.2.3.4 \ldots\ldots n.$$

On a dans ce cas : $a = 1$, $l = n + 1$, $r = 1$, et la formule générale devient:

$$(n+1)^{m+1} = 1 + (m+1)\, S_m + \frac{(m+1)\,m}{1.2} S_{m-1} + \ldots\ldots + n.$$

Faisons $m = 1$; nous aurons :

$$(n+1)^2 = 1 + 2 S_1 + n,$$

d'où l'on tire :

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2} \qquad [5],$$

formule déjà connue (365).

Faisons $m = 2$, il viendra :

$$(n+1)^3 = 1 + 3 S_2 + 3 S_1 + n,$$

d'où l'on tire :

$$S_2 = \frac{(n+1)^3 - (n+1) - 3 S_1}{3},$$

ou, en remplaçant S_1 par sa valeur :

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad [6].$$

368. Sommation des piles de boulets. Les formules [5] et [6] permettent de résoudre facilement ce genre de questions.

Pile triangulaire. La base d'une pile triangulaire est formée par des boulets rangés en triangle équilatéral, la première rangée contenant 1 boulet, la seconde 2, la troisième 3, la n^{me} n; le nombre de boulets contenus dans la base est donc :

$$1+2+3+\ldots.+n=\frac{n^2+n}{2}.$$

Le côté du triangle qui forme la tranche immédiatement supérieure contient 1 boulet de moins, c'est-à-dire $(n-1)$ boulets; le nombre de boulets de cette tranche est donc, en changeant n en $(n-1)$:

$$1+2+3+\ldots.+(n-1)=\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}.$$

Le nombre de boulets de la tranche suivante est de même :

$$1+2+3+\ldots.+(n-2)=\frac{(n-2)^2+(n-2)}{2},$$

et ainsi de suite jusqu'à la tranche supérieure qui en contient :

$$1=\frac{1^2+1}{2}.$$

Le nombre total des boulets contenus dans la pile triangulaire est donc :

$$N=\frac{n^2+n}{2}+\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}+\frac{(n-2)^2+(n-2)}{2}+\ldots+\frac{1^2+1}{2},$$

ou bien :

$$N=\frac{n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots+1^2}{2}+\frac{n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1}{2}$$

c'est-à-dire :

$$N=\frac{S_2}{2}+\frac{S_1}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)}{4},$$

ou enfin :

$$N=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Pile à base carrée. La base est un carré qui contient n^2 boulets, si n est le nombre de boulets contenus dans le côté de ce carré. La tranche suivante contiendra $(n-1)^2$ boulets, la troisième $(n-2)^2$, et enfin la dernière n'en contient qu'un seul ou 1^2. Le nombre total des boulets de la pile est donc :

$$N = n^2 + (n-1)^2 \ldots\ldots + 1^2 = S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Pile à base rectangulaire. La pile rectangulaire a pour base un rectangle et se termine à sa partie supérieure par une file de boulets. Soit $(p+1)$ le nombre de boulets contenus dans cette file. La tranche immédiatement au-dessous se compose de 2 files contenant chacune $p+2$ boulets, elle contient donc $2(p+2)$ boulets; de même la tranche suivante se compose de 3 files de $(p+3)$ boulets chacune et contient $3(p+3)$ boulets; il en est de même, jusqu'à la base qui est composée de n files de $(p+n)$ boulets chacune et contient $n(p+n)$ boulets. Le nombre de boulets contenus dans la pile rectangulaire sera donc :

$$N = (p+1) + 2(p+2) + 3(p+3) + \ldots + n(p+n)$$

ou bien :

$$N = p(1+2+3+\ldots+n) + (1+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2)$$

c'est-à-dire :

$$N = pS_1 + S_2 = \frac{p.n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

d'où enfin :

$$N = \frac{n(n+1)(3p+2n+1)}{6}.$$

[Nous retrouverons plus loin les formules précédentes comme applications du calcul des différences finies.]

PROGRESSIONS PAR QUOTIENTS.

369. *On appelle* PROGRESSION PAR QUOTIENTS *ou* GÉOMÉTRIQUE *une suite de nombres tels que chacun d'eux est égal à celui qui*

le précède multiplié par une quantité constante, qu'on appelle RAISON *de la progression. La progression est croissante ou décroissante, suivant que la raison est plus grande ou plus petite que l'unité.*

370. *Un terme quelconque est égal au premier multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui le précèdent.* Ainsi, soient a le premier terme et q la raison de la progression

$$\div\div a : aq : aq^2 : aq^3 \ldots ;$$

le terme l qui occupe le n^{me} rang aura pour expression :

$$l = aq^{n-1} \qquad [1].$$

371. *Insérer des moyens proportionnels entre deux nombres donnés, c'est trouver des nombres qui forment une progression par quotients dont les deux nombres donnés sont les deux extrêmes. On obtient la raison de cette progression en divisant le plus grand nombre par le plus petit, et extrayant du quotient une racine d'un degré égal au nombre des moyens à insérer plus un.*

Ainsi, soient a et l les deux nombres donnés, m le nombre des moyens à insérer, la raison q de la progression sera donnée par la formule :

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}.$$

372. *Pour calculer la somme des termes d'une progression croissante par quotients, il faut multiplier son dernier terme par la raison, retrancher du produit le premier terme de la progression, et diviser le reste par l'excès de la raison sur l'unité.* On a ainsi, en désignant cette somme par s :

$$s = \frac{lq - a}{q - 1} \qquad [2].$$

Si l'on remplace l par sa valeur en fonction de a et q [1], il viendra :

$$s = \frac{aq^n - a}{q - 1} = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad [3].$$

Cette formule peut se vérifier *a posteriori*; en effet, si l'on effectue la division de q^n-1 par $q-1$ (72), on trouvera :

$$aq^{n-1}+aq^{n-2}+\dots+aq^2+aq+a$$

c'est-à-dire tous les termes de la progression.

373. *Si la progression est décroissante, il faut du premier terme retrancher le produit du dernier multiplié par la raison, et diviser le reste par l'excès de l'unité sur la raison.* On aura donc dans ce cas :

$$s=\frac{a-lq}{1-q}.$$

374. Dans une progression décroissante, le dernier terme est d'autant plus petit qu'il est plus éloigné du premier, c'est-à-dire que le nombre des termes sera plus considérable, et il tend vers zéro quand le nombre de ces termes tend vers l'infini (*Arith.*, 333). Donc, en prenant un nombre de termes suffisamment grand, la valeur de l, et, à plus forte raison, celle du produit lq (q est une fraction) sera assez petite pour que la quantité $a-lq$ diffère de a d'aussi peu qu'on voudra; de sorte que la quantité $\frac{a-lq}{1-q}$ différera elle-même d'aussi peu qu'on voudra de la quantité $\frac{a}{1-q}$. Cette dernière quantité est donc une *limite* dont la somme des termes approche d'autant plus qu'on la compose d'un plus grand nombre de termes, mais qu'elle ne peut atteindre qu'autant que la progression se prolonge à l'infini; c'est alors seulement que son dernier terme l est nul, et que par conséquent le produit lq devient aussi nul. Donc, *pour calculer la somme des termes d'une progression par quotients décroissante à l'infini, il faut diviser son premier terme par l'excès de l'unité sur la raison*; ce qui donne l'expression :

$$s=\frac{a}{1-q} \qquad [4].$$

375. On peut, comme pour les progressions par différences,



se proposer *dix* problèmes à résoudre (366) sur les progressions par quotients au moyen des équations [1] et [2]. La résolution du deuxième, du quatrième, du septième et du neuvième ne présente aucune difficulté ; le premier et le cinquième dépendent d'équations d'un degré supérieur au second si $n>3$; quant aux quatre suivants, ils présentent une application du calcul des logarithmes.

Étant donnés q, l, s, *calculer* a *et* n.

De l'équation [2] on tire immédiatement

$$a=lq-s(q-1);$$

substituant dans l'équation [1], on trouvera

$$l=\{lq-s(q-1)\}q^{n-1},$$

d'où, en prenant les logarithmes des deux membres,

$$\log l=\log\{lq-s(q-1)\}+(n-1)\log q;$$

et par suite

$$n=1+\frac{\log l-\log\{lq-s(q-1)\}}{\log q}.$$

Étant donnés a, l *et* s, *trouver* q *et* n.

On tire de l'équation [2]

$$q=\frac{s-a}{s-l};$$

mettant cette valeur de q dans [1], il viendra

$$l=a\left(\frac{s-a}{s-l}\right)^{n-1},$$

d'où, en prenant les logarithmes,

$$\log l=\log a+(n-1)\{\log(s-a)-\log(s-l)\},$$

et partant,

$$n=1+\frac{\log l-\log a}{\log(s-a)-\log(s-l)}.$$

Étant donnés a, q, s, *calculer* l *et* n.

L'équation [2] donne

$$l = \frac{a + s(q-1)}{q}.$$

Je substitue cette valeur de l dans l'équation [1], et je trouve successivement

$$\frac{a + s(q-1)}{q} = aq^{n-1}.$$

$$\log\{a + (q-1)s\} - \log q = \log a + (n-1)\log q,$$

$$\log\{a + (q-1)s\} = \log a + n\log q,$$

$$n = \frac{\log\{a + (q-1)s\} - \log a}{\log q}.$$

Étant donnés a, q, l, *trouver* s *et* n.

L'équation [2] donne immédiatement la valeur de s. Quant à celle de n, on la tire de l'équation [1] en prenant les logarithmes des deux membres. On trouve ainsi

$$\log l = \log a + (n-1)\log q, \quad \text{d'où} \quad n = 1 + \frac{\log l - \log a}{\log q}.$$

§ II. SÉRIES.

376. *On appelle* SÉRIE *une suite de termes en nombre illimité qui dérivent les uns des autres suivant une loi déterminée.*

Une série est dite *convergente*, lorsqu'il existe une limite dont la somme de ses termes s'approche indéfiniment à mesure que l'on en considère un plus grand nombre ; et cette limite est ce qu'on nomme la *somme* de la série. Lorsque la somme d'un nombre quelconque de termes consécutifs ne converge vers aucune limite fixe, on dit que la série est *divergente ;* de pareilles séries ne sont d'aucune utilité dans l'analyse.

377. De la définition des séries convergentes, il résulte d'abord, comme caractère général, qu'une série ne peut avoir de somme, c'est-à-dire être convergente, si ses termes ne

sont pas susceptibles de décroître indéfiniment. Ainsi, en appelant u_n le *terme général* de la série

$$u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots u_{n-1}, u_n, \text{ etc.}$$

il faut que u_n puisse devenir infiniment petit. Mais cela n'est pas suffisant. Appelons en effet S_n la somme des n premiers termes de la série :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1},$$

appelons de même S_{n+1} la somme des $(n+1)$ premiers termes :

$$S_{n+1} = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{n-1} + u_n;$$

et ainsi de suite. On aura

$$S_{n+1} - S_n = u_n,$$
$$S_{n+2} - S_n = u_n + u_{n+1},$$
$$\vdots$$
$$S_{n+m} - S_n = u_n + u_{n+1} + \ldots\ldots + u_{n+m-1}.$$

Il faut encore que, pour une valeur suffisamment grande de n, les différentes sommes u_n, $u_n + u_{n+1}$, $u_n + u_{n+1} + \ldots\ldots + u_{n+m-1}$, soient toutes moindres qu'une quantité aussi petite qu'on le voudra, quelle que soit la valeur de m, et qu'enfin, pour $m = \infty$, la somme $u_n + u_{n+1} \ldots\ldots + u_{n+m-1}$ devienne infiniment petite.

378. Réciproquement, si ces conditions sont remplies, la série sera convergente ; car, les sommes $S_{n+1}, S_{n+2} \ldots\ldots S_{n+m}$, pouvant devenir aussi peu différentes les unes des autres qu'on le voudra, convergeront nécessairement vers une limite très-peu différente de S_n.

En désignant par S la somme de la série, par S_n la somme des n premiers termes, la différence $S - S_n$ est ce que l'on appelle *le reste* de la série.

379. Il est d'ailleurs facile de vérifier sur un exemple fort simple, qu'il ne suffit pas que les termes décroissent indéfiniment. Soit en effet la série

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \text{etc.}$$

Je partage ses termes en groupes terminés aux puissances successives de $\frac{1}{2}$:

$$(1+\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8})+\text{etc.}$$

L'expression d'un groupe quelconque terminé à la puissance m^{me} de $\frac{1}{2}$ est :

$$\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\ldots\frac{1}{2^m}\right),$$

et ce groupe se compose de 2^{m-1} termes (car $2^m = 2^{m-1}+2^{m-1}$). Or, chacun de ces termes est plus grand que le dernier $\frac{1}{2^m}$; donc leur somme est $>\frac{1}{2^m}\times 2^{m-1}$, c'est-à-dire $>\frac{1}{2}$. Donc la somme des termes de la série considérée se compose d'une suite de groupes chacun $>\frac{1}{2}$; donc elle n'a pas de limite; donc la série est divergente.

380. Si une série à termes positifs est convergente, la série obtenue en multipliant tous ses termes par une même quantité, sera encore convergente.

Soit en effet la série

$$u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}+u_n+u_{n+1}+\ldots$$

En multipliant par C tous ses termes, nous formerons la série :

$$Cu_0+Cu_1+Cu_2+\ldots+Cu_{n-1}+Cu_n+Cu_{n+1}+\ldots$$

Or, si S_n est la somme des n premiers termes de la 1re série, le reste $R_n = u_n + u_{n+1} + \ldots$ est susceptible de décroître indéfiniment; il en sera évidemment de même du reste de la seconde série, puisque ce reste n'est autre chose que le produit de R_n par le facteur constant C; donc cette série est convergente (378).

Ainsi, une seule série convergente permet d'en former une infinité d'autres.

381. Une progression par quotients décroissante est une série convergente, puisque la somme de ses termes tend vers

une limite déterminée (374). Par conséquent, toute série dont les termes décroissent plus rapidement que ceux d'une progression geométrique, est aussi convergente.

382. *Une série à termes positifs est divergente, lorsque, à partir d'un certain terme, le rapport d'un terme au précédent est plus grand que l'unité.*

Il est évident, en effet, qu'à partir de ce terme, tous les termes iront en croissant, et que par suite leur somme augmentera sans limite.

383. ***Une série à termes positifs est convergente, lorsqu'à partir d'un certain terme le rapport d'un terme au précédent est constamment moindre qu'un nombre fixe plus petit que l'unité.***

Soit en effet la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \text{etc.}$$

Supposons qu'à partir du terme de rang n, le rapport d'un terme au précédent soit constamment inférieur à un nombre K moindre que l'unité, de sorte qu'on ait :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \text{K}, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < \text{K}, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < \text{K}, \text{ etc.}$$

On déduit de ces inégalités les relations suivantes :

$$u_{n+1} < \text{K}u_n$$
$$u_{n+2} < \text{K}u_{n+1} < \text{K}^2u_n$$
$$u_{n+3} < \text{K}u_{n+2} < \text{K}^3u_n$$
etc.,

d'où l'on voit que, à partir du n^{me} terme, les termes de la série proposée sont respectivement moindres que ceux de la progression géométrique décroissante

$$\div\!\div \text{K}u_n : \text{K}^2u_n : \text{K}^3u_n \ldots.$$

par conséquent la série est convergente (381).

Si l'on fait la somme des n premiers termes de la série en s'arrêtant au terme u_n exclusivement, l'erreur commise est la

somme de tous les termes que l'on néglige :

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots.$$

et, d'après ce qui précède, cette somme est plus petite que la somme

$$u_n + Ku_n + K^2u_n + K^3u_n + \dots.$$

c'est-à-dire que $\frac{u_n}{1-K}$. Telle est la limite de l'erreur commise.

Si K était égal à l'unité, on ne pourrait rien conclure sur la convergence de la série.

384. Exemple. Soit la série :

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots.$$

Chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par le rapport de x au nombre des termes déjà formés; ainsi, en général, le terme u_{n+1} est égal à $u_n \times \frac{x}{n}$, et il est évident qu'en prenant n suffisamment grand, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n}$ deviendra plus petit que l'unité, et il en sera de même *a fortiori* pour les termes suivants; par conséquent la série est convergente (383). Si donc on fait la somme des m premiers termes

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots. + \frac{x^{m-1}}{1.2.3\dots.(m-1)};$$

l'erreur commise sera $< \frac{x^m}{1.2.3\dots.m} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{m}}$.

Si l'on suppose $x = 1$, la série devient

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots.$$

série sur laquelle nous reviendrons dans la théorie des logarithmes, et dont on désigne la somme par e.

385. Supposons que tous les termes de la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n + \text{etc.}$$

n'aient pas le même signe, et soient

$$U_0,\ U_1,\ U_2 \ldots\ldots U_n,\ \text{etc.}$$

leurs valeurs numériques. Si ces valeurs forment une série convergente, il est facile de voir que la série $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ sera à plus forte raison convergente. En effet, $U_0 + U_1 + U_2 + \ldots$ étant convergente, la somme $U_n + U_{n+1} + U_{n+2} \ldots\ldots$ pourra devenir moindre que toute limite assignable (377). Or il en sera de même *a fortiori* pour la somme $u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots$ formée de quantités ayant respectivement les mêmes valeurs numériques que celle de la première somme, sans être toutes positives; donc la série $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots$ sera convergente (378).

386. *Si les termes d'une série sont alternativement positifs et négatifs, et qu'ils décroissent indéfiniment, la série est convergente.*

Considérons, en effet, la série

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots\ldots + u_n - u_{n+1},\ \text{etc.}$$

Je peux l'écrire de la manière suivante :

$$(u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + u_n) - (u_{n+1} - u_{n+2}) - (u_{n+3} - u_{n+4}) - \text{etc.}$$

Chaque terme étant, par hypothèse, plus petit que le précédent, les différences placées entre parenthèses sont toutes positives; donc la somme de la série indéfiniment prolongée est

$$< (u_0 - u_1 + u_2 - u_3 \ldots\ldots + u_n).$$

Si maintenant j'écris la série proposée sous la forme

$$(u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + u_n - u_{n+1}) + (u_{n+2} - u_{n+3}) + (u_{n+4} - u_{n+5}) + \text{etc.},$$

on reconnaît que la somme de la série est

$$> (u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots\ldots + u_n - u_{n+1}.)$$

Ainsi la somme de la série est comprise entre deux quantités qui ne diffèrent que par le terme u_{n+1} ; et comme la limite de ce terme est zéro, on voit que la série prolongée indéfiniment pourra différer d'aussi peu que l'on voudra de chacune d'elles. Cette série est donc convergente.

En s'arrêtant au terme positif u_n, on a pour la somme de la série une valeur trop grande ; et cette valeur devient trop petite, si on la diminue de u_{n+1} ; l'erreur commise en adoptant l'une ou l'autre de ces valeurs est donc plus petite que u_{n+1}.

387. Il existe plusieurs procédés pour développer en série une expression algébrique. La formule du binome permet de développer facilement un radical ; ainsi on trouvera pour $\sqrt{1+x}$ et $\sqrt{1-x}$:

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{32}-\frac{x^5}{64}+\text{etc.}$$

$$\sqrt{1-x}=(1-x)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{32}-\frac{x^5}{64}-\text{etc.}$$

Ces formules peuvent servir à calculer rapidement les valeurs de ces radicaux, lorsque x est très-petit, en prenant seulement les premiers termes de la série.

La division algébrique peut également conduire à un développement en série. Ainsi

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots\ldots\text{etc.}$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots\text{etc.}$$

Ces deux séries sont, comme les deux précédentes, très-convergentes, lorsque x est très-petit.

Enfin, nous verrons plus loin comment la théorie des dérivées peut fournir le développement de diverses fonctions. Mais nous allons de suite exposer une méthode générale pour *développer une fonction algébrique en série dont les termes procèdent suivant les puissances croissantes de la variable.*

388. Soit, par exemple, la fonction $\frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x+c'x^2}$ que nous nous proposons de développer en une série de la forme $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots$ etc., A, B, C, D, E, etc., étant des coefficients à déterminer. Nous poserons en conséquence

$$\frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x+c'x^2}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots,$$

d'où, en chassant le dénominateur, effectuant les opérations et transposant :

$$\begin{array}{rl|l|l|l|l}
0= & Aa'+Ba' & x+Ca' & x^2+Da' & x^3+Ea' & x^4+\ldots\ldots \\
 & -a+Ab' & +Bb' & +Cb' & +Db' & +\ldots\ldots \\
 & -b & +Ac' & +Bc' & +Cc' & +\ldots\ldots \\
 & & -c & & &
\end{array}$$

Or, cette équation doit avoir lieu, *quelque valeur que l'on donne à* x ; ce qui exige que tous les coefficients soient identiquement nuls (350*). On égalera donc tous les coefficients à zéro, ce qui donnera les équations de condition :

$$\begin{aligned}
&Aa'-a=0,\\
&Ba'+Ab'-b=0,\\
&Ca'+Bb'+Ac'-c=0,\\
&Da'+Cb'+Bc'=0^*.\\
&\vdots
\end{aligned}$$

La première fera connaître A en fonction de a et de a'. La seconde servira à déterminer B, la troisième C, et ainsi de suite.

* On pourrait dire aussi : l'équation devant être vérifiée quelque valeur que l'on donne à x, faisons $x=0$; j'en conclus que le terme $Aa'-a=0$; supprimons ce terme et divisons l'équation par x; la nouvelle équation aura pour terme indépendant de la variable $Ba'+Ab'-b$, et devra encore être satisfaite quel que soit x; d'où l'on conclura comme précédemment en faisant $x=0$, que $Ba'+Ab'-b=0$. On arrivera ainsi à égaler successivement tous les coefficients à zéro.

En appliquant, par exemple, cette méthode au développement de l'expression $\frac{1}{1+x+x^2}$, on posera :

$$\frac{1}{1+x+x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots \text{ etc.},$$

$$\begin{array}{rl|l|l|l} 0 = & A + B & x + C & x^2 + D & x^3 + \ldots \\ & -1 + A & + B & + C & + \ldots \\ & & + A & + B & + \ldots \end{array}$$

d'où :

$$\begin{array}{rl} A - 1 = 0, & A = 1 \\ B + A = 0, & B = -1 \\ C + B + A = 0, & C = 0 \\ D + C + B = 0, & D = 1 \\ \text{etc.} & \end{array}$$

le développement cherché est donc :

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + x^9 - x^{10} + \ldots$$

que l'on peut mettre aussi sous la forme :

$$(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots) - (x + x^4 + x^7 + x^{10} + \ldots)$$
$$= (1 - x)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots).$$

CHAPITRE XI.

DES FRACTIONS CONTINUES.

389. Supposons que l'on veuille trouver une valeur approchée d'une quantité α, qui ne peut pas être exprimée par un nombre entier. La voie la plus naturelle est de chercher le plus grand nombre entier a, qui soit contenu dans α, de sorte que a sera une valeur de α exacte à moins d'une unité. α se compose donc de a et d'une quantité moindre que l'unité, que l'on pourra représenter par $\frac{1}{\beta}$, β étant ainsi plus grand que 1. On aura donc

$$\alpha = a + \frac{1}{\beta}.$$

On pourra de même chercher le plus grand nombre entier b qui soit contenu dans β, de sorte que la différence $\beta - b$ étant moindre que l'unité, on pourra la représenter par $\frac{1}{\gamma}$, γ étant ainsi > 1, et on aura en conséquence

$$\beta = b + \frac{1}{\gamma}, \quad \text{et partant} \quad \alpha = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{\gamma}}.$$

En opérant sur γ comme nous l'avons fait sur α et sur β, et en continuant ainsi, on parviendra à une expression de α qui sera de la forme suivante

$$\alpha = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{etc.}}}} \qquad [1].$$

Or *on comprend* qu'en opérant, comme nous venons de l'indiquer, on épuisera peu à peu la valeur de α, et qu'en conséquence plus on prendra de termes dans l'expression ci-dessus,

plus on approchera de la vraie valeur de α. Il ne restera donc plus qu'à convertir en fractions ordinaires les expressions

$$a+\frac{1}{b},\quad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}},\quad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}},\ \text{etc.}\quad [2],$$

pour obtenir une suite de quantités qui seront *convergentes* vers la quantité cherchée. Au reste nous démontrerons bientôt cette convergence d'une manière rigoureuse.

390. L'expression de α que nous venons d'obtenir se nomme une *fraction continue.* Ainsi *une* FRACTION CONTINUE *est une expression composée d'un nombre entier, qui peut être nul, plus d'une fraction qui a pour numérateur l'unité et pour dénominateur un nombre entier, augmenté d'une fraction qui a pour numérateur l'unité et pour dénominateur un nombre entier, augmenté d'une fraction....* et ainsi de suite.

391. On nomme *fractions intégrantes* les fractions $\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \ldots$ et *quotients incomplets* le nombre entier a et leurs dénominateurs $b, c, d, \ldots$.

392. *On appelle* RÉDUITE OU FRACTION CONVERGENTE *la fraction ordinaire équivalente à une portion quelconque de la fraction continue prise à partir de son origine.* Ainsi a et les fractions ordinaires équivalentes aux expressions [2], sont les réduites successives de la fraction continue [1].

393. Ces définitions établies, appliquons la méthode que nous avons exposée au nº **389** au développement d'une quantité commensurable en fraction continue. Cette quantité n'étant pas entière sera une expression fractionnaire de la forme $\frac{A}{B}$, A et B désignant deux nombres entiers.

Il est évident que le plus grand nombre entier, qui soit contenu dans $\frac{A}{B}$, est le quotient de la division de A par B. En

nommant a le quotient et C le reste de cette division, on aura

$$\frac{A}{B}=a+\frac{C}{B}=a+\frac{1}{\frac{B}{C}},$$

en divisant par C les deux termes de la fraction $\frac{C}{B}$, afin de réduire son numérateur à l'unité.

Pour avoir de même la valeur entière approchée de la quantité $\frac{B}{C}$, on divisera B par C, et en appelant b le quotient et D le reste de cette division, on trouvera

$$\frac{B}{C}=b+\frac{D}{C}=b+\frac{1}{\frac{C}{D}},\quad \text{partant}\quad \frac{A}{B}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{\frac{C}{D}}}.$$

On divisera maintenant C par D, puis D par le reste E de cette division, et ainsi de suite. Mais on voit, sans aller plus loin, que les opérations qu'exige la réduction de $\frac{A}{B}$ en fraction continue sont précisément celles qu'on doit effectuer pour trouver le plus grand commun diviseur de A et de B : donc on arrivera tôt ou tard à une division qui se fera exactement ; alors *l'opération sera terminée*. Si donc cette dernière division est celle de C par D et qu'elle ait donné c pour quotient, on aura

$$\frac{A}{B}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}.$$

Il suit de là que, *pour développer une fraction ordinaire en fraction continue, il faudra chercher le plus grand commun diviseur de ses deux termes, en divisant d'abord le numérateur par le dénominateur. Le premier quotient sera la partie entière de la fraction continue, et les suivants, pris dans l'ordre où on les aura obtenus, seront les dénominateurs des fractions intégrantes successives.*

Exemple. *Réduire* $\frac{271}{608}$ *en fraction continue.*

	2	4	9	2	3
608	271	66	7	3	1
66	7	3	1	0	

ainsi $$\frac{271}{608}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\frac{1}{3}}}}}$$

Il n'y a pas de partie entière, car le quotient de la division de 271 par 608 est zéro.

394. Cette méthode peut servir aussi à *réduire en fraction continue toute quantité dont on a la valeur en décimales.* Mais si cette valeur en fraction décimale n'est qu'approchée, on augmentera ou on diminuera le dernier chiffre décimal d'une unité, suivant que cette fraction sera fautive par défaut ou par excès, afin d'avoir deux limites entre lesquelles soit comprise la vraie valeur de la quantité proposée; puis on réduira chacune de ces deux limites en fraction continue, en opérant *simultanément* sur toutes les deux, jusqu'à ce que l'on arrive à deux quotients différents, et on n'admettra dans la fraction continue, comme dénominateurs des fractions intégrantes, que les quotients qui seront communs aux deux opérations. Supposons, en effet, que x soit une quantité comprise entre deux autres y et z, et qu'en développant y, z et x en fractions continues, on ait trouvé les valeurs suivantes

$$y=a+\frac{1}{y'},\quad y'=b+\frac{1}{y''},\quad y''=c+\frac{1}{y'''},\quad \text{etc.};$$

$$z=a+\frac{1}{z'},\quad z'=b+\frac{1}{z''},\quad z''=c+\frac{1}{z'''},\quad \text{etc.};$$

$$x=a'+\frac{1}{x'},\quad x'=b'+\frac{1}{x''},\quad x''=c'+\frac{1}{x'''},\quad \text{etc.}$$

Puisque la valeur de x est comprise entre celles de y et de z,

et que y et z ont la même partie entière, il faut nécessairement que $a'=a$, et que $\frac{1}{x'}$ se trouve entre $\frac{1}{y'}$ et $\frac{1}{z'}$, et partant que x' soit renfermée entre les limites y' et z'. On conclura de là, par le même raisonnement que tout à l'heure, que $b'=b$, et que x'' sera comprise entre y'' et z'', ce qui conduira encore à conclure que $c'=c$, et ainsi de suite, de sorte que tous les quotients incomplets qui seront communs aux deux premières fractions continues appartiendront également à la troisième.

Exemple. La valeur du rapport de la circonférence au diamètre est $\pi=3{,}1415926$ à moins d'un dix-millionième et par défaut: on forcera donc l'unité sur le dernier chiffre, ce qui donnera 3,1415927, puis on cherchera le plus grand commun diviseur entre 31415926 et 10000000, et entre 31415927 et 10000000.

	3	7	15	1	2
31415926	10000000	1415926	88518	88156	362
1415926	88518	530746	362		
		88156			

	3	7	15	1	3
31415927	10000000	1415927	88511	88262	249
1415927	88511	530817	249		
		88262			

à la cinquième division, on trouve que le chiffre des centaines du quotient est 2 d'une part et 3 de l'autre, de sorte que l'opération s'arrête là. L'expression de π en fraction continue est donc

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}$$

395. Après avoir ainsi expliqué le moyen de convertir une quantité donnée en fraction continue, nous allons nous occuper du problème inverse, en cherchant à *revenir d'une fraction continue à la quantité dont elle exprime le développement.*

Soit donc la fraction continue

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{\vdots}{+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\text{etc.}}}}}} \qquad [3]$$

La première réduite est

$$a \text{ ou } \frac{a}{1}.$$

La deuxième est

$$a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b}.$$

La troisième ayant $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}$ pour développement, on voit qu'elle se déduit de la deuxième en changeant dans celle-ci b en $b+\frac{1}{c}$; donc elle est équivalente à

$$\frac{a\left(b+\frac{1}{c}\right)+1}{b+\frac{1}{c}}=\frac{a(bc+1)+c}{bc+1}=\frac{(ab+1)c+a}{bc+1}$$

(on a multiplié les deux termes de la première expression par c, et on a mis ensuite c en facteur commun). On reconnaît ainsi que la troisième fraction convergente se forme en multipliant les deux termes de la deuxième par le quotient incomplet correspondant à cette troisième, et en ajoutant respectivement aux deux termes de la fraction ainsi obtenue, ceux de la première. On verrait de même que la quatrième se déduit de la troisième et de la deuxième d'après la même loi, et l'analogie porte à penser qu'il en est de même de la cinquième à l'égard de la quatrième et de la troisième, et ainsi de suite.

Pour nous assurer que cette loi est générale, nous allons supposer qu'elle soit vraie pour trois réduites consécutives de rang

quelconque et vérifier qu'elle aura encore lieu pour la suivante à l'égard des deux précédentes.

Soient donc $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$ et $\frac{S}{S'}$ quatre réduites consécutives quelconques, et r et s les quotients incomplets correspondants aux deux dernières. Supposons que la fraction $\frac{R}{R'}$ se déduise des deux précédentes en multipliant les deux termes de $\frac{Q}{Q'}$ par r et en ajoutant les deux termes de $\frac{P}{P'}$ aux deux termes de la fraction résultante, de sorte que l'on ait *identiquement*

$$\frac{R}{R'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}.$$

$\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{s}$ étant respectivement les deux dernières fractions intégrantes de $\frac{R}{R'}$ et de $\frac{S}{S'}$, on voit que celle-ci se déduit de l'autre en y remplaçant r par $r+\frac{1}{s}$; donc on aura

$$\frac{S}{S'}=\frac{Q\left(r+\frac{1}{s}\right)+P}{Q'\left(r+\frac{1}{s}\right)+P'}=\frac{Q(rs+1)+Ps}{Q'(rs+1)+P's}=\frac{(Qr+P)s+Q}{(Q'r+P')s+Q'}=\frac{Rs+Q}{R's+Q'}.$$

Ainsi $\frac{S}{S'}$ se déduit de $\frac{R}{R'}$ et de $\frac{Q}{Q'}$ d'après la même loi qui a servi à déduire $\frac{R}{R'}$ de $\frac{Q}{Q'}$ et de $\frac{P}{P'}$. Puis donc que cette loi a été vérifiée pour la troisième réduite à l'égard de la deuxième et de la première, elle se trouve démontrée pour la quatrième à l'égard de la troisième et de la deuxième; partant pour la cinquième à l'égard des deux précédentes, et ainsi de suite; donc elle est générale. Donc

Pour former une réduite quelconque, multipliez, par le quotient incomplet correspondant, les deux termes de la réduite

précédente, et ajoutez respectivement aux deux termes de la fraction résultante les deux termes de la réduite antéprécédente.

On rendra cette règle applicable à la formation de la deuxième réduite, en faisant précéder la première de $\frac{1}{0}$ ou de $\frac{0}{1}$, selon que cette première est plus grande ou plus petite que l'unité.

Appliquons cette règle à la formation des réduites de la fraction continue que nous avons calculée au n° 393. Comme la première réduite $\frac{1}{2}$ est moindre que 1, nous la ferons précéder de $\frac{0}{1}$, et nous trouverons successivement

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1.4+0}{2.4+1}=\frac{4}{9},\ \frac{4.9+1}{9.9+2}=\frac{37}{83},$$
$$\frac{37.2+4}{83.2+9}=\frac{78}{175},\ \frac{78.3+37}{175.3+83}=\frac{271}{608}.$$

396. Nous voyons par là que *quand une fraction continue est composée d'un nombre fini de fractions intégrantes, elle est le développement d'une quantité commensurable*, puisque la dernière réduite est égale à la quantité génératrice.

Par conséquent *le développement en fraction continue d'une quantité incommensurable se compose d'un nombre infini de fractions intégrantes*, sans quoi, on n'aurait qu'à former toutes les réduites, et on obtiendrait une quantité commensurable pour valeur de la fraction continue totale.

397. Théorème I. *Le numérateur de la différence entre deux réduites consécutives de rang quelconque est* $+1$ *ou* -1, *suivant que celle dont on retranche est de rang pair ou de rang impair, et le dénominateur est le produit des dénominateurs de ces deux fractions convergentes. On regardera, d'ailleurs, la première réduite comme étant zéro, lorsqu'il n'y aura pas de partie entière dans la fraction continue.*

Soient en effet $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$, trois réduites consécutives quelcon-

ques, et r le quotient incomplet qui correspond à la troisième, de sorte que $\frac{R}{R'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}$ (395). Si *l'on retranche chaque réduite de la suivante*, on trouvera

$$\frac{Q}{Q'}-\frac{P}{P'}=\frac{QP'-PQ'}{P'Q'},\ \frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{PQ'-QP'}{Q'R'};$$

d'où l'on voit que les numérateurs de deux différences consécutives sont égaux et de signes contraires, et que le dénominateur de chacune est le produit des dénominateurs des deux réduites que l'on a considérées. Or, si l'on soustrait la première réduite a de la seconde $a+\frac{1}{b}$, la différence de ces deux réduites sera $+\frac{1}{b}$; donc le numérateur de la différence entre la deuxième et la troisième réduites sera -1; celui de la différence entre la troisième et la quatrième sera $+1$, et ainsi de suite. Notre théorème est donc démontré, pourvu qu'on regarde la première réduite comme étant zéro, lorsqu'il n'y a pas de partie entière dans la fraction continue.

398. Théorème II. *Les diverses fractions convergentes sont des fractions irréductibles.*

Soient en effet $\frac{P}{P'}$ et $\frac{Q}{Q'}$ deux réduites consécutives quelconques, on aura (397)

$$QP'-PQ'=\pm 1;$$

mais si Q et Q' avaient un facteur commun, ce facteur devrait diviser le premier membre de cette égalité, et par conséquent le deuxième, ce qui ne se peut pas; donc la réduite quelconque $\frac{Q}{Q'}$ est irréductible.

399. Corollaire. *Pour réduire une fraction ordinaire à sa plus simple expression, il faut la développer en fraction continue, et former ensuite toutes les réduites. La dernière sera la fraction irréductible demandée.* Soit, par exemple, la fraction

$\frac{3252}{7296}$; on la réduira en fraction continue, ce qui donnera celle que nous avons obtenue au n° 393; puis on formera les réduites, et on trouvera $\frac{271}{608}$ pour la dernière (395).

400. Théorème III. *La fraction continue totale est plus grande que toute réduite de rang impair et plus petite que toute réduite de rang pair.*

Soient $\frac{P}{P'}, \frac{Q}{Q'}, \frac{R}{R'}$ trois fractions convergentes consécutives de rang quelconque, et r le quotient incomplet correspondant à la troisième, de sorte que (395)

$$\frac{R}{R'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}.$$

Or, $\frac{1}{r}$ étant la dernière fraction intégrante de $\frac{R}{R'}$ si on se reporte à l'expression de la fraction continue [3], on voit que l'on obtiendra la valeur x de cette fraction continue, en changeant r en $r+\frac{1}{s+\text{etc.}}$ dans $\frac{R}{R'}$, de sorte que si l'on représente cette quantité $r+\frac{1}{s+\text{etc.}}$ par y, on aura

$$x=\frac{Qy+P}{Q'y+P'} \qquad [4].$$

Si maintenant on prend la différence entre x et $\frac{Q}{Q'}$, il viendra

$$x-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qy+P}{Q'y+P'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{PQ'-QP'}{Q'(Q'y+P')}=\pm\frac{1}{Q'(Q'y+P')},$$

car $PQ'-QP'$ est le numérateur de la différence $\frac{P}{P'}-\frac{Q}{Q'}$, et vaut par conséquent $+1$ ou -1, suivant que $\frac{Q}{Q'}$ est une réduite de rang impair ou de rang pair. Ainsi $x-\frac{Q}{Q'}$ sera >0 ou <0, c'est-à-dire que x sera $>\frac{Q}{Q'}$ ou $<\frac{Q}{Q'}$, selon que cette réduite

sera de rang impair ou de rang pair. Notre théorème est donc démontré.

401. Il suit de là que *la valeur de la fraction continue totale est comprise entre deux réduites consécutives de rangs quelconques.* Si donc on prend une réduite quelconque $\frac{Q}{Q'}$ pour valeur de la fraction continue, l'erreur que l'on commettra sera moindre que la différence $\frac{1}{Q'R'}$, qui existe entre cette réduite et la suivante $\frac{R}{R'}$. Donc

L'erreur commise, en prenant une réduite quelconque pour la valeur de la fraction continue totale, est moindre que l'unité divisée par le produit du dénominateur de cette réduite multiplié par celui de la suivante.

402. Si l'on observe que R' étant égal à $Q'r + P'$ (395), vaut au moins $Q' + P'$, on en conclura que

$$\frac{1}{Q'R'} < \frac{1}{Q'(Q'+P')}, \text{ de sorte que } x - \frac{Q}{Q'} < \frac{1}{Q'(Q'+P')} \quad [5].$$

D'un autre côté y qui représente $r + \frac{1}{s + \text{etc.}}$ est une quantité moindre que $r+1$, de sorte que $Q'y + P' < Q'(r+1) + P' = R' + Q'$; donc $\frac{1}{Q'(Q'y+P')}$ est plus grand que $\frac{1}{Q'(Q'+R')}$; donc

$$x - \frac{Q}{Q'} > \frac{1}{Q'(Q'+R')} \quad [6].$$

Il résulte des inégalités [5] et [6] que

Quand on prend une fraction convergente pour valeur de la fraction continue totale, l'erreur que l'on commet est moindre que l'unité divisée par le produit de son dénominateur multiplié par la somme faite de ce dénominateur et de celui de la réduite précédente; et qu'elle est plus grande que l'unité divisée par le produit du dénominateur de la réduite que l'on considère multiplié par la somme faite de ce dénominateur et de celui de la fraction convergente qui suit.

403. Remarquons encore que $x - \frac{Q}{Q'}$ qui est plus petite que $\frac{1}{Q'(Q'+P')}$ sera *a fortiori* moindre que $\frac{1}{Q'^2}$; ainsi l'on peut dire encore que

L'erreur commise en prenant une réduite quelconque pour valeur de la fraction continue est plus petite que l'unité divisée par le carré de son dénominateur.

404. Si l'on veut appliquer ces règles à la fraction continue qui exprime la valeur du rapport de la circonférence au diamètre (**394**), on formera d'abord les réduites successives, ce qui donnera

$$3,\quad \frac{22}{7},\quad \frac{333}{106},\quad \frac{355}{113};$$

puis, on verra que *le rapport d'Archimède*, $\frac{22}{7}$, est trop grand (**400**), mais qu'il ne l'est pas de $\frac{1}{7.106} = \frac{1}{742}$ (**401**), et que l'erreur surpasse $\frac{1}{7(7+106)} = \frac{1}{791}$ (**402**).

Quant à celui de *Métius*, $\frac{355}{113}$, il est aussi trop grand, mais il ne l'est pas de $\frac{1}{113(113+106)} = \frac{1}{24747}$ (**402**).

Si on était parti d'une valeur décimale de π plus approchée que celle dont nous avons fait usage, on aurait trouvé que le dénominateur de la réduite qui vient après $\frac{355}{113}$ est 33102 ; de sorte que le rapport de Métius n'est pas fautif de $\frac{1}{113.33102} = \frac{1}{3740526}$ (**401**).

405. Le principe du n° 403 donne le moyen de *déterminer à quelle réduite il convient de s'arrêter, pour que l'erreur correspondante soit moindre qu'une fraction donnée* $\frac{1}{\delta}$. Car, si l'on désigne par $\frac{Q}{Q'}$ cette réduite inconnue, comme on a $x - \frac{Q}{Q'} < \frac{1}{Q'^2}$,

il est clair que l'erreur sera inférieure à $\frac{1}{\delta}$, si l'on pose $\frac{1}{Q'^2}<\frac{1}{\delta}$; d'où $Q'^2>\delta$ et $Q'>\sqrt{\delta}$, le signe $>$ n'excluant pas le signe $=$. Ainsi,

Pour avoir la valeur d'une fraction continue, à moins d'une unité fractionnaire donnée, il suffira de s'arrêter à une réduite, dont le dénominateur soit au moins égal à la racine carrée du dénominateur de cette unité fractionnaire. On pourra toujours satisfaire à cette condition, si la fraction continue ne se termine pas, car le dénominateur de chaque réduite surpassant le précédent au moins d'une unité, la suite de tous ces dénominateurs croît plus rapidement que celle des nombres entiers, et tend par conséquent vers l'infini. Si la fraction continue se termine, on obtiendra exactement sa valeur (395).

Comme la limite indiquée au n° **402** est plus resserrée que celle dont nous venons de faire usage, on devra, quand on sera arrivé à une réduite dont le dénominateur sera inférieur d'un petit nombre d'unités à $\sqrt{\delta}$, calculer la limite de l'erreur correspondante à cette réduite, d'après la règle du n° **402**, et on fera de même pour chaque nouvelle réduite que l'on formera, afin de s'arrêter dès qu'on aura obtenu le degré d'approximation demandé.

EXEMPLE. *Calculer la valeur de la fraction continue*

$$x=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7}}}}}}$$

à moins de $\frac{1}{7500}$.

La racine carrée de 7500 est 87, à moins d'une unité et en plus. Ainsi, dans le calcul des réduites, on s'arrêtera à celle dont le dénominateur sera inférieur à 87 d'un petit nombre d'unités.

Les cinq premières sont

$$2,\ \frac{5}{2},\ \frac{17}{7},\ \frac{56}{23},\ \frac{185}{76},$$

et comme le dénominateur de la dernière diffère peu de 87, nous allons calculer, par la règle du n° **402**, la limite de l'erreur correspondante à la réduite $\frac{185}{76}$. L'erreur est $< \frac{1}{76(76+23)} = \frac{1}{7524}$, de sorte que cette réduite satisfait à la question.

406. Théorème IV. *Une réduite de rang quelconque approche plus de la valeur de la fraction continue totale qu'aucune de celles qui la précèdent.*

Soient, en effet, $\frac{P}{P'}$ et $\frac{Q}{Q'}$ deux réduites consécutives quelconques : nous avons trouvé précédemment

$$x - \frac{Q}{Q'} = \pm \frac{1}{Q'(Q'y+P')};$$

on verra de même que

$$x - \frac{P}{P'} = \frac{(QP'-PQ')y}{P'(Q'y+P')} = \pm \frac{y}{P'(Q'y+P')}.$$

Si l'on compare les seconds membres de ces deux équations, on verra que y étant >1 et $P' < Q'$, le numérateur du premier est plus petit que celui du deuxième, et que son dénominateur est, au contraire, plus grand que celui de ce second membre; donc, par cette double raison, $x - \frac{Q}{Q'} < x - \frac{P}{P'}$.

407. Corollaire. Les diverses réduites successives *convergent* donc de plus en plus vers la valeur de la fraction continue totale. C'est à cause de cette propriété qu'on leur a donné le nom de *fractions convergentes*.

408. Théorème V. *Une réduite quelconque approche plus de la fraction continue totale qu'aucune fraction dont les deux termes seraient respectivement moindres que les siens.*

Soient $\frac{Q}{Q'}$ une réduite quelconque et $\frac{m}{m'}$ une fraction irréduc-

tible qui approche plus de x que $\frac{Q}{Q'}$. Si $\frac{m}{m'}$ est une réduite, ses deux termes seront, d'après ce que nous venons de prouver (406), plus grands que ceux de $\frac{Q}{Q'}$, et notre théorème est démontré. Supposons donc que $\frac{m}{m'}$ ne soit pas une fraction convergente, et appelons $\frac{P}{P'}$ celle qui précède $\frac{Q}{Q'}$. Comme x est comprise entre $\frac{P}{P'}$ et $\frac{Q}{Q'}$, mais est plus près de $\frac{Q}{Q'}$ que de $\frac{P}{P'}$, il faudra nécessairement que $\frac{m}{m'}$ soit aussi comprise entre ces réduites ; car, si en rangeant ces quatre quantités par ordre de grandeur, et supposant, pour fixer les idées, que $\frac{P}{P'} < \frac{Q}{Q'}$, $\frac{m}{m'}$ précédait $\frac{P}{P'}$, elle différerait de x plus que $\frac{P}{P'}$, et *a fortiori* plus que $\frac{Q}{Q'}$; et si $\frac{m}{m'}$ venait après $\frac{Q}{Q'}$, elle serait moins près de x que cette réduite. Donc $\frac{m}{m'}$ est comprise entre $\frac{P}{P'}$ et $\frac{Q}{Q'}$, et par conséquent

$$\frac{m}{m'} - \frac{P}{P'} < \frac{Q}{Q'} - \frac{P}{P'},$$

ou, en effectuant les soustractions indiquées,

$$\frac{mP' - Pm'}{P'm'} < \frac{1}{P'Q'}.$$

Or, le numérateur $mP' - Pm'$ de la première de ces deux fractions est au moins égal au numérateur 1 de la deuxième, puisqu'il exprime la différence de deux nombres entiers qui ne sont pas égaux; donc le dénominateur de cette première fraction doit être plus grand que celui de la deuxième; donc $m' > Q'$.

Or, si la fraction $\frac{m}{m'}$ est comprise entre $\frac{P}{P'}$ et $\frac{Q}{Q'}$, son inverse

est aussi comprise entre celles de ces deux réduites ; donc on doit avoir aussi

$$\frac{m'}{m}-\frac{P'}{P}<\frac{Q'}{Q}-\frac{P'}{P},\quad \text{partant}\quad m>Q.$$

Donc pour que la fraction $\frac{m}{m'}$ approche plus de x que $\frac{Q}{Q'}$, il faut que ses deux termes soient respectivement plus grands que ceux de cette réduite.

409. Il résulte de tout ce qui précède que *les fractions continues donnent le moyen de trouver une fraction ordinaire qui diffère d'aussi peu que l'on veut de la valeur d'une quantité qui n'est pas entière, et qui soit telle qu'aucune fraction dont les deux termes seraient plus simples que les siens ne pourrait en approcher d'aussi près qu'elle. Pour atteindre ce but, on développera la quantité proposée en fraction continue* (**389**), *puis on formera les réduites successives* (**395**), *jusqu'à ce qu'on en obtienne une qui fournisse le degré d'approximation demandé* (**403**).

410. Exemple. *Calculer, à moins de $\frac{1}{2}$ dix-millième près, la valeur de la quantité* $\frac{5+\sqrt{37}}{3}$.

J'observe d'abord que $\frac{1}{2}$ dix-millième égale $\frac{1}{20000}$ et que la racine carrée de 20000 étant 142, il faudra s'arrêter à une réduite dont le dénominateur diffère peu de 142. Cela posé, le plus grand nombre entier contenu dans $\sqrt{37}$ étant 6, on voit que la quantité proposée est plus grande que $\frac{11}{3}=3\frac{2}{3}$ et $<\frac{12}{3}=4$; donc sa valeur est égale à $3+\frac{1}{x}$, x étant une quantité plus grande que l'unité ; ainsi

$$\frac{5+\sqrt{37}}{3}=3+\frac{1}{x},$$

et *la première réduite est* $\frac{3}{1}$. On tire de cette équation

$$x=\frac{3}{\sqrt{37}-4}=\frac{3(\sqrt{37}+4)}{37-16}(284^{*})=\frac{\sqrt{37}+4}{7}.$$

Le plus grand nombre entier contenu dans cette dernière expression étant 1, nous poserons

$$x=\frac{\sqrt{37}+4}{7}=1+\frac{1}{y},$$

et *la deuxième réduite sera* $\frac{4}{1}$. On tire de cette équation

$$y=\frac{7}{\sqrt{37}-3}=\frac{7(\sqrt{37}+3)}{37-9}=\frac{\sqrt{37}+3}{4}.$$

2 est le plus grand nombre entier contenu dans cette valeur de y : ainsi nous poserons

$$y=\frac{\sqrt{37}+3}{4}=2+\frac{1}{z},$$

et la troisième réduite sera $\frac{4.2+3}{1.2+1}=\frac{11}{3}$. Cette équation donne

$$z=\frac{4}{\sqrt{37}-5}=\frac{4(\sqrt{37}+5)}{37-25}=\frac{\sqrt{37}+5}{3},$$

ce qui nous montre que z est précisément égale à la quantité proposée ; de sorte que, dans l'expression de cette quantité en fraction continue, les quotients incomplets 3, 1 et 2 reviendront *périodiquement* et à l'infini ; donc

$$\frac{5+\sqrt{37}}{3}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\text{etc.}}}}}}$$

Nous avons vu que les trois premières réduites étaient $\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{11}{3}$, on trouvera pour les suivantes $\frac{37}{10}, \frac{48}{13}, \frac{133}{36}, \frac{447}{121}$. Le dénominateur de cette dernière différant peu de 142, on calculera la limite de l'erreur correspondante par la règle du n° **402**, et on

trouvera pour cette limite $\frac{1}{121.157} = \frac{1}{18997}$. Il faudra donc passer à la réduite suivante qui étant $\frac{580}{157}$ résout la question.

411. Une fraction continue, dans laquelle une ou plusieurs fractions intégrantes reviennent toujours dans le même ordre, se nomme une *fraction continue* PÉRIODIQUE. Elle est *périodique-pure* si la période commence dès l'origine de la fraction, et *périodique-mixte*, s'il n'en est pas ainsi. La fraction continue, que nous avons obtenue tout à l'heure, est périodique-pure.

412. THÉORÈME VI. *Toute fraction continue périodique est une des racines d'une équation du deuxième degré, à coefficients rationnels.*

1° Supposons que la fraction continue soit périodique pure, et qu'on ait, par exemple,

$$a+\cfrac{1}{b+\cdots+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cdots+\cfrac{1}{n+\text{etc.}}}}}}$$

représentons par x la valeur de cette fraction continue, je dis que l'on aura

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cdots+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{x}}} \qquad [7].$$

En effet, soient $\frac{R}{R'}$ la valeur d'une réduite qui serait composée d'un certain nombre de périodes, $\frac{P}{P'}$ et $\frac{Q}{Q'}$ les deux fractions

convergentes qui la précèdent immédiatement, on aura

$$\frac{R}{R'}=\frac{Qn+P}{Q'n+P'}.$$

Or, si k représente la valeur d'une période, on obtiendra la valeur de la réduite $\frac{V}{V'}$ qui contient une période de plus, en changeant n en $n+\frac{1}{k}$ dans l'expression de $\frac{R}{R'}$, de sorte que

$$\frac{V}{V'}=\frac{Q\left(n+\frac{1}{k}\right)+P}{Q'\left(n+\frac{1}{k}\right)+P'}=\frac{Rk+Q}{R'k+Q'},$$

et partant

$$\frac{V}{V'}-\frac{R}{R'}=\frac{QR'-RQ'}{R'(R'k+Q')}=\frac{\pm 1}{R'(R'k+Q')};$$

d'où l'on voit que ces deux réduites $\frac{R}{R'}$ et $\frac{V}{V'}$ tendent à devenir égales, lorsque le nombre des périodes qui les composent tend à devenir plus grand que toute grandeur assignable. Ainsi en désignant l'une par x_i et l'autre par x_{i-1}, on aura $x_i=x_{i-1}+\delta$, δ étant une variable qui a zéro pour limite; on pourra donc écrire

$$x_i=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{\vdots}{+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{x_i-\delta}}}}$$

de sorte qu'en appelant x la *valeur* de la fraction continue totale, ou la limite de x_i, on aura (*Arith.*, **237**) l'équation [7].

Cela posé, soient $\frac{N}{N'}$ la valeur de la période, et $\frac{M}{M'}$ la fraction convergente qui la précède immédiatement, on aura (**305**)

$$x=\frac{Nx+M}{N'x+M'},$$

équation d'où dépend la valeur de x. En chassant le dénominateur et en transposant, il viendra

$$N'x^2+(M'-N)x-M=0 \qquad [8],$$

ce qui prouve que la valeur d'une fraction continue périodique *pure* est racine d'une équation du deuxième degré à coefficients commensurables.

Cette équation ayant une permanence et une variation, une de ses racines est négative (238); ainsi on rejettera cette racine, et l'autre sera la valeur de la fraction continue totale.

Si l'on veut revenir de la fraction continue que nous avons trouvée au n° 410 à la valeur d'où elle dérive, on posera

$$x=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}}$$

et, en formant les réduites successives, il viendra

$$\frac{1}{0},\quad \frac{3}{1},\quad \frac{4}{1},\quad \frac{11}{3},\quad \frac{11x+4}{3x+1},$$

partant

$$\frac{11x+4}{3x+1}=x,\quad \text{d'où}\quad x=\frac{5+\sqrt{37}}{3}.$$

2° Admettons maintenant que la fraction continue commence par quelques termes irréguliers, et soit

$$p+\cfrac{1}{q+\cfrac{\vdots}{+\cfrac{1}{v+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{\vdots}{+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{\vdots}{+\cfrac{1}{n+\text{etc.}}}}}}}}}}}}$$

cette fraction. Appelons y sa valeur et x celle de la partie périodique : nous aurons

$$y=p+\cfrac{1}{q+\cfrac{\vdots}{+\cfrac{1}{v+\cfrac{1}{x}}}}$$

Si donc on désigne par $\frac{V}{V'}$ la valeur de la partie irrégulière et par $\frac{U}{U'}$ la réduite précédente, on aura (393)

$$y=\frac{Vx+U}{V'x+U'} \qquad [9];$$

mais nous venons de voir que

$$x=\frac{Nx+M}{N'x+M'},$$

donc en éliminant x entre cette équation, qui est du deuxième degré, et la précédente, où x n'entre qu'au premier, il viendra une équation du deuxième degré en y, à coefficients rationnels ; ce qui achève de démontrer notre théorème.

Comme les deux racines de l'équation finale en y pourraient être positives, on évitera la difficulté qu'il y aurait à distinguer celle qui est la valeur de la fraction périodique-mixte, en calculant d'abord la racine positive de l'équation [8], et en la substituant ensuite dans l'équation [9].

* **413.** Théorème VII. Réciproquement, *les racines incommensurables d'une équation du deuxième degré à coefficients rationnels sont exprimées par des fractions continues périodiques.*

Je considérerai d'abord une équation dont les racines aient des signes contraires, et soit

$$ax^2+bx-c=0 \qquad [10]$$

cette équation, les coefficients a et c étant des nombres entiers positifs, et b un nombre entier positif ou négatif.

Je m'occuperai d'abord de la racine positive de cette équation; son expression est

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{n}}{2a},$$

en représentant par n le nombre entier $b^2 + 4ac$. Pour développer cette racine en fraction continue, je chercherai d'abord le plus grand nombre entier qui y soit contenu, et si α est ce nombre, je poserai

$$x = \alpha + \frac{1}{x_1},$$

et il s'agira de trouver la partie entière de la valeur de x_1. Or, $\alpha + \frac{1}{x_1}$ étant une racine de l'équation [10], la substitution de cette quantité à la place de x devra vérifier cette équation, de sorte qu'on aura

$$a\left(\alpha + \frac{1}{x_1}\right)^2 + b\left(\alpha + \frac{1}{x_1}\right) - c = 0,$$

d'où l'on tirera facilement

$$(a\alpha^2 + b\alpha - c)x_1^2 + (2a\alpha + b)x_1 + a = 0 \qquad [11].$$

Or, si l'on substituait les deux racines de cette équation dans la relation $x = \alpha + \frac{1}{x_1}$, on obtiendrait les deux racines de la proposée; mais ces racines sont de signes contraires donc il faut que les valeurs de x_1 soient aussi de signes contraires, et que par conséquent le premier membre de l'équation qui les détermine ait une variation et une permanence (235), ce qui exige que $a\alpha^2 + b\alpha - c$ soit négatif, puisque $a > 0$.

Posons

$$a\alpha^2 + b\alpha - c = -a_1, \quad \text{et} \quad 2a\alpha + b = -b_1,$$

a_1 étant un nombre entier positif et b_1 un nombre entier de signe quelconque. L'équation [11] deviendra ainsi

$$a_1x_1^2 + b_1x_1 - a = 0 \qquad [12].$$

La racine positive de cette équation est

$$x_1 = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 + 4aa_1}}{2a_1} = \frac{-b_1 + \sqrt{n}}{2a_1},$$

car $b_1^2 + 4aa_1 = (2a\alpha + b)^2 - 4a(a\alpha^2 + b\alpha - c) = b^2 + 4ac = n$. Soit α_1 le plus grand nombre entier contenu dans cette valeur de x_1, on posera

$$x_1 = \alpha_1 + \frac{1}{x_2},$$

et, pour déterminer x_2, on substituera cette expression de x_1 dans l'équation [12], ce qui donnera une nouvelle équation que l'on ramènera facilement à la forme

$$a_2 x_2^2 + b_2 x_2 - a_1 = 0.$$

Cette équation a ses deux racines de signes contraires et ses coefficients a_2 et b_2 sont liés par la condition

$$b_2^2 + 4a_1 a_2 = n,$$

comme nous l'avons vu tout à l'heure pour ceux de l'équation [12].

La répétition du même calcul conduira évidemment à la suite indéfinie des équations

$$\begin{aligned} ax^2 + bx - c &= 0, \\ a_1 x_1^2 + b_1 x_1 - a &= 0, \\ a_2 x_2^2 + b_2 x_2 - a_1 &= 0, \\ a_3 x_3^2 + b_3 x_3 - a_2 &= 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

dont les coefficients sont des nombres entiers liés entre eux par les relations

$$\left.\begin{aligned} b^2 + 4ac &= n, \\ b_1^2 + 4aa_1 &= n, \\ b_2^2 + 4a_1 a_2 &= n, \\ b_3^2 + 4a_2 a_3 &= n, \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \quad [13],$$

et la racine positive de l'équation [10] a pour expression

$$x = \alpha + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \text{etc.}}}}$$

Pour démontrer que cette fraction continue est périodique, il suffit de prouver que l'une des transformées est identique avec l'une de celles qui la précèdent, car alors ces deux équations auront les mêmes racines.

Or, j'observe qu'il résulte des conditions [13], que les coefficients a, a_1, a_2, a_3,... sont moindres que $\frac{n}{4}$, et que les valeurs absolues de b, b_1, b_2, b_3... sont plus petites que $\sqrt{n}$: par conséquent si l'on désigne par h le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n}{4}$ et par k la valeur entière de $+\sqrt{n}$, on voit que quand on aura obtenu un nombre d'équations au plus égal à $2hk$ (les valeurs de b, b_1, b_2,... peuvent être positives ou négatives), la transformée suivante aura nécessairement ses deux premiers coefficients identiques avec les deux premiers coefficients de l'une des équations qui la précèdent ; car en écrivant chacun des $2k$ nombres ± 1, ± 2, ± 3,...$\pm 2k$ successivement à la droite des h nombres 1, 2, 3,... h, on ne peut évidemment former que $2hk$ combinaisons, Cela étant, les troisièmes termes de ces équations seront égaux, puisqu'ils doivent satisfaire à la relation $b^2 + 4ac = n$. Ainsi, si $a_{i+p} = a_i$, et $b_{i+p} = b_i$, comme on doit avoir $b^2_{i+p} + 4a_{i+p-1}a_{i+p} = n = b^2_i + 4a_{i-1}a_i$, il en résulte que $a_{i+p-1} = a_{i-1}$; de sorte que les transformées $a_i x^2_i + b_i x_i - a_{i-1} = 0$ et $a_{i+p} x^2_{i+p} + b_{i+p} x_{i+p} - a_{i+p-1}$ sont identiques. Donc la racine positive de l'équation [10] a pour expression une fraction continue périodique.

* 414. Pour s'assurer que la racine négative jouit de la même propriété, on changera x en $-x$ dans l'équation proposée ; ce qui donnera la transformée

$$ax^2 - bx - c = 0 ;$$

or, la racine positive de cette équation est développable en fraction continue périodique, donc il en est de même de la racine négative de la proposée, puisque ces deux racines ont la même valeur absolue.

* 415. Considérons maintenant le cas où les deux racines de

l'équation du deuxième degré sont positives et distinguons deux cas, selon qu'elles auront la même partie entière ou des parties entières différentes. J'examine d'abord ce deuxième cas. Si on désigne par α le plus grand nombre entier contenu dans *la plus grande* des deux racines, celle-ci sera plus grande que α, mais l'autre sera, au contraire, moindre que α; de sorte que si l'on pose $x=\alpha+\frac{1}{x_1}$, x_1 devra avoir deux valeurs, l'une positive et plus grande que l'unité, et l'autre négative. Si donc, pour déterminer ces valeurs de x_1, on substitue $\alpha+\frac{1}{x_1}$ au lieu de x dans l'équation proposée

$$ax^2-bx+c=0 \qquad [14],$$

on trouvera une équation du deuxième degré dont les racines seront de signes contraires, et seront par conséquent exprimées par deux fractions continues périodiques, de sorte qu'en remplaçant successivement x_1 par chacune de ces valeurs dans $\alpha+\frac{1}{x_1}$, on obtiendra deux pareilles fractions pour les racines de l'équation [14].

J'observerai toutefois que la plus petite sera de la forme

$$\alpha-\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\text{etc.}}}$$

mais il est facile de la ramener à la forme ordinaire; car cette expression revient à

$$\alpha-\frac{1}{x_1}=\alpha-1+1-\frac{1}{x_1}=\alpha-1+\frac{x_1-1}{x_1}=\alpha-1+\cfrac{1}{\cfrac{x_1}{x_1-1}}\ ;$$

mais $\frac{x_1}{x_1-1}=1+\frac{1}{x_1-1}$; donc

$$\alpha-\frac{1}{x_1}=\alpha-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(\alpha_1-1)+\cfrac{1}{\alpha_2+\text{etc.}}}}$$

Si α_1 était égal à l'unité, je poserais $\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \text{etc.}} = y$, et j'aurais

$$\alpha - \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha_2 + \text{etc.}}} = \alpha - \frac{1}{1 + \frac{1}{y}} = \alpha - 1 + 1 - \frac{y}{y+1} = \alpha - 1 + \frac{1}{y+1};$$

de sorte que l'expression de notre racine serait alors

$$\alpha - 1 + \frac{1}{(\alpha_2 + 1) + \frac{1}{\alpha_3 + \text{etc.}}}.$$

*416. Dans le deuxième cas, où les deux racines de l'équation [14] ont la même partie entière, j'appellerai α cette partie entière, et je poserai $x = \alpha + \frac{1}{x_1}$, et la transformée en x_1 aura ses deux racines positives et plus grandes que l'unité. Si ces racines ont encore la même partie entière α_1, on posera $x_1 = \alpha_1 + \frac{1}{x_2}$, et l'équation en x_2 aura encore ses racines positives et plus grandes que l'unité. Mais en continuant le calcul des équations transformées successives, on finira par arriver à une équation dont les racines n'auront plus la même partie entière, sans quoi les racines de l'équation [14] seraient égales, puisqu'elles seraient exprimées par la même fraction continue. Les racines de cette dernière transformée seront donc des fractions continues périodiques, et par conséquent il en sera de même de celles de la proposée.

*417. Enfin, si les racines de l'équation du deuxième degré sont négatives, on y changera x en $-x$, et on obtiendra une transformée dont les racines seront égales et de signes contraires aux siennes ; ce qui ramènera au cas précédent.

C'est à *Lagrange* qu'est dû ce beau théorème, mais la démonstration qu'il en a donnée est moins simple que la précédente, qui a été publiée par M. Gérono, dans les *Nouvelles annales de mathématiques*.

418. Nous terminerons ce que nous avions à dire des frac-

tions continues, en montrant comment on peut, par leur moyen, obtenir, sans tâtonnements, une solution entière de l'équation du premier degré à deux indéterminées

$$ax + by = k.$$

Développons, en effet, le rapport $\frac{a}{b}$ en fraction continue, et formons ensuite toutes les réduites. La dernière sera précisément $\frac{a}{b}$, puisque nous avons supposé a et b premiers entre eux (398). Si on appelle $\frac{m}{n}$ la réduite précédente, on aura, comme on sait (397),

$$an - bm = \pm 1.$$

Or, en multipliant tous les termes de cette identité par $+k$ ou par $-k$, selon que son second membre sera $+1$ ou -1, il viendra

$$\pm ank \mp bmk = k;$$

de sorte que si l'on pose

$$x = \pm nk \quad \text{et} \quad y = \mp mk,$$

l'équation proposée sera vérifiée. On aura donc ainsi une solution de cette équation.

Soit, par exemple, l'équation

$$25x - 59y = 7.$$

En réduisant $\frac{59}{25}$ en fraction continue, et en formant ensuite les réduites, on trouvera

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{7}{3}, \quad \frac{26}{11}, \quad \frac{59}{25}.$$

Comme la dernière est de rang impair, on a

$$59.11 - 25.26 = -1:$$

je multiplie tous les termes de cette identité par -7, ce qui donne

$$25.26.7 - 59.11.7 = 7;$$

donc on satisfera à la proposée en posant $x = 26.7 = 182$, et $y = 11.7 = 77$; de sorte que les valeurs générales de x et de y sont

$$x = 182 + 59t, \quad y = 77 + 25t.$$

419. Cette méthode montre que l'*équation proposée ne sera soluble en nombres entiers, si* a *et* b *ne sont pas premiers entre eux, qu'autant que leur plus grand commun diviseur divisera* k.

En effet, si on a $a = a'd$ et $b = b'd$, la dernière réduite sera $\frac{a'}{b'}$; de sorte qu'en appelant $\frac{m}{n}$ la pénultième, on aura

$$a'n - b'm = \pm 1, \quad \text{d'où} \quad \pm a'nk \mp b'mk = k.$$

On posera donc

$$ax = \pm a'nk \quad \text{et} \quad by = \mp b'mk;$$

ce qui donnera

$$x = \pm \frac{a'nk}{a} = \pm \frac{nk}{d}, \quad \text{et} \quad y = \mp \frac{b'mk}{b} = \mp \frac{mk}{d}.$$

Mais m et n étant deux nombres premiers entre eux, aucun des facteurs premiers de d ne peut se trouver à la fois dans m et dans n; donc pour que x et y soient des nombres entiers, il faut et il suffit que k renferme tous les facteurs premiers de d, c'est-à-dire que k soit divisible par d.

CHAPITRE XII.

DES LOGARITHMES ET DE LEURS APPLICATIONS.

---

§ I. DES LOGARITHMES.

420. *On appelle* LOGARITHMES *une suite de nombres en progression par différence, commençant par zéro, qui correspondent, terme pour terme, à une pareille suite de nombres en progression par quotient, commençant par l'unité.* Telle est la définition que, dans l'arithmétique, on donne des logarithmes (*Arith.*, 280); on y démontre en outre que l'on peut prendre la raison de cette deuxième progression assez peu différente de l'unité, pour que la différence entre deux quelconques de ses termes consécutifs soit moindre que toute grandeur donnée (*Arith.*, 334), de sorte que les termes de cette progression présenteraient toutes les nuances de la grandeur, à partir de l'unité. D'après cela, si $(q-1)$ et r désignent deux quantités aussi petites qu'on peut l'imaginer, les deux progressions

$$\div\!\div \ldots : q^{-3} : q^{-2} : q^{-1} : 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots : q^n : \ldots$$
$$\div \ldots -3r . -2r . -r . 0 . r . 2r . 3r . \ldots . nr . \ldots$$

formeront un système de logarithmes, et le terme nr, par exemple, de la deuxième, sera le logarithme du terme q^n qui lui correspond dans la première *.

---

* Si l'on représente par α la différence extrêmement petite qui existe entre q et l'unité, de sorte que $q=1+\alpha$, et que l'on pose en outre $r=\alpha$, les deux progressions ci-dessus deviendront

$$\div\!\div \ldots : (1+\alpha)^{-3} : (1+\alpha)^{-2} : (1+\alpha)^{-1} : 1 : (1+\alpha) : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 : \ldots$$
$$\div \ldots -3\alpha \;.\; -2\alpha \;.\; -\alpha \;.\; 0 \;.\; \alpha \;.\; 2\alpha \;.\; 3\alpha \ldots$$

et l'ensemble de ces deux progressions formera précisément le système de logarithmes que *Néper* a considéré, et qu'en conséquence M. *Lacroix* a appelé le *système népérien*. On peut donc définir *ce système de logarithmes*

Actuellement, si l'on pose $q = a^r$, ce qui est toujours possible, car cela revient à représenter par a la puissance du degré $\frac{1}{r}$ de q, la progression par quotient deviendra

$$\div\div \ldots : a^{-3r} : a^{-2r} : a^{-r} : 1 : a^r : a^{2r} : a^{3r} \ldots : a^{nr} : \ldots$$

---

en disant que *c'est celui dans lequel la raison de la progression arithmétique est égale à la différence qui existe entre la raison de la progression géométrique et l'unité.*

Si l'on veut calculer la base du système de logarithmes népériens, on se rappellera que la base d'un système de logarithmes est le nombre qui a l'unité pour logarithme (*Arith.*, 286*). Or, si $(n+1)$ est le rang qu'occupe l'*unité* dans la progression $\div 0.\alpha.2\alpha.3\alpha\ldots$, on aura $1 = n\alpha$, d'où $n = \frac{1}{\alpha}$, et par conséquent le terme correspondant de la progression par quotient sera $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. On obtiendra donc la valeur de la base e du système népérien, en cherchant la limite vers laquelle converge la quantité $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, lorsque α tend vers *zéro*. Pour déterminer cette limite, nous remplacerons α par $\frac{1}{n}$, et alors e sera la limite de la quantité $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, lorsqu'on y suppose $n = \infty$. En développant cette fonction, d'après la formule du binome, ce qui est permis, puisque $(n+1)$ désignant le rang que 1 occupe dans la progression $\div 0.\alpha.2\alpha.3\alpha\ldots$, n est nécessairement un nombre entier positif, il viendra

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ \ldots\ \{n-(p-1)\}}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ \ldots\ p.n^p} + \ldots$$

ou bien, en divisant chacun des p facteurs du numérateur du terme général par n, et le dénominateur par n^p,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\left\{1-\frac{p-1}{n}\right\}}{2\ .\ 3\ .\ 4\ \ldots\ p} + \ldots$$

Maintenant, si l'on suppose que n augmente, les termes qui ont n pour dénominateur décroîtront, et lorsque n deviendra plus grand que toute grandeur assignable, ces termes deviendront plus petits que toute quantité donnée; donc la limite du second membre de l'équation précédente est

$$1 + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots p} + \ldots,$$

série dans laquelle p doit recevoir toutes les valeurs entières et positives 1, 2, 3, 4, ... ; mais nous avons appelé e la limite du premier membre; donc,

Or, en la comparant avec la progression par différence ci-dessus, on verra que le logarithme de a^{nr} sera nr, c'est-à-dire l'exposant même dont le nombre constant a est affecté. Ainsi nous pourrons débarrasser la définition des logarithmes de toute idée de progression, en disant que *le logarithme d'un nombre est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever un nombre constant* a *pour reproduire ce nombre*. Cette nouvelle manière d'envisager les logarithmes étant une conséquence de l'idée que nous en avons donnée plus haut, nous aurons prouvé que ces deux définitions sont équivalentes, si nous démontrons que la première résulte aussi de la deuxième. Or, la chose est facile. Désignons en effet par x le logarithme d'un nombre quelconque b, nous avons $a^x = b$, et si nous donnons à x toutes les valeurs en progression par différence, tant positives que négatives, dont la raison serait une quantité r, aussi petite que l'on voudra, nous trouverons pour les

---

en vertu du principe fondamental de la théorie des limites, et en donnant à p toutes les valeurs ci-dessus, il viendra

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \ldots,$$

série dont la loi est évidente et qui se compose d'un nombre infini de termes (583).

Si l'on prend pour valeur de e les n premiers termes de cette série, le premier des termes que l'on négligera étant $\frac{1}{1.2.3\ldots n}$, l'erreur que l'on commettra sera plus petite que

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \cdot \frac{1}{n-1};$$

en prenant, par exemple, pour valeur de e la somme des treize premiers termes de la série, l'erreur sera moindre que

$$\frac{1}{1.2.3.4\ldots 12} \cdot \frac{1}{12} < 0{,}00000\,00002.$$

Ainsi, on sera sûr des neuf premières décimales, et on trouvera $e = 2{,}71828\ 1828$, valeur facile à retenir, à cause de la période 1828.

valeurs correspondantes de b les termes de la progression par quotient

$$\div\!\div \ldots : a^{-3r} : a^{-2r} : a^{-r} : 1 : a^{r} : a^{2r} : a^{3r} : \ldots.$$

En la comparant avec la progression par différence

$$\div \ldots -3r . -2r . -r . 0 . r . 2r . 3r . \ldots.$$

formée par les valeurs de x, on reconnaît que le logarithme d'un nombre est le terme d'une progression par différence, commençant par zéro, qui correspond à ce nombre placé dans une progression par quotient, commençant par l'unité.

421. Désormais nous dirons que *le logarithme d'un nombre est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever* UN NOMBRE INVARIABLE POSITIF, ET AUTRE QUE L'UNITÉ, *pour reproduire ce nombre*, *et nous appellerons* SYSTÈME DE LOGARITHMES *la série des logarithmes de tous les nombres possibles*, *pour une valeur particulière de ce nombre invariable*, *que l'on nomme la* BASE *de ce système*. Ainsi *un même nombre peut avoir une infinité de logarithmes* (*Arith.*, 286 *).

422. *Dans tout système de logarithmes*, *le logarithme de la base est l'unité* (*Arith.*, 286*) *et celui de l'unité est zéro.* En effet, soit fait $b=a$, dans l'équation $a^x=b$. On aura $a^x=a$, équation qui ne peut être vérifiée que par $x=1$; mais dans l'équation $a^x=a$, x désigne le logarithme de a; donc $\log a=1$.

Supposons, en second lieu, que b soit égal à l'unité, on aura $a^x=1$, ce qui ne peut être, à moins que x ne soit égal à 0; mais dans l'équation $a^x=1$, x représente le logarithme de 1; donc $\log 1=0$.

423. Nous allons maintenant établir les propriétés des logarithmes, en partant de la définition algébrique que nous venons d'en donner; mais comme cette définition suppose qu'en élevant un nombre constant à des puissances convenables, on peut reproduire tous les nombres possibles, il sera bon de démontrer *directement* la vérité de ce principe. Pour cela, nous commencerons par prouver que *si l'on fait* CROÎTRE *l'exposant* x

d'une manière continue la fonction a^x VARIERA *aussi d'une manière continue.*

Pour y parvenir, je donne à x une valeur quelconque m, et je vais démontrer d'abord que l'on pourra toujours trouver un nombre entier n assez grand pour qu'en faisant $x = m + \frac{1}{n}$, la différence entre a^m et $a^{m+\frac{1}{n}}$ soit moindre que toute grandeur assignable δ.

1° Soit $a > 1$, je dis donc que l'on peut satisfaire à l'inégalité

$$a^{m+\frac{1}{n}} - a^m < \delta.$$

En effet, en divisant les deux membres de cette inégalité par a^m, on trouvera

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{\delta}{a^m},$$

d'où l'on tire

$$a < \left(1 + \frac{\delta}{a^m}\right)^n;$$

et il sera toujours possible de satisfaire à cette inégalité par une valeur entière de n, car $1 + \frac{\delta}{a^m} > 1$, et on sait que *les puissances successives d'une quantité plus grande que l'unité sont de plus en plus grandes et croissent au delà de toute limite* (*Arith.*, **331**).

2° Soit $a < 1$, je dis que l'on pourra encore vérifier l'inégalité

$$a^m - a^{m+\frac{1}{n}} < \delta;$$

car on en tirera facilement

$$\left(1 - \frac{\delta}{a^m}\right)^n < a.$$

Or $\left(1 - \frac{\delta}{a^m}\right) < 1$, et on sait que *les puissances successives d'une quantité moindre que l'unité sont de plus en plus petites, et ont zéro pour limite* (*Arith.*, **332**).

Cela posé, partageons l'unité en n parties égales, et donnons successivement à x les valeurs

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ldots,$$

les valeurs correspondantes de la fonction a^x seront

$$1,\ a^{\frac{1}{n}},\ a^{\frac{2}{n}},\ a^{\frac{3}{n}},\ldots.$$

et on voit, d'après ce qui précède, qu'en prenant n suffisamment grand on pourra rendre la différence entre une quelconque de ces valeurs et la suivante moindre que toute grandeur donnée, de sorte que si l'on conçoit que x croisse d'une manière continue depuis zéro jusqu'à l'infini, et que a soit >1, la fonction a^x croîtra aussi d'une manière continue depuis l'unité jusqu'à l'infini, sans quoi elle devrait passer brusquement d'une valeur à une autre qui en différerait d'une quantité finie, ce qui est absurde, puisque la variation de cette fonction peut être rendue moindre que toute grandeur donnée. Donc *on reproduira ainsi tous les nombres plus grands que l'unité.*

Si maintenant on donne à x les valeurs successives

$$0,\ -\frac{1}{n},\ -\frac{2}{n},\ -\frac{3}{n},\ldots.$$

les valeurs correspondantes de la fonction a^x seront

$$1,\ \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}},\ \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{2}{n}},\ \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{n}},\ldots;$$

et, en prenant n suffisamment grand, on pourra rendre la différence entre une quelconque de ces valeurs et la suivante moindre que toute grandeur donnée; d'où il suit que si l'on conçoit que x croisse négativement d'une manière continue depuis zéro jusqu'à l'infini négatif, a étant toujours >1, la fonction a^x décroîtra d'une manière continue depuis l'unité jusqu'à zéro; donc *on reproduira ainsi tous les nombres plus petits que l'unité.*

Observons que la fonction a^x ne se réduit à *zéro* que pour $x=-\infty$, de sorte que *le logarithme de zéro est l'infini néga-*



tif, quand la base est plus grande que l'unité, ce qui veut dire que quand une fraction tend vers zéro, son logarithme est négatif et croît au delà de toute limite.

Si a est plus petit que l'unité, on verra, en reprenant les raisonnements qui précèdent, qu'en faisant croître x depuis zéro jusqu'à l'infini positif, la fonction a^x prendra toutes les valeurs inférieures à l'unité, et qu'elle deviendra successivement égale à tous les nombres plus grands que 1, quand x croîtra négativement depuis zéro jusqu'à $-\infty$.

424. Il est important d'observer que *la base d'un système de logarithmes doit être nécessairement un nombre positif autre que l'unité*. Supposons, en effet, que a soit une quantité négative dont la valeur absolue est différente de 1; si on fait successivement $x=\frac{2m}{2n+1}, =\frac{2m+1}{2n+1}, =\frac{2m+1}{2n}$, la fonction a^x aura une valeur réelle et positive, dans le premier cas; réelle et négative dans le deuxième, et imaginaire dans le troisième, de sorte qu'en donnant à x des valeurs suffisamment rapprochées, elle prendra des valeurs absolues, dont chacune différera de la précédente d'aussi peu que l'on voudra, mais cette fonction passera brusquement du positif au négatif et à l'imaginaire. Ainsi, quand on fera croître x d'une manière continue, la fonction a^x prendra une suite de *valeurs discontinues*, et par conséquent ne pourra point reproduire tous les nombres possibles.

a ne peut pas non plus être égale à l'unité, puisque toutes les puissances de $+1$ sont égales à $+1$.

425. La base d'un système de logarithmes étant nécessairement positive, on voit que la fonction a^x ne pourra donner des nombres négatifs, que si l'on assigne à x des valeurs fractionnaires, dont le dénominateur sera un nombre pair; mais alors cette fonction serait encore discontinue, de sorte que tous les nombres négatifs ne peuvent pas avoir des logarithmes. En conséquence *on a rejeté ces logarithmes et on les a considérés comme des expressions imaginaires;* ainsi *si une question con-*

duit à prendre le logarithme d'une quantité négative, nous conclurons qu'elle est impossible.

426. Notre définition des logarithmes (**421**) étant complétement justifiée, nous allons examiner les propriétés qui en découlent.

Soient b, b', b''... des nombres quelconques et x, x', x''... leurs logarithmes respectifs, dans le système dont la base est a; nous aurons les équations

$$a^x = b,\quad a^{x'} = b',\quad a^{x''} = b'',\ldots$$

et si nous les multiplions membre à membre, il viendra (**282**)

$$a^{x+x'+x''+\ldots} = bb'b''\ldots.$$

Mais, d'après la définition des logarithmes, $x + x' + x'' + \ldots$ est le logarithme du nombre $bb'b''\ldots$; d'un autre côté, x, x', x''... sont les logarithmes respectifs des nombres b, b', b''...; donc

$$\log bb'b''\ldots = \log b + \log b' + \log b'' + \ldots$$

Donc *le logarithme d'un produit de plusieurs facteurs est égal à la somme des logarithmes de ces facteurs.*

Si on divise membre à membre les équations

$$a^x = b \quad \text{et} \quad a^{x'} = b',$$

on trouvera

$$a^{x-x'} = \frac{b}{b'}.$$

Ainsi $(x - x')$ est le logarithme de $\frac{b}{b'}$; donc *le logarithme du quotient de la division de deux nombres est égal au logarithme du dividende* MOINS *le logarithme du diviseur.*

Si on élève à la puissance m les deux membres de l'équation

$$a^x = b,\quad \text{il viendra} \quad a^{mx} = b^m,$$

ce qui exprime que mx est le logarithme de b^m; donc *le logarithme d'une puissance quelconque d'un nombre est égal au produit du logarithme de ce nombre par l'exposant de cette puissance.*

On verra de même que de l'équation

$$a^x = b, \quad \text{on tire} \quad a^{\frac{x}{m}} = \sqrt[m]{b},$$

et qu'en conséquence *le logarithme d'une racine quelconque d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre divisé par l'indice de cette racine.*

427. Ces principes établis, il faut, pour en tirer parti, construire une *table de logarithmes. On appelle ainsi un tableau à deux colonnes, telles que dans la première se trouve la suite naturelle des nombres entiers* 1, 2, 3, 4,... *jusqu'à une certaine limite, et à côté, dans la deuxième, sont leurs logarithmes.*

Pour fixer les idées, nous supposerons que l'on prenne le nombre 10 pour la base du système de logarithmes à construire, que la table doive s'étendre, comme celle de *Callet*, jusqu'à 108000 et donner chaque logarithme à moins d'un demi-dix-millionième. Je remarquerai d'abord que l'on devra se borner à calculer les logarithmes de tous les nombres premiers moindres que 108000, puisque le logarithme du produit de plusieurs facteurs étant égal à la somme des logarithmes de ces facteurs, on obtiendra le logarithme d'un nombre composé quelconque, en faisant la somme des logarithmes de ses facteurs premiers. Mais, pour avoir ces logarithmes des nombres composés, chacun à moins d'une demi-unité du septième ordre décimal, avec quel degré d'approximation faut-il calculer ceux des nombres premiers? J'observe que la puissance de 2, qui est immédiatement inférieure à 108000, est la seizième, de sorte qu'un nombre qui ne surpasse pas 108000 renferme au plus 16 facteurs premiers; donc, pour que son logarithme ne soit pas fautif d'un demi-dix-millionième, il suffira que ceux de ses facteurs premiers ne le soient pas de la seizième partie d'un demi-dix-millionième, c'est-à-dire de $\frac{1}{320000000}$. Or cette quantité est plus grande que 0,000000003 : en conséquence on calculera les logarithmes de tous les nombres premiers, chacun à moins de trois unités du neuvième ordre décimal, et on sera sûr que ceux des nombres

composés, qui ne surpassent pas 108000, ne seront pas fautifs d'un demi-dix-millionième. Quand tous ces calculs seront effectués, on supprimera les chiffres décimaux, qui seront d'un ordre inférieur au septième, en ayant soin de forcer l'unité sur celui-ci, quand il y aura lieu, et la table demandée sera construite. La question se trouve actuellement ramenée à *résoudre l'équation*

$$10^x = b,$$

dans laquelle b recevra successivement pour valeurs tous les nombres premiers moindres que 108000, à l'exception de 5, et à calculer dans chacune de ces équations la valeur de x, à moins de trois unités du neuvième ordre décimal.

Nous exceptons le nombre 5, parce que l'on obtiendra son logarithme en retranchant le logarithme de 2 de celui de 10 (**426**), lequel est égal à l'unité (**422**).

428. Il convient donc de nous occuper de la résolution de l'équation précédente; mais pour plus de généralité nous considérerons l'équation

$$a^x = b \qquad [1],$$

dans laquelle a et b représentent deux nombres positifs quelconques. Il peut se présenter deux cas principaux, suivant que a sera plus grand ou plus petit que l'unité.

Si $a > 1$, b pourra être ou plus grand que 1 ou plus petit que 1; et s'il est > 1, il pourra être ou $> a$ ou $< a$.

Si $a < 1$, b pourra aussi être plus petit que 1, ou > 1; et si b est plus petit que 1, il pourra être ou $< a$ ou $> a$. Nous aurons donc en tout six cas à examiner. Ils sont compris dans le tableau suivant :

$$a > 1 \begin{cases} b > 1 \begin{cases} b > a \\ b < a \end{cases} \\ b < 1 \end{cases} \qquad a < 1 \begin{cases} b < 1 \begin{cases} b < a \\ b > a \end{cases} \\ b > 1 \end{cases}$$

1er Cas. $a > 1$, $b > a$.

Je remarque d'abord que, dans tous les cas, l'équation [1] ne pourra être vérifiée que par une seule valeur réelle de x, puis-

que nous avons démontré que si x croissait d'une manière continue, la fonction a^x croissait ou décroissait d'une manière continue, selon quo $a > 1$ ou < 1. Ainsi, lorsque x passera par tous les états de grandeur compris entre $-\infty$ et $+\infty$, il y aura un instant et un seul où la fonction a^x sera égale à b.

Cela posé, il est évident que si nous pouvons développer la valeur de l'inconnue x en fraction continue, nous calculerons ensuite cette valeur avec tel degré d'approximation que nous voudrons, de sorte que le problème que nous nous sommes proposé sera résolu. Je cherche donc à déterminer le plus grand nombre entier contenu dans x (389), et, pour cela, je substitue dans l'équation [1], à la place de x, la suite naturelle des nombres entiers 1, 2, 3, 4...*, jusqu'à ce que je parvienne à deux nombres consécutifs n et $n+1$, tels que l'on ait $a^n < b$ et $a^{n+1} > b$, et j'en conclus que la valeur de x étant comprise entre n et $n+1$, n sera le plus grand nombre entier contenu dans x. On posera donc

$$x = n + \frac{1}{y},$$

et il s'agira de déterminer le plus grand nombre entier contenu dans y. Cette valeur de x devant vérifier l'équation [1], nous aurons, en l'y substituant,

$$a^{n+\frac{1}{y}} = b,$$

équation d'où on tirera successivement

$$a^{\frac{1}{y}} = \frac{b}{a^n}, \text{ et } c^y = a \qquad [2],$$

en posant, pour abréger, $\frac{b}{a^n} = c$. Or, cette équatiou est de la même forme que la proposée, car a^n étant $< b$, $c = \frac{b}{a^n} > 1$, et a^{n+1} étant $> b$, on voit que $a > \frac{b}{a^n} = c$. On déterminera donc

* Je ne fais pas $x=0$, parce que a étant supposé plus petit que b, il est clair que x est > 1.

la partie entière de la valeur de y, comme on a obtenu le plus grand nombre entier contenu dans x, en substituant dans l'équation [2], à la place de y, la suite naturelle des nombres entiers 1, 2, 3,... jusqu'à ce qu'on parvienne à deux nombres consécutifs p et $p+1$ tels que l'on ait $c^p < a$ et $c^{p+1} > a$, et alors, y étant comprise entre ces deux nombres, on posera

$$y = p + \frac{1}{z}$$

(on n'a pas fait $y=0$, parce que cette quantité est >1, puisque $\frac{1}{y}$ représente une quantité plus petite que l'unité).

On substituera donc cette valeur de y dans l'équation [2], et, en posant pour abréger $\frac{a}{c^p} = d$, on trouvera

$$d^z = c,$$

équation sur laquelle on agira, comme sur les deux précédentes, et ainsi de suite, ce qui conduira à une suite de valeurs telles que

$$z = q + \frac{1}{u}, \quad u = r + \frac{1}{v}, \quad \text{etc.}$$

En remontant ensuite à la valeur de x, on trouvera que cette inconnue est exprimée par la fraction continue

$$x = n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \text{etc.}}}}$$

2° Cas. $a > 1$, $b > 1$, $b < a$. En faisant dans le premier membre de l'équation [1],

$$\begin{array}{ll} x = 0, & \text{on trouve} \quad 1 < b, \\ x = 1, & \qquad\qquad\quad a > b; \end{array}$$

donc la valeur de x est comprise entre zéro et l'unité, et est ainsi moindre que l'unité. On posera donc

$$x = \frac{1}{y},$$

ce qui donnera, en substituant dans [1],

$$a^{\frac{1}{y}} = b, \quad \text{d'où} \quad b^y = a.$$

Or $b > 1$ et $a > b$; ainsi cette équation rentre dans le cas précédent, de sorte qu'il est inutile de s'y arrêter.

3ᵉ Cas. $a > 1$, $b < 1$. Si on fait croître x depuis zéro jusqu'à l'infini positif, a^x croîtra aussi depuis 1 jusqu'à l'infini, et par conséquent cette fonction ne deviendra pas égale à b. Donc la valeur de x est négative. En conséquence, je pose

$$x = -y,$$

ce qui donne

$$a^{-y} = b, \quad \text{ou bien} \quad \frac{1}{a^y} = b, \quad \text{d'où} \quad a^y = \frac{1}{b}.$$

Or, $a > 1$ et $\frac{1}{b}$ est aussi > 1; donc cette équation rentre dans le premier ou dans le deuxième cas.

4ᵉ Cas. $a < 1$, $b < a$. Si on fait croître x depuis zéro jusqu'à l'infini positif, la fonction a^x décroîtra depuis 1 jusqu'à zéro, et deviendra par conséquent égale à b. Je substituerai donc à la place de x, dans l'équation [1], la suite naturelle des nombres entiers 0, 1, 2, 3, 4,... jusqu'à ce que je parvienne à deux nombres consécutifs n et $n+1$ tels que l'on ait $a^n > b$ et $a^{n+1} < b$, et l'on saura alors que, x étant comprise entre n et $(n+1)$, sa valeur est de la forme

$$x = n + \frac{1}{y},$$

y étant > 1. En substituant cette valeur de x dans l'équation [1], il viendra

$$a^{n+\frac{1}{y}} = b, \quad \text{d'où} \quad c^y = a,$$

en posant $\frac{b}{a^n} = c$. Or cette équation est de même forme que la proposée, car de $a^n > b$ et de $a^{n+1} < b$, on tire $1 > \frac{b}{a^n} = c$, et $a < \frac{b}{a^n} = c$. On la traitera donc comme la proposée, et ainsi de suite.

5° Cas. $a<1$, $b<1$, $b>a$. On ramènera ce cinquième cas au quatrième, de même qu'on a ramené le deuxième au premier.

6° Cas. $a<1$, $b>1$. On verra, comme dans le troisième cas, que la valeur de x est négative, et que la résolution de l'équation $a^x=b$ rentrera dans le quatrième ou dans le cinquième cas.

429. La valeur de x étant exprimée par une fraction continue, il est intéressant de savoir si cette fraction continue sera composée d'un nombre limité ou d'un nombre illimité de fractions intégrantes. Le premier cas aura lieu si la valeur de x est commensurable, et le deuxième si elle est incommensurable (393 et 396). Cherchons donc *quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la valeur de* x *qui vérifie l'équation* $a^x=b$ *soit commensurable.*

Nous nous bornerons à examiner les deux cas où, a étant un nombre entier, b sera une quantité commensurable plus grande ou plus petite que l'unité.

Dans le premier cas, la valeur de x sera positive, et, si on la suppose commensurable, on pourra la représenter par la fraction irréductible $\frac{m}{n}$. On aura donc alors

$$a^{\frac{m}{n}}=b, \quad \text{d'où} \quad a^m=b^n.$$

Or cette équation prouve d'abord que b est nécessairement un nombre entier, puisque les puissances d'une expression fractionnaire irréductible sont irréductibles; ensuite que a et b doivent être composés des mêmes facteurs premiers, sans quoi un même nombre pourrait être décomposé en deux systèmes de facteurs premiers, ce qui est impossible; soient donc

$$a=p^\alpha q^\beta r^\gamma \quad \text{et} \quad b=p^{\alpha'}q^{\beta'}r^{\gamma'},$$

en appelant p, q, r les facteurs premiers de a et de b; l'égalité précédente $a^m=b^n$ deviendra ainsi

$$p^{\alpha m}q^{\beta m}r^{\gamma m}=p^{\alpha' n}q^{\beta' n}r^{\gamma' n},$$

ce qui exige (*Arith.*, 85) que

$$\alpha m=\alpha' n, \quad \beta m=\beta' n, \quad \gamma m=\gamma' n,$$

égalités d'où l'on tire

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}.$$

Ainsi *lorsque* a *est un nombre entier, et que* b *est une quantité rationnelle plus grande que l'unité, pour que* x *soit commensurable, il* FAUT *que* b *soit un nombre entier, qu'il soit composé des mêmes facteurs premiers que* a, *et que les exposants de ses facteurs premiers soient proportionnels à ceux de* a.

Ces conditions sont suffisantes, car si a étant de la forme

$$a=p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma},\quad \text{on a}\quad b=p^{m\alpha}q^{m\beta}r^{m\gamma},$$

m étant un nombre entier positif, il est clair que l'on satisfera à l'équation $a^x=b$, en posant $x=m$.

Dans le deuxième cas, où b est une fraction irréductible $\frac{c}{d}$ plus petite que l'unité, la valeur de x est négative, et, en la supposant commensurable, on pourra la représenter par $-\frac{m}{n}$, de sorte qu'on aura

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{c}{d},\quad \text{d'où l'on tire}\quad \frac{1}{a^m}=\frac{c^n}{d^n}.$$

Mais deux fractions irréductibles ne peuvent pas être égales, sans être identiques; donc

$$c^n=1\quad \text{et}\quad d^n=a^m.$$

La première de ces deux égalités donne $c=1$, et la deuxième exige que d soit composé des mêmes facteurs premiers que a et que les exposants de ses facteurs premiers soient proportionnels à ceux de a, et qu'ainsi a étant égal à $p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}$, $b=\frac{1}{p^{m\alpha}q^{m\beta}r^{m\gamma}}$. On prouverait, comme tout à l'heure, que ces conditions sont suffisantes.

430. Il suit de là que, dans le *système de logarithmes vulgaires ou de* BRIGGS*, c'est-à-dire dans le système dont la base est

* C'est *Briggs* qui, sur l'invitation de *Néper*, l'inventeur des logarithmes, a calculé le premier une table de logarithmes correspondants à la base 10.

10, *il n'y a que les puissances de* 10 *qui aient leurs logarithmes commensurables*, car puisque $10 = 2.5$, si b est plus grand que l'unité, on doit avoir $b = 2^m . 5^m = 10^m$; et si b est moindre que l'unité, il faut que $b = \frac{1}{2^m . 5^m} = 10^{-m}$.

451. Lorsqu'on a construit une table de logarithmes pour une certaine base a, on peut, sans recommencer tous les calculs que l'on a faits, obtenir un nouveau système de logarithmes correspondants à une autre base A. Désignons, en effet, par x le logarithme d'un nombre quelconque n dans le nouveau système ; on aura

$$A^x = n;$$

et si on prend les logarithmes des deux membres de cette équation, dans le système connu, il viendra

$$x \log A = \log n,$$

d'où

$$x = \frac{\log n}{\log A} = \log n \times \frac{1}{\log A}.$$

Ainsi, *pour passer d'un système de logarithmes à un autre, il faut multiplier chacun des logarithmes du premier système par une fraction, dont le numérateur est l'unité, et qui a pour dénominateur le logarithme de la nouvelle base, pris dans l'ancien système. Cette fraction se nomme le* MODULE (*Arith.*, 338).

Pour faciliter ces calculs, on commencera par réduire la fraction $\frac{1}{\log A}$ en décimales, puis on formera les neuf premiers multiples du résultat, ce qui ramènera nos multiplications à de simples additions, qui se feront très-rapidement; car, si l'on veut avoir x à moins d'une unité du septième ordre décimal, par exemple, on calculera ces neuf multiples du module, chacun à moins d'une demi-unité du huitième ordre décimal, et comme on ne devra conserver que huit décimales, dans chaque produit partiel, chacun de ces produits renfermera en général un chiffre significatif de moins que le précédent. Sup-

posons, par exemple, que l'on veuille calculer le logarithme de 7 dans le système dont la base est 2,71828 1828 (le système népérien, note du n° **420**). Le logarithme de cette base est 0,43429 4482 et par conséquent le module est $\frac{1}{0,43429\ 4482}$ $= 2,30258\ 5093$; ainsi il faudra multiplier ce nombre par le logarithme de 7, c'est-à-dire par 0,8450980; on devra donc additionner les huitième, quatrième, cinquième, neuvième et huitième multiples du module, mais après y avoir reculé la virgule de un, deux, trois, cinq, six rangs vers la gauche, puisque les chiffres 8, 4, 5, 9 et 8 représentent respectivement des unités décimales du premier, deuxième, troisième, cinquième et sixième ordre; et, pour ne conserver que huit décimales dans tous ces produits partiels, on supprimera dans chacun autant de chiffres à droite que la virgule aura reculé de rangs vers la gauche, de sorte que le dernier de ces produits ne renfermera que quatre chiffres significatifs. On trouvera ainsi :

Produit par 0,8..............	1,84206 807
0,04.............	0,09210 340
0,005............	0,01151 293
0,00009..........	0,00020 723
0,000008.........	0,00001 842
	1,94591 005

Ainsi le logarithme demandé est 1,9459101.

432. Pour donner un exemple de l'application de la méthode que nous avons exposée plus haut pour résoudre l'équation $a^x = b$, nous allons *calculer le logarithme vulgaire de* 2 *à moins d'un dix-millième*. Il s'agira donc de résoudre l'équation

$$10^x = 2,$$

et le dénominateur de la réduite à laquelle on s'arrêtera différera peu de $\sqrt{10000} = 100$ (**405**).

En substituant, dans le premier membre de cette équation,

la suite naturelle des nombres 0, 1, 2,... on trouvera que

$$x=0 \quad \text{donne} \quad 1<2,$$
$$x=1 \qquad\qquad 10>2,$$

de sorte que la valeur de x est moindre que 1 ; on posera donc

$$x=\frac{1}{y},$$

ce qui donnera

$$10^{\frac{1}{y}}=2, \quad \text{d'où} \quad 2^y=10.$$

En substituant, dans le premier membre de cette équation, la suite naturelle des nombres 1, 2, 3,... on trouvera que

$$y=1 \quad \text{donne} \quad 2<10,$$
$$y=2 \qquad\qquad 4<10,$$
$$y=3 \qquad\qquad 8<10,$$
$$y=4 \qquad\qquad 16>10;$$

ainsi la valeur de y est comprise entre 3 et 4, et par conséquent *la première réduite est* $\frac{1}{3}$. Je pose donc

$$y=3+\frac{1}{z},$$

puis je substitue cette valeur de y dans l'équation $2^y=10$, ce qui donne

$$2^{3+\frac{1}{z}}=10, \quad \text{d'où} \quad 2^{\frac{1}{z}}=\frac{10}{2^3}=\frac{5}{4} \quad \text{et par suite} \quad \left(\frac{5}{4}\right)^z=2.$$

En traitant cette équation comme la précédente, on verra que

$$z=1 \quad \text{donne} \quad \frac{5}{4}<2,$$
$$z=2 \qquad\qquad \frac{25}{16}<2,$$
$$z=3 \qquad\qquad \frac{125}{64}<2,$$
$$z=4 \qquad\qquad \frac{625}{256}>2,$$

de sorte que z tombe entre 3 et 4, et que *la deuxième réduite est* $\frac{3}{10}$. Je pose

$$z = 3 + \frac{1}{u},$$

ce qui donne

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{u}} = 2, \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{u}} = \frac{2}{\left(\frac{5}{4}\right)^3} = \frac{128}{125},$$

et par suite

$$\left(\frac{128}{125}\right)^u = \frac{5}{4},$$

ou ce qui revient au même

$$(1,024)^u = 1,25.$$

On substituera dans le premier membre de cette équation la suite naturelle des nombres 1, 2, 3..., et on trouvera ainsi que la valeur de u est comprise entre 9 et 10, et qu'ainsi *la troisième réduite est* $\frac{28}{93}$. Comme le dénominateur 93 diffère peu de 100, j'applique à cette fraction la règle du n° **402**, et je trouve que l'erreur correspondante est moindre que $\frac{1}{93.103} = \frac{1}{9579}$, fraction à fort peu près égale à 0,0001 ; cependant on n'est pas sûr que la réduite $\frac{28}{93}$ donne le degré d'approximation demandé. En la réduisant en décimales, on trouve 0,3010, valeur qui n'est pas fautive d'un dix-millième.

On voit, par cet exemple, que la méthode que nous avons donnée pour calculer une table de logarithmes deviendrait réellement impraticable pour de grands nombres, aussi est-ce par d'autres procédés que les tables dont nous nous servons ont été construites. Nous y reviendrons plus loin en donnant les *séries* qui servent au calcul logarithmique (chap. XIII, § VI).

433. Nous n'entrerons pas ici dans les détails de ce qu'il y a à faire pour trouver, à l'aide d'une table, le logarithme d'un

nombre donné ou pour revenir d'un logarithme donné au nombre correspondant; nous avons résolu ces deux questions dans nos *Leçons d'Arithmétique* avec tous les développements qu'elles comportent; mais nous avons alors admis ce principe dont il convient de donner la démonstration : *lorsque l'on considère trois nombres suffisamment grands et tels que la différence des deux extrêmes est fort petite, les différences de ces nombres sont sensiblement proportionnelles aux différences de leurs logarithmes.*

Soient d'abord n et $n+a$ deux nombres, l et $l+b$ leurs logarithmes, on aura

$$10^l = n, \quad 10^{l+b} = n+a, \quad \text{d'où} \quad 10^b = \frac{n+a}{n} = 1 + \frac{a}{n};$$

ce qui montre que *la différence des logarithmes de deux nombres est d'autant plus petite que ces nombres sont plus grands et que leur différence est plus petite*, car b, logarithme du nombre $\left(1+\frac{a}{n}\right)$, tend vers zéro, lorsque ce nombre tend vers 1.

Considérons maintenant trois nombres n, $n+a$ et $n+2a$ qui forment une équidifférence continue, et soient l, $l+b$, $l+b+c$ leurs logarithmes respectifs : on aura

$$10^l = n, \quad 10^{l+b} = n+a, \quad 10^{l+b+c} = n+2a,$$

égalités d'où l'on tire

$$10^b = \frac{n+a}{n}, \quad 10^c = \frac{n+2a}{n+a},$$

et par conséquent

$$10^{c-b} = \frac{n^2+2na}{(n+a)^2} = \frac{(n+a)^2-a^2}{(n+a)^2} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{n}{a}+1\right)^2}.$$

Or $(c-b)$ est le logarithme du deuxième membre de cette équation, donc $(c-b)$ sera extrêmement petit lorsque n sera très-grand et a très-petit. On voit donc que *lorsque trois nombres très-grands forment une équidifférence continue dont la raison est très-petite, la différence* c — b *des différences* b *et* c

de leurs logarithmes est extrêmement petite, de sorte que ces différences sont sensiblement égales. C'est pour cela que l'on trouve, dans les tables, les mêmes différences répétées successivement un assez grand nombre de fois et d'autant plus de fois que l'on s'éloigne davantage du commencement de la table, parce que les chiffres par lesquels elles diffèrent sont d'un ordre inférieur à ceux que l'on conserve.

Soit maintenant α la commune mesure de trois nombres fort grands ; ces trois nombres pourront être représentés par n, $n+a\alpha$, $n+b\alpha$ et regardés comme faisant partie d'une progression par différence dont α serait la raison. Mais, en vertu du dernier principe que nous avons établi, les logarithmes des termes de cette progression formeront sensiblement aussi une progression par différence, de sorte qu'en appelant β la raison de cette deuxième progression, les logarithmes de nos trois nombres pourront être représentés respectivement par l, $l+a\beta$, $l+b\beta$; d'où l'on voit que l'on a *sensiblement* cette proportion :

$a\alpha$, différence des deux premiers nombres, *est à* $b\alpha$, différence des deux extrêmes, *comme* $a\beta$, différence des logarithmes des deux premiers nombres, *est à* $b\beta$, différence des logarithmes des deux extrêmes.

Ainsi se trouve établi le principe sur lequel on s'appuie pour faire usage des tables de logarithmes. Il resterait à examiner quelle est la limite de l'erreur que l'on commet en employant ce principe, mais c'est là une recherche à laquelle nous ne pouvons pas nous livrer ici.

§ II. DES ÉQUATIONS EXPONENTIELLES.

434. *On appelle* QUANTITÉ EXPONENTIELLE *une quantité qui est élevée à une puissance dont l'exposant est inconnu.* Il y a des exponentielles de plusieurs degrés. Quand l'exposant est inconnu, on dit que l'exponentielle est du premier degré : telle est a^x. Quand l'exposant est lui-même une exponentielle du

premier degré, on dit que la quantité dont il s'agit est une exponentielle du deuxième degré : telle est a^{b^x} (ce symbole signifie qu'il faut élever a à la puissance dont l'exposant est b^x). De même, $a^{b^{c^x}}$ est une exponentielle du troisième degré, et ainsi de suite.

435. *On appelle* ÉQUATION EXPONENTIELLE *celle dans laquelle entrent des quantités exponentielles, et son degré est celui de l'exponentielle du plus haut degré qui y entre.*

Nous ne considérerons, parmi les équations exponentielles d'un degré supérieur au premier, que celles à deux termes, c'est-à-dire qui contiennent un terme affecté de l'inconnue et un terme tout connu. Les équations $a^x = m$, $a^{b^x} = m$, etc., sont des équations exponentielles à deux termes.

436. L'équation exponentielle la plus simple est

$$a^x = b,$$

dans laquelle a et b sont deux nombres positifs connus. On pourrait la résoudre à l'aide de la méthode que nous avons exposée au n° **428** ; mais les tables de logarithmes fournissent un moyen bien plus simple d'obtenir la valeur de x. Si l'on prend, en effet, les logarithmes des deux membres de cette équation, il viendra

$$x \log a = \log b, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{\log b}{\log a}.$$

437. Cherchons maintenant à résoudre l'équation générale

$$a^{b^{c^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{k^x}}}}}} = m :$$

si on prend les logarithmes des deux membres, il viendra

$$b^{c^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{k^x}}}}} \log a = \log m, \quad \text{d'où} \quad b^{c^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{k^x}}}}} = \frac{\log m}{\log a}.$$

Ainsi la résolution de l'équation proposée se trouve ramenée à celle d'une équation exponentielle dont le degré est inférieur au

sien d'une unité; donc, en traitant cette seconde équation comme la première, la troisième de la même manière et ainsi de suite, on arrivera à l'équation

$$k^x = \mathrm{P}, \quad \text{d'où on tirera} \quad x = \frac{\log \mathrm{P}}{\log k}.$$

Exemple. Résoudre l'équation

$$2^{3^{4^x}} = 512\,;$$

on exécutera les calculs suivants :

$$3^{4^x} = \frac{\log 512}{\log 2} = \frac{2{,}70926996}{0{,}30103000}\,;$$

$$4^x = \frac{\log 2{,}70926996 - \log 0{,}30103000}{\log 3} = \frac{0.9542424}{0{,}47712125}\,;$$

$$x = \frac{\log 0.9542424 - \log 0.47712125}{\log 4} = \frac{0{,}30103000}{0{,}60206000} = \frac{1}{2}.$$

438. Considérons maintenant l'équation

$$\mathrm{A}a^{mx+m'} + \mathrm{B}b^{nx+n'} + \mathrm{C}c^{px+p'} + \text{etc.} = 0.$$

Cette équation revient à

$$\mathrm{A}'a^{mx} + \mathrm{B}'b^{nx} + \mathrm{C}'c^{px} + \text{etc.} = 0,$$

en posant, pour abréger, $\mathrm{A}a^{m'} = \mathrm{A}'$, $\mathrm{B}b^{n'} = \mathrm{B}'$, $\mathrm{C}c^{p'} = \mathrm{C}'$, etc. Si maintenant on fait $b = a^\beta$, $c = a^\gamma$, etc., β, γ, etc., étant des inconnues dont les valeurs sont $\beta = \frac{\log b}{\log a}$, $\gamma = \frac{\log c}{\log a}$,... il viendra

$$\mathrm{A}'a^{mx} + \mathrm{B}'a^{\beta nx} + \mathrm{C}'a^{\gamma px} + \ldots = 0,$$

équation que l'on ramène enfin à

$$\mathrm{A}'y^m + \mathrm{B}'y^{\beta n} + \mathrm{C}'y^{\gamma p} + \ldots = 0 \qquad [3],$$

en posant

$$a^x = y \qquad [4].$$

Ainsi, quand on aura appris à résoudre l'équation [3], on substituera les valeurs que l'on en tirera dans l'équation [4], et il

sera facile alors d'obtenir les différentes valeurs de x. Remarquons toutefois qu'il faudra rejeter les valeurs négatives de y, car elles conduiraient (425) à des valeurs imaginaires de x.

439. Exemple I. *Résoudre l'équation*

$$a^{2x-3}-2a^{x-2}-3a^{-1}=0.$$

Elle revient à

$$\frac{a^{2x}}{a^3}-\frac{2a^x}{a^2}-\frac{3}{a}=0,$$

d'où, en chassant les dénominateurs et en posant $a^x=y$,

$$y^2-2ay-3a^2=0\begin{cases}y=3a,\\ y=-a;\end{cases}$$

partant $$x=\frac{\log a+\log 3}{\log a},\quad \text{si}\quad a>0,$$

et si a est négatif, les valeurs de x sont imaginaires.

Exemple II. *Résoudre l'équation* $5^{x-1}=2+\frac{3}{5^{x-2}}$.

Cette équation revient à

$$\frac{5^x}{5}=2+\frac{3.5^2}{5^x},$$

d'où, en chassant les dénominateurs, et après avoir posé $5^x=y$,

$$y^2-10y-375=0,\ y=5\pm 20;$$

partant $$x=\frac{\log y}{\log 5}=\frac{\log 25}{\log 5}=2.$$

§ III. DE L'USAGE DES LOGARITHMES DANS LA RÉSOLUTION DE CERTAINS PROBLÈMES.

440. On sait que quand une personne prête à une autre une certaine somme d'argent, que l'on appelle *capital*, elle se fait payer par l'emprunteur une somme qui se nomme *intérêt*, pour s'indemniser de la jouissance de ce capital, dont elle s'est privée pendant un certain temps, et le *taux* de l'intérêt est ce que rapporterait ainsi un capital de 100 francs, placé pendant un an.

On distingue deux sortes d'intérêt, *le simple* et *le composé*. L'intérêt simple est celui qui se tire uniformément du capital prêté, sans pouvoir devenir lui-même capital, ni produire d'intérêts. Il est proportionnel au capital et au temps pendant lequel ce capital est resté entre les mains de l'emprunteur.

L'intérêt, au contraire, devient *composé* quand il s'ajoute au capital pour devenir ainsi capital lui-même et produire, en conséquence, un certain intérêt. Concevons, par exemple, qu'une personne emprunte 2000 francs à 5 pour 100 par an : elle devra, à l'échéance du billet, cette somme, plus ses intérêts, c'est-à-dire 2100 francs. Si donc elle ne peut s'acquitter alors, elle devra à son créancier, au bout de la deuxième année, les 2100 francs qu'elle lui devait à la fin de la première, plus les intérêts de cette somme, c'est-à-dire 2205 francs, et ainsi de suite d'année en année, jusqu'à l'acquittement de la dette. C'est des principales questions relatives à la *théorie des intérêts composés* que nous allons nous occuper actuellement.

441. Nous représenterons le capital prêté par a, le nombre des années pendant lesquelles il aura été prêté par n ; par A ce qu'il deviendra au bout de ce temps, et par r le *denier de l'intérêt*, c'est-à-dire ce que 1 franc rapporte dans une année. Ainsi, dans une question d'intérêts, il y a quatre choses à considérer, de sorte que la recherche de l'une d'elles, lorsqu'on connaît les trois autres, donne lieu à quatre problèmes. Mais il est évident que la solution de chacune de ces questions ne diffère en rien de celle des autres, puisqu'en regardant successivement, dans l'équation relative à l'une d'elles, les quatre quantités a, A, n et r comme inconnues, on obtiendra facilement les formules qui doivent les résoudre. Nous traiterons donc toutes les questions d'intérêts composés, comme si l'on demandait la valeur d'un capital connu à une époque déterminée.

442. Problème I. *Une somme* a *est placée pour* n *années au denier* r ; *que vaudra-t-elle, tant en principal qu'en intérêts, à l'expiration de ces* n *années ?*

Puisque 1^f rapporte r^f dans un an, et que, dans les questions

d'intérêt simple, cet intérêt est proportionnel au capital, on voit que a^f rapporteront ar^f en un an ($1 : a :: r : ar$); de sorte que cette somme vaudra, au bout d'un an, tant en principal qu'en intérêt, $a + ar = a(1+r)$. Ainsi, *pour avoir la valeur d'un capital quelconque au bout d'un an, il faut multiplier ce capital par la quantité* $(1+r)$. Nous obtiendrons donc la valeur du nouveau capital $a(1+r)$ au bout d'un an, c'est-à-dire celle du capital a^f au bout de 2 ans, en multipliant $a(1+r)$ par $(1+r)$; ce qui donnera $a(1+r)^2$. Par la même raison, ce capital a^f vaudra au bout de 3 ans, $a(1+r)^2 \times (1+r) = a(1+r)^3$, et ainsi de suite. Donc, au bout de n années, ce même capital vaudra $a(1+r)^n$; donc on aura

$$A = a(1+r)^n \qquad [5],$$

formule qui résout le problème, lorsque la somme a a été prêtée pour un nombre exact d'années.

Mais si cette somme avait été placée pendant n années plus p jours, quelle serait alors la valeur de A? Les banquiers ne composent les intérêts que d'année en année, de sorte que pour trouver la valeur du capital a^f, au bout de ce temps, il faudra le regarder comme ayant été prêté à intérêts composés pendant n années, ce qui produira la somme $a(1+r)^n$, et considérer celle-ci comme placée à intérêts simples pendant les p jours excédants. Or, puisque 1^f rapporte r^f en 1 an, il rapportera $\frac{r^f}{360}$ en un seul jour (dans les questions d'intérêts, on regarde l'année comme étant composée de 12 mois de 30 jours chacun), et par conséquent $\frac{pr^f}{360}$ en p jours. Donc le capital $a(1+r)^n$ produira, dans le même temps, $\frac{pr}{360} \times a(1+r)^n$ d'intérêts; de sorte que le capital a^f vaudra, au bout de n années et p jours, tant en principal qu'en intérêts,

$$a(1+r)^n + \frac{pr}{360} . a(1+r)^n = a(1+r)^n \left(1 + \frac{pr}{360}\right);$$

donc enfin la solution de la question sera donnée par la formule

$$A = a(1+r)^n\left(1+\frac{pr}{360}\right) \qquad [6].$$

Les géomètres ne partagent point l'avis des banquiers : se préoccupant du soin de donner à leurs formules toute la généralité possible, ils regardent l'équation [5] comme étant également vraie, soit que n représente un nombre exact d'années, soit que n se compose d'un nombre entier, qui peut être zéro, et d'une fraction de l'année. Ainsi, dans le cas où le capital a^f aurait été prêté pendant n années et p jours, ils remplaceraient n par $n+\frac{p}{360}$ dans la formule [5] et diraient que la solution de la question est donnée par la formule

$$A = a(1+r)^{n+\frac{p}{360}} \qquad [7].$$

En effet, supposer, comme le font les banquiers, que l'intérêt est composé d'une année à une autre et que, dans le courant d'une seule, il soit traité comme intérêt simple, est une hypothèse bizarre qui ne saurait être admise que dans le cas d'une convention formelle entre le créancier et son débiteur. Il est bien plus naturel d'admettre que l'intérêt se compose de jour en jour, comme il se compose d'année en année; car, si la personne qui a emprunté 2000^f, par exemple, pour 20 jours, ne pouvant pas acquitter sa dette à l'échéance du billet, garde encore les fonds pendant 15 autres jours, ne devra-t-elle pas payer, au bout de ces 15 nouveaux jours, la somme qu'elle devait au bout des 20 premiers, plus les intérêts de cette somme pendant les 15 derniers jours; de sorte que les intérêts auront été ainsi composés? En admettant cette manière de voir, il faudra, pour trouver la valeur de a^f au bout de n années plus p jours, c'est-à-dire au bout de $(360n+p)$ jours, chercher combien 1^f doit rapporter d'intérêts en 1 jour pour valoir $(1+r)$ francs au bout d'un an, conformément aux données de la question. Soit x cet intérêt de 1^f pour 1 jour : en raisonnant comme nous l'avons fait plus haut, on verra facilement : 1° que 1^f vaudra, tant en capital qu'en intérêts, au bout

de 360 jours, $(1+x)^{360}$; de sorte qu'on doit avoir

$$(1+x)^{360}=1+r, \quad \text{d'où} \quad 1+x=(1+r)^{\frac{1}{360}};$$

2° que a^f vaudront, au bout de $(360n+p)$ jours, $a(1+x)^{360n+p}$, ou bien $a(1+r)^{\frac{360n+p}{360}}$, en remplaçant $(1+x)$ par la valeur que nous venons de trouver; donc

$$A=a(1+r)^{n+\frac{p}{360}} \qquad [7].$$

Ainsi, en regardant les intérêts comme se composant de jour en jour aussi bien que d'année en année, la formule [5] est vraie aussi bien quand n est un nombre fractionnaire, que quand il représente un nombre entier.

Elle l'est encore, même lorsque n est négatif; car si on y change n en $-n$, elle deviendra

$$A=a(1+r)^{-n} \qquad [8]:$$

or, lorsque n est une quantité positive, A représente ce que la somme a, argent comptant aujourd'hui, vaudra dans n années; donc, lorsque n sera une quantité négative, A représentera ce que la somme a, argent comptant aujourd'hui, valait il y a n années (**22**); et, en effet, si l'on a placé A^f, il y a n années au denier r, cette somme doit valoir aujourd'hui, tant en principal qu'en intérêts, $A(1+r)^n$; si donc a représente cette valeur, on aura

$$A(1+r)^n=a, \quad \text{d'où} \quad A=a(1+r)^{-n}.$$

Il suit de là que, si l'on veut trouver le capital que l'on doit placer aujourd'hui au denier r, pour avoir, au bout de n années, une certaine somme, tant en principal qu'en intérêts, il faut, dans la formule [8], remplacer a par cette somme, et la valeur qui en résultera, pour A, sera la réponse à la question. Cela revient à tirer la valeur de a de la formule [5].

445. Problème II. *Une personne qui a besoin d'argent comptant, vend, pour s'en procurer, un contrat de 12000^f qui n'est payable que dans 7 ans et 158 jours. L'escompte est pris à raison de 6 pour 100 par an, et on demande combien elle recevra?*

Si on veut faire usage de la formule [8], on y remplacera a par 12000, r par 0,06 et n par $7\frac{158}{360}=7\frac{79}{180}=\frac{1339}{180}$; ce qui donnera

$$A=12000\,(1,06)^{-\frac{1339}{180}}=\frac{12000}{(1,06)^{\frac{1339}{180}}};$$

d'où, en prenant les logarithmes des deux membres,

$$\log A=\log 12000-\frac{1339}{180}\times\log 1,06.$$

On exécutera donc le calcul suivant

$$\log 1,06=0,025\ 30587\qquad \begin{aligned}\log 12000&=4,079\ 1812,\\ \frac{1339}{180}\times\log 1,06&=0,188\ 2476,\\ \log A&=3,890\ 8336,\\ A&=7779,18.\end{aligned}$$

Si on veut faire usage de la formule [6], on y fera $A=12000$, $r=0,06$, $n=7$, $p=158$; ce qui donnera

$$12000=a\,(1,06)^7\times\frac{61,58}{60},\quad \text{d'où}\quad a=\frac{720000}{(1,06)^7.61,58}.$$

En effectuant ce calcul par logarithmes, on trouvera

$$\left.\begin{aligned}7\times\log 1,06&=0,177\ 1411\\ \log 61,58&=1,789\ 4397\end{aligned}\right\}\qquad \begin{aligned}\log 720000&=5,857\ 3325\\ &1,966\ 5808\\ \log a&=3,890\ 7517\\ a&=7775,92^{*}.\end{aligned}$$

* Ce résultat étant plus petit que celui qui est fourni par la formule [7], il en résulte que la formule [6] donne pour A une valeur plus grande que celle-ci; or, il est facile de démontrer qu'il en doit être ainsi. Si l'on divise, en effet, les seconds membres de ces deux formules par $a\,(1+r)^n$, la question sera réduite à prouver que

$$1+\frac{pr}{360}>(1+r)^{\frac{p}{360}}.$$

Pour y parvenir, élevons ces deux quantités à la trois-cent-soixantième puissance, elles deviendront respectivement

$$\left(1+\frac{pr}{360}\right)^{360}\quad\text{et}\quad(1+r)^p,$$

144. Problème III. *Au bout de combien de temps un capital prêté à 5 pour 100 par an sera-t-il doublé?*

En employant la formule [5], on en tirera, après y avoir fait $A = 2a$ et $r = 0,05$,

$$2 = (1,05)^n; \quad \text{d'où} \quad n = \frac{\log 2}{\log 1,05} = \frac{0.3010300}{0,0211893} = 14^a,21.$$

---

et on voit immédiatement que si on développe ces expressions par la formule du binome de Newton, les deux premiers termes de l'une seront identiques avec les deux premiers termes de l'autre. Formons le terme qui, dans chacune, en a k avant lui; nous trouverons, pour la première,

$$\frac{360(360-1)(360-2)\ldots\{360-(k-1)\}}{1.2.3\ldots k} \cdot \left(\frac{pr}{360}\right)^k,$$

et pour la seconde

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots\{p-(k-1)\}}{1.2.3\ldots k}, r^k.$$

En divisant ces deux expressions l'une par l'autre, il viendra

$$\frac{360(360-1)(360-2)\ldots\{360-(k-1)\}}{p(p-1)(p-2)\ldots\{p-(k-1)\}} \cdot \left(\frac{p}{360}\right)^k.$$

Or, au lieu de multiplier la première de ces deux fractions par la seconde, il reviendra au même de diviser les k facteurs du dénominateur de cette première par p, et les k facteurs de son numérateur par 360, ce qui donnera

$$\frac{\left(1-\frac{1}{360}\right)\left(1-\frac{2}{360}\right)\ldots\left\{1-\frac{k-1}{360}\right\}}{\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{2}{p}\right)\ldots\left\{1-\frac{k-1}{p}\right\}}.$$

Or, p étant moindre que 360, on voit que $1-\frac{n}{360} > 1-\frac{n}{p}$, de sorte que k étant > 1, chaque facteur du numérateur est plus grand que son correspondant dans le dénominateur. Par conséquent, à partir du troisième terme inclusivement, tous les termes du développement de $\left(1+\frac{pr}{360}\right)^{360}$ sont plus grands que ceux qui occupent les mêmes rangs dans $(1+r)^p$. Donc

$$a(1+r)^n\left(1+\frac{pr}{360}\right) > a(1+r)^{n+\frac{p}{360}}.$$

On voit par là que quand on emprunte à intérêts composés, la somme due est moins forte, s'il y a moins d'un an écoulé, qu'elle ne le serait dans le cas de l'intérêt simple (faites $n=0$), tandis que le contraire a lieu, si le débiteur garde la somme plus d'un an.

Ainsi un capital *quelconque* est doublé au bout de $14^a,21$, c'est-à-dire en moins de 14 ans et 76 jours. On pouvait prévoir que le nombre d'années demandé serait indépendant de la valeur du capital prêté, puisque les valeurs qu'acquièrent des capitaux différents, placés pendant le même temps, sont proportionnelles à celles de ces capitaux.

Si l'on veut faire usage de la formule [6], on trouvera, après y avoir fait $A = 2a$ et $r = 0,05$,

$$2 = (1,05)^n.\left(1+\frac{p.0,05}{360}\right) = (1,05)^n.\left(1+\frac{p}{7200}\right),$$

équation qui renferme les deux inconnues n et p. Toutefois elle n'est pas indéterminée, attendu que le nombre entier n doit être tel que l'on ait

$$(1,05)^n < 2, \quad \text{d'où} \quad n < \frac{\log 2}{\log 1,05},$$

et $$(1,05)^{n+1} > 2, \quad \text{d'où} \quad n+1 > \frac{\log 2}{\log 1,05}.$$

Ainsi n est le plus grand nombre entier contenu dans la quantité $\frac{\log 2}{\log 1,05}$. Ce plus grand nombre entier étant 14, on le substituera à la place de n dans l'équation qu'il s'agit de résoudre, et il viendra ainsi

$$2 = (1,05)^{14}.\left(1+\frac{p}{7200}\right),$$

d'où

$$\log(7200+p) = \log 2 + \log 7200 - 14 \log 1,05$$

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0,301\ 0300 \\ \log 7200 &= 3,857\ 3325 \\ & \overline{4,158\ 3625} \\ 14 \log 1,05 &= 0,296\ 6502 \\ \log(7200+p) &= \overline{3,861\ 7123} \\ 7200+p &= 7273 \end{aligned}$$

Ainsi $p = 73$; donc le capital sera doublé au bout de 14 ans et 73 jours.

445. On voit, par ce résultat, avec quelle rapidité croît la valeur d'un capital à mesure que le nombre des années pendant lesquelles il est placé devient plus considérable. Ainsi, en élevant à la dixième puissance les deux membres de l'équation

$$2 = (1{,}05)^{14{,}21}, \quad \text{il vient} \quad 2^{10} \quad \text{ou} \quad 1024 = (1{,}05)^{142{,}1}.$$

Un capital devient donc 1024 fois plus grand, au bout de 142 ans environ, de sorte qu'en Angleterre, où la loi permet les substitutions, si une personne en mourant laissait 1 million, pour être remis à l'aîné de ses arrière-petits-fils, l'héritage s'élèverait, au bout de 142 ans, à la somme énorme de 1 milliard 24 millions. Il faut remarquer toutefois qu'il n'en serait pas tout à fait ainsi, dans la réalité, parce que l'abondance du numéraire et la difficulté de trouver l'emploi des sommes accumulées feraient baisser le taux de l'argent; de sorte que la progression suivrait bientôt une loi moins rapide.

446. Problème IV. *Une personne achète une propriété* a^f, *argent comptant. Elle possède deux contrats, l'un de* b^f, *payable dans* m *années, et l'autre de* c^f, *payable dans* n *années, et propose à un banquier de les lui escompter, moyennant un intérêt de* r^f *pour* 1^f, *avec cette condition que, si la valeur actuelle des deux contrats n'est pas suffisante pour acquitter le prix de la propriété, le banquier lui prêtera, pour* p *années et au même taux, la somme qui lui sera nécessaire. Quelle sera, dans cette hypothèse, la valeur du billet à souscrire au profit du banquier?*

La somme b^f payable dans m années vaut actuellement $\frac{b}{(1+r)^m}$; la somme c^f, payable dans n années, vaut de même aujourd'hui $\frac{c}{(1+r)^n}$; donc les deux contrats valent $\frac{b}{(1+r)^m}$ $+\frac{c}{(1+r)^n}$, argent comptant; donc si cette somme est supérieure à a, le banquier devra remettre au possesseur de ces contrats

$$\frac{b}{(1+r)^m}+\frac{c}{(1+r)^n}-a,$$

et si elle est moindre, il devra lui prêter

$$a - \left\{ \frac{b}{(1+r)^m} + \frac{c}{(1+r)^n} \right\};$$

mais, comme il ne sera remboursé que dans p années, il faudra qu'on lui souscrive un billet de

$$\left[a - \left\{ \frac{b}{(1+r)^m} + \frac{c}{(1+r)^n} \right\} \right] (1+r)^p,$$

payable *sans intérêts*, dans p années.

447. PROBLÈME V. *Une personne place une somme* a *à intérêts composés, pour* n *années, et chaque année elle joint au capital de cette année une nouvelle somme* b, *provenant de ses économies, laquelle doit rester entre les mains du débiteur aux mêmes conditions que la première et jusqu'au remboursement de celle-ci. On demande quel sera, à cette époque, le montant de toutes ces sommes accumulées avec leurs intérêts, le denier de l'intérêt étant* r.

Il est clair que le capital primitif a, ayant été placé pendant n années, vaudra alors

$$a(1+r)^n,$$

que la première somme b, étant restée $(n-1)$ années entre les mains de l'emprunteur, sera devenue ainsi

$$b(1+r)^{n-1},$$

que la deuxième, la troisième, la quatrième,... la $(n-1)^{me}$ somme b vaudront de même, au bout de n années,

$$b(1+r)^{n-2}, \quad b(1+r)^{n-3}, \quad b(1+r)^{n-4}, \ldots b(1+r);$$

et, en ajoutant à toutes ces sommes l'économie b faite pendant la n^{me} année, on aura pour somme totale

$$A = a(1+r)^n + b(1+r)^{n-1} + b(1+r)^{n-2} + \ldots + b(1+r) + b,$$

ou, en mettant b en facteur commun,

$$A = a(1+r)^n + b\{(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \ldots + (1+r) + 1\}.$$

Or, la quantité comprise dans les accolades est le quotient de $(1+r)^n-1$ par $(1+r)-1=r$ (**72**); donc

$$A=a(1+r)^n+b\frac{(1+r)^n-1}{r}=\frac{(ar+b)(1+r)^n-b}{r},$$

Si l'on suppose $b=a$, il viendra

$$A=\frac{a\{(1+r)^{n+1}-1\}}{r}.$$

448. Problème VI. *Une compagnie emprunte une somme* a *pour exécuter un canal, et elle s'engage à éteindre sa dette au moyen de* n *payements égaux effectués à la fin de chaque année, à partir de l'époque de l'emprunt. Le denier de l'intérêt est* r, *et on demande quelle sera la quotité de chaque payement.*

On a donné à chacun de ces payements le nom d'annuité, de sorte que l'*on appelle ainsi la somme qu'il faut payer annuellement pour éteindre une dette en un certain nombre d'années. Cette dette se nomme le prix de l'annuité.*

Il est clair que la quotité de l'annuité doit être telle que si la compagnie la déposait à la fin de chaque année chez un banquier, qui en payerait l'intérêt au denier r, pour l'y laisser jusqu'à la fin des n années, la somme totale qu'elle en retirerait alors devrait être égale au montant de la dette, c'est-à-dire à $a(1+r)^n$. Représentons donc par x l'annuité. Si cette somme eût été portée chez le banquier, elle y serait restée $(n-1)$ années, et serait ainsi devenue égale à $x(1+r)^{n-1}$; donc en payant x^f à ses créanciers, à la fin de la première année, la compagnie a éteint une partie de sa dette marquée par

$$x(1+r)^{n-1}.$$

De même, en donnant x^f à la fin de la deuxième année, la compagnie éteindra une nouvelle partie de sa dette marquée par

$$x(1+r)^{n-2},$$

et ainsi de suite. Enfin, les x^f payés à la fin de la $(n-1)^{me}$ année acquitteront une partie de la dette égale à

$$x(1+r),$$

et comme elle donne encore x^f à la fin de la n^{me} année, on voit que la partie de la dette éteinte par ces n payements sera

$$x(1+r)^{n-1}+x(1+r)^{n-2}+x(1+r)^{n-3}+\ldots+x(1+r)+x,$$

ou, ce qui revient au même,

$$x\{(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+(1+r)^{n-3}+\ldots+(1+r)+1\}$$
$$=\frac{x\{(1+r)^n-1\}}{r}\,(72);$$

mais alors l'emprunt doit être acquitté entièrement, donc

$$\frac{x\{(1+r)^n-1\}}{r}=a(1+r)^n;$$

d'où

$$x=\frac{ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

449. Supposons que l'on fasse $n=\infty$, et voyons ce que deviendra la valeur de x. Pour cela, je commence par diviser les deux termes de cette fraction par $(1+r)^n$, parce que comme ils croîtraient tous deux en même temps quand n augmentera, on ne pourrait pas suivre les variations de x. Il vient ainsi

$$x=\frac{ar}{1-\frac{1}{(1+r)^n}}.$$

Sous cette forme, on voit maintenant qu'à mesure que n augmentera, la quantité $\frac{1}{(1+r)^n}$ diminuera, que par conséquent le dénominateur augmentera et tendra à devenir égal à l'unité, de sorte que la valeur de x convergera vers la limite ar, qu'elle atteindra, lorsque n deviendra infini. Ainsi, l'annuité devient alors égale à l'intérêt du capital prêté, et c'est ce qui doit être, puisque le capital a^f ne devant jamais être payé, le débiteur ne doit, à la fin de chaque année, que l'intérêt de ce capital.

450. La théorie des annuités donne lieu à quatre questions, car on peut prendre successivement pour inconnue chacune des

quantités x, a, n, et r. La troisième question exige l'emploi des logarithmes; et la quatrième dépend de la résolution d'une équation du degré $(n+1)$, que l'on ramènera facilement à

$$az^{n+1}-(a+x)z^n+x=0,$$

en posant $1+r=z$, d'où $r=z-1$. Celle-ci a une racine égale à $+1$, laquelle est une solution étrangère à la question, car r ne peut pas être égale à l'unité.

481. Lorsque le gouvernement fait un emprunt, il émet une série d'actions toutes de la même valeur, et qu'il échange contre de l'argent comptant. Ces actions sont inscrites sur le *grand livre de la dette publique*, et rapportent ainsi un intérêt, qui est acquitté par le Trésor, à la fin de chaque semestre. Il crée en même temps *un fonds d'amortissement*, pris sur les revenus de l'État, qui est versé chaque année dans une caisse, que l'on appelle la *caisse d'amortissement*, et dont il constitue la *dotation;* le directeur de cette caisse emploie cette dotation pour racheter les actions qui ont été émises; de sorte qu'au bout d'un certain nombre d'années, l'emprunt se trouve acquitté. Ici, les intérêts de l'emprunt n'étant pas payés par la caisse d'amortissement, la somme des valeurs des différentes annuités doit être simplement égale au capital prêté; de sorte que l'on a ainsi

$$\frac{x\{(1+r)^n-1\}}{r}=a,$$

d'où

$$x=\frac{ar}{(1+r)^n-1}.$$

Cherchons en combien d'années l'emprunt sera éteint, en supposant que le fonds d'amortissement soit le centième du capital, et que le taux de l'intérêt soit 3 pour 100. On tirera d'abord de la formule précédente, en y faisant $x=\frac{a}{100}$ et $r=0,03$,

$$(1,03)^n=4, \quad \text{d'où} \quad n=\frac{\log 4}{\log 1,03}=47 \text{ ans.}$$

§ IV. USAGE DE LA RÈGLE A CALCUL.

432. Nous avons vu dans les *Leçons d'Arithmétique* que la *Règle à calcul* ou *Règle logarithmique*, était un instrument composé d'une partie fixe ou *Règle*, et d'une partie mobile appelée *Réglette*, qui glisse à l'intérieur de la première.

La Règle et la Réglette portent une graduation identique obtenue en traçant sur l'une et l'autre des divisions proportionnelles aux logarithmes des nombres, à partir de 0 qui est le logarithme de 1. Sur chaque division est inscrit le nombre correspondant au logarithme représenté par la distance de cette division à l'origine. Il en résulte que l'intervalle compris entre le logarithme de 1 ou zéro et le logarithme de 10 étant égal à l'unité, les chiffres

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

seront inscrits à des distances de l'origine respectivement égales à

0,301; 0,477; 0,602; 0,699; 0,778; 0,845; 0,903; 0,954.

Entre les divisions principales sont d'ailleurs tracées d'autres subdivisions dont le nombre varie avec les dimensions de la Règle. Nous ne nous arrêterons pas ici à ces détails de construction qui ont été donnés dans l'*Arithmétique* avec tous les développements nécessaires.

433. De la graduation de la Règle et de la Réglette, résulte cette propriété fondamentale et caractéristique de la Règle à calcul :

Pour trouver le PRODUIT *de deux nombres, il faut placer le chiffre 1 de la Réglette sous l'un des deux nombres lu sur la Règle. Le produit cherché correspond sur la Règle au second nombre lu sur la Réglette.*

Il est clair, en effet, que l'on détermine ainsi sur la Règle un nombre dont la distance au chiffre 1 de la Règle, c'est-à-dire le logarithme, est égal à la somme des distances du premier

nombre au chiffre 1 de la Règle, et du second nombre au chiffre 1 de la Réglette, c'est-à-dire à la somme des logarithmes des deux nombres donnés. Ce nombre est donc leur produit.

De cette propriété de la Règle à calcul, on peut déduire facilement toutes les autres, en se rappelant les principes qui président à la formation des logarithmes.

454. Nous ne reviendrons pas ici sur la manière d'opérer la *multiplication* et la *division*. Nous avons exposé dans l'*Arithmétique* la marche à suivre dans tous les cas, soit que l'on opère avec la Réglette droite, soit que l'on emploie la Réglette renversée. Nous nous sommes également occupés de l'*élévation au carré* et de l'*extraction de la racine carrée* au moyen de l'échelle des carrés tracée au bas de la Règle *. Nous observerons cependant que l'emploi des deux échelles des nombres tracées sur le haut de la Règle et sur la Réglette suffirait pour trouver les carrés directement (puisqu'une élévation au carré revient à une multiplication dans le cas où les deux facteurs sont égaux), et, à la rigueur, les racines carrées avec un tâtonnement. Il est clair, en effet, qu'il suffira de faire glisser la Réglette jusqu'à ce que le chiffre 1 de la Réglette et le nombre dont on demande la racine lu sur la Règle se trouvent à la fois l'un au-dessous, l'autre au-dessus d'un même nombre, qui sera précisément la racine cherchée; car la distance comptée sur la Règle entre le nombre trouvé et l'origine de la Règle, plus la distance égale comptée sur la Réglette entre ce même nombre et l'origine de la Réglette, c'est-à-dire le double du logarithme du nombre trouvé, reproduira la distance du nombre proposé à l'origine de la Règle, c'est-à-dire le lo-

* Cette échelle représente les logarithmes des carrés des nombres qui y sont inscrits; ses divisions sont donc doubles de celles de l'échelle des nombres tracée sur le haut de la Règle et sur la Réglette; en effet, le carré d'un nombre étant le produit de deux facteurs égaux à ce nombre, les **logarithmes des carrés sont les doubles des logarithmes des nombres. Il en résulte qu'en lisant les racines sur l'échelle des carrés, on trouve les carrés sur l'échelle des nombres et réciproquement.**

garithme de ce nombre; donc le nombre trouvé sera la racine carrée du nombre proposé. Le tâtonnement sera amoindri en renversant la Réglette; on amènera le chiffre 1 de la Réglette sous le nombre dont on demande la racine lu sur la Règle (remarquons qu'en même temps ce nombre lu sur la Réglette se trouvera au-dessous du chiffre 1 de la Règle), et on cherchera le point de coïncidence de deux divisions semblables de la Règle et de la Réglette.

455. Nous allons nous proposer actuellement diverses questions dont la solution serait impossible *par une seule lecture* en se bornant à l'emploi exclusif des échelles des nombres. Nous commencerons par l'*élévation au cube* et l'*extraction de la racine cubique*.

456. Soit proposé d'abord de former le cube d'un nombre compris entre 1 et 10; son cube sera compris entre 1 et 1000. On obtiendra évidemment le cube cherché en multipliant le nombre donné par son carré, ce qui peut se faire de trois manières différentes :

1° Je fais glisser la Réglette vers la gauche de manière à amener au-dessus du chiffre 1 de l'échelle des carrés le nombre proposé lu sur l'échelle des nombres de la Réglette; le cube cherché se lira sur la Réglette au-dessus du nombre proposé lu sur l'échelle des carrés :

Réglette	a	⟵	$x = a^3$
Échelle des carrés	1		a

En effet, la distance de x au chiffre 1 de la Réglette se trouve égale au logarithme de a (compté sur la Réglette), plus le double du logarithme de a (compté sur l'échelle des carrés c'est-à-dire à *trois* fois le logarithme de a; donc x est la *troisième* puissance ou le cube de a.

2° Je fais glisser la Réglette vers la droite de manière à amener le chiffre 1 de son échelle au-dessus du nombre proposé lu sur l'échelle des carrés; le cube cherché se lira sur

l'échelle supérieure de la Règle au-dessus du nombre proposé lu sur la Réglette.

Règle (Échelle supérieure)			$x = a^3$
Réglette	⤜	1	a
Échelle des carrés		a	

3° Je renverse la Réglette, et je place le nombre proposé lu sur l'échelle de la Réglette au-dessus de ce même nombre lu sur l'échelle des carrés; le cube cherché se lira sur l'échelle supérieure de la Règle au-dessus du chiffre 1 de la Réglette.

Règle (Échelle supérieure)			$x = a^3$
Réglette renversée	⤛	a	1
Échelle des carrés		a	

457. La dernière manière d'opérer est la plus commode. On se rappellera qu'en opérant avec la moitié de droite de la Réglette renversée, 1° les cubes d'un seul chiffre correspondent à l'index 1 de la Réglette et se lisent sur la moitié de gauche de l'échelle supérieure de la Règle; 2° les cubes de deux chiffres correspondent au même index et se lisent sur la moitié de droite de l'échelle supérieure de la Règle ; 3° les cubes de trois chiffres correspondent au chiffre 10 de la Réglette et se lisent sur la moitié de droite de l'échelle supérieure, considérée dans ce cas comme renfermant tous les nombres de 100 à 1000.

458. Supposons maintenant qu'il s'agisse d'élever au cube un nombre quelconque. On ramènera ce cas au précédent, en rendant le nombre proposé > 1 et < 10, ce qui se fera en le multipliant ou en le divisant par 10, 100, 1000, etc.; puis après avoir cherché le cube du nombre ainsi préparé, on *divisera* ou l'on *multipliera* le résultat trouvé par le cube de 10, ou par le cube de 100, ou par le cube de 1000, suivant que l'on aura *multiplié* ou *divisé* le nombre proposé par 10, 100, 1000, etc. Ainsi, soit 0,09538 à élever au cube; je multiplie

par 100, et je cherche le cube de 9,54 (456, 3°) :

Règle (Échelle supérieure)	$x = 868$	
Réglette renversée	⪢ 10	9,54
Échelle des carrés		9,54

Divisant le résultat trouvé 868 par $100^3 = 1000000$, il vient 0,000868 pour le cube cherché.

459. Occupons-nous actuellement de l'extraction de la racine cubique, et supposons d'abord que le nombre donné soit compris entre 1 et 1000. Comme pour l'élévation au cube, il y a trois manières d'opérer. Nous ne nous occuperons que de la troisième, qui est seule d'une application facile. Elle consiste à amener le chiffre 1 de la Réglette renversée sous le nombre proposé lu sur l'échelle supérieure de la Règle; la racine cherchée correspond au point où la graduation de la Réglette et la graduation de l'échelle des carrés donnent le même nombre.

Règle (Échelle supérieure)		a
Réglette renversée	$x = \sqrt[3]{a}$ ⪡	1
Échelle des carrés	$x = \sqrt[3]{a}$	

460. On aura d'ailleurs égard aux observations suivantes :

1° Si le nombre donné est < 10, on le lira sur la moitié de gauche de l'échelle supérieure.

2° S'il est compris entre 10 et 100, on le lira sur la moitié de droite de l'échelle supérieure, et sa racine se lit en employant comme index le chiffre 1 de la Réglette renversée.

3° S'il est compris entre 100 et 1000, on le lit encore sur la moitié de droite de l'échelle supérieure; mais la lecture de la racine se fait en employant l'index 10.

4° La coïncidence d'où résulte la détermination de la racine cubique doit toujours avoir lieu sur la partie de la Réglette qui porte les divisions de 1 à 10.

461. Si l'on demande maintenant la racine cubique d'un nombre quelconque, on commencera par rendre ce nombre

>1 et <1000, en le multipliant ou en le divisant par 1000, ou par 1000000, ou par 1000000000, etc.; on cherchera la racine cubique du nombre ainsi préparé, laquelle se trouvera nécessairement comprise entre 1 et 10, puis on la *divisera* ou on la *multipliera* par 10 ou par 100, ou par 1000, etc., suivant que l'on avait *multiplié* ou *divisé* le nombre donné par 10^3, ou par 100^3, ou par 1000^3, etc. Ainsi, si l'on demande la racine cubique de 0,27, on multipliera ce nombre par $10^3 = 1000$, ce qui donne 270, dont je cherche la racine cubique (460, 3°).

Règle (Échelle supérieure)		270	
Réglette renversée	↠	10	$x = 6,46$
Échelle des carrés			$x = 6,46$

Divisant le résultat trouvé 6,46 par 10, il viendra 0,646 pour la racine cubique cherchée.

462. La Règle à calcul est d'un usage extrêmement facile pour *calculer le quatrième terme d'une proportion* dont on connaît les trois autres termes, pour *trouver une moyenne proportionnelle* entre deux nombres donnés, etc. Nous allons résoudre ces deux questions.

463. *Calculer le quatrième terme d'une proportion.* Cette question revient à trouver le quotient d'un produit de deux facteurs par un troisième nombre, et peut se résoudre de différentes manières. Soit $a : b :: c : x$, d'où $x = \frac{bc}{a}$.

1° J'amène le diviseur (extrême connu) lu sur la Réglette sous l'un des facteurs (moyens) lu sur la Règle; le quotient cherché se lit sur la Règle au-dessus du second facteur lu sur la Réglette.

Règle	b		$x = \frac{bc}{a}$
Réglette	a	↠	c

Il est évident, en effet, que l'on a : log x (sur la Règle) $= \log b$ (sur la Règle) $+ [\log c - \log a]$ (sur la Réglette) $= \log \frac{bc}{a}$.

(On remarquera que les deux rapports égaux $\frac{b}{a} = \frac{x}{c}$ se trouvent figurés aux yeux sur l'instrument.)

2° Ayant renversé la Réglette, j'amène l'un des moyens lu sur la Réglette sous l'autre moyen lu sur la Règle ; le quotient cherché se lit sur la Règle au-dessus de l'extrême connu lu sur la Réglette.

Règle	b		$x = \frac{bc}{a}$
Réglette	c	$\twoheadleftarrow$	a

On peut toujours faire en sorte que le terme inconnu soit le 4° de la proportion, et que tous ses termes aient au moins un chiffre entier ; ce résultat s'obtiendra par un simple changement de place, et par une multiplication de tous les termes par 10, ou par 100, ou par 1000, etc.

Ceci posé, on déterminera d'avance le nombre des chiffres de la partie entière du résultat au moyen de la règle suivante :

Lorsque le diviseur (ou premier terme), et l'un des facteurs (ou moyens), comptés sur la même moitié de la Réglette, correspondent à une même moitié de la Règle, le nombre des chiffres entiers du terme inconnu s'obtient en retranchant le nombre des chiffres du diviseur (ou extrême connu) du nombre des chiffres que possèdent à la fois les deux facteurs (moyens).

Le terme inconnu a un chiffre de PLUS *à la partie entière, lorsque l'index de la Réglette et le diviseur, pris sur la même moitié de la Réglette, correspondent seuls à une même moitié de la Règle ou de son prolongement.*

Le terme inconnu a un chiffre de MOINS *à la partie entière, lorsque l'index et l'un des deux facteurs pris sur la même moitié de la Réglette correspondent seuls à une même moitié de la Règle ou de son prolongement.*

Lorsqu'on trouve un reste nul, il n'y a pas de partie entière, et le premier chiffre significatif du terme inconnu est de l'ordre des dixièmes ; s'il s'en faut d'une, de deux, de trois unités, que la soustraction ne puisse se faire, il faudra écrire

un, deux, trois zéros entre la virgule et le premier chiffre significatif qui sera alors au rang des centièmes, des millièmes, des dix-millièmes, etc.

Exemple. Calculer le quatrième terme de la proportion $0,9 : 0,4 :: x : 4,8$. Je permute chaque antécédent avec son conséquent, et je multiplie tous les termes par 10. La proportion devient $4 : 9 :: 48 : x' = 10x$.

Règle	9		$x' = 108$
Réglette	4	⪢	48

L'index et le diviseur 4 pris sur la première moitié de la Réglette correspondent seuls à la première moitié de la Règle ; le nombre total des chiffres entiers des moyens est 3 ; celui des chiffres de l'extrême connu est 1 ; le nombre des chiffres entiers du terme inconnu est donc $3 - 1 + 1 = 3$; donc $x' = 108$, et par suite $x = 10,8$.

464. *Calculer une moyenne proportionnelle entre deux nombres donnés.* Cette question revient à l'extraction de la racine carrée d'un produit de deux facteurs ; elle se résout des deux manières suivantes :

1° On amène le chiffre 1 de la Réglette sous le premier facteur lu sur l'échelle supérieure de la Règle ; la moyenne proportionnelle cherchée se lira sur l'échelle des carrés au-dessous du second facteur lu sur la Réglette.

Règle (Échelle supérieure)		a	
Réglette	⪢	1	b
Échelle des carrés			$x = \sqrt{ab}$

2° On amène l'un des facteurs lu sur la Réglette renversée au-dessous de l'autre facteur lu sur l'échelle supérieure de la Règle, et la moyenne proportionnelle cherchée se lit sur l'échelle des carrés au dessous de l'index de la Réglette.

Règle (Échelle supérieure)		10	a	
Réglette renversée	⪢	10	b	1
Échelle des carrés		$x = \sqrt{ab}$		

En effet, d'une part la distance du nombre a à l'origine de l'échelle supérieure est égale à la distance du chiffre 10 de cette échelle à l'origine plus la distance du nombre a à ce même chiffre 10, c'est-à-dire égale à $1+\log a$; d'autre part la distance de l'index 10 de la Réglette au nombre b est égale à la distance de cet index à l'origine de la Réglette moins la distance du nombre b à cette même origine, c'est-à-dire à $1-\log b$; et la distance du nombre trouvé x à l'origine de l'échelle des carrés, c'est-à-dire $2\log x$, est égale à la différence de ces deux distances; donc $2\log x = 1+\log a-(1-\log b) = \log a+\log b$; donc $x=\sqrt{ab}$.

465. La Règle à calcul peut servir à résoudre des questions moins simples, par exemple à trouver le quatrième terme d'une proportion dont les autres termes seraient des carrés, ou des radicaux, etc. Nous ne nous y arrêterons pas; mais nous croyons utile de donner un tableau de toutes les opérations que l'on peut effectuer au moyen de la Règle, avec l'indication succincte de la manière d'opérer. Nous empruntons ce tableau à l'*Instruction sur les Règles à calcul* de M. *L. Lalanne**, dans laquelle nous avons puisé déjà une grande partie de ce qui précède. x désigne la quantité inconnue qu'il s'agit de calculer, et y une quantité variable à laquelle on donne une suite de valeurs déterminées. Toutes les formules qui donnent l'expression de y au moyen de x sont des formules *indirectes*, déduites de formules *directes* dans lesquelles la variable x était exprimée au moyen de y.

* *Instruction sur les Règles à calcul, et particulièrement sur la nouvelle Règle à enveloppe de verre*, par *Léon Lalanne*, ingénieur en chef des ponts et chaussées. Cette *Instruction* se trouve chez MM. *Hachette* et Cie, avec la *nouvelle Règle à enveloppe de verre*.

Nos D'ORDRE.	FORMULES.	EXPRESSION DES FORMULES EN LANGAGE ORDINAIRE.	OBSERVATIONS SUR LA MANIÈRE D'OPÉRER.
		Emploi exclusif des échelles des nombres.	
1	$x = ay$	Formation d'une suite de produits d'un facteur constant par un facteur variable.	La Réglette tenue droite. L'index *sous* le facteur constant, la lecture *au-dessus* du facteur variable.
2	$y = \frac{x}{a}$	Formation d'une suite de quotients d'un dividende variable par un diviseur constant.	Mêmes échelles et même position de la Réglette. L'index *sous* le diviseur constant, la lecture *au-dessous* du dividende variable.
3	$x = \frac{a}{y}$	Suite de quotients d'un dividende constant par un diviseur variable.	L'index de la Réglette renversée *sous* le dividende constant et la lecture du quotient *au-dessus* du diviseur variable.
4	$x = \frac{b}{a} y$	4e terme de la proportion $a : b :: y : x$, dans laquelle les deux termes du second rapport sont variables.	Réglette droite. Le nombre a placé *sous* le nombre b, et le nombre x lu *au-dessus* du nombre y.
5	$x = \frac{ab}{y}$	4e terme de la proportion $y : a :: b : x$, dans laquelle les deux extrêmes sont variables.	Réglette renversée. Le nombre b *sous* ou *sur* le nombre a, et le nombre x *sous* ou *sur* le nombre y.
6	$x = y^2$	Produit de deux facteurs égaux ou élévation au carré.	Comme au n° 1, dont cette question n'est qu'un cas particulier.
7	$y = \sqrt{x}$	Extraction de la racine carrée.	Le chiffre 1 de la Réglette renversée *sous* le nombre x; lecture de la racine simultanément sur la Règle et la Réglette au point où ces deux graduations expriment des nombres égaux.
		Emploi de l'échelle des nombres de la Réglette et de l'échelle des carrés.	
6	$x = y^2$	Élévation au carré.	L'index de la Réglette *sur* le 1 de l'échelle des carrés. Lecture du carré *au-dessus* du nombre donné.
7	$y = \sqrt{x}$	Extraction de la racine carrée.	Même position de la Réglette. Lecture de la racine *au-dessous* du nombre donné.
8	$x = ay^2$	Produit d'un nombre constant par une suite de carrés.	Le nombre constant sur la Réglette *au-dessus* du 1 de l'échelle des carrés. Lecture du produit *au-dessus* du nombre à élever au carré. — Cas particulier : $y = a$, $x = a^3$ (élévation au cube, n° 456, 1°).

Nos D'ORDRE.	FORMULES.	EXPRESSION DES FORMULES EN LANGAGE ORDINAIRE.	OBSERVATIONS SUR LA MANIÈRE D'OPÉRER.
9	$y=\sqrt{\frac{x}{a}}$	Racine carrée d'une suite de rapports dont l'antécédent est variable, et dont le conséquent est constant.	Même position de la Réglette. Lecture de la racine *sous* le nombre variable.
10	$y=\sqrt{\frac{a}{x}}$	Racine carrée d'une suite de rapports dont l'antécédent est constant et le conséquent variable.	Le nombre constant sur la Réglette renversée *au-dessus* du 1 de l'échelle des carrés. Lecture du résultat *au-dessous* du conséquent variable.
11	$x=\frac{a}{y^2}$	Quotient d'un nombre constant par le carré d'un nombre variable.	Même position de la Réglette. Lecture du résultat sur la Réglette *au-dessus* du diviseur variable.
12	$x=b\sqrt{\frac{y}{a}}$	4e terme de la proportion $\sqrt{a}:\sqrt{y}::b:x$.	Placez a, lu sur la Réglette renversée, *au-dessus* de b; lecture de x sur l'échelle des carrés *au-dessous* de y lu sur la Réglette.
13	$x=\frac{b^2y}{a^2}$	4e terme de la proportion $a^2:b^2::y:x$.	Placez y lu sur la Réglette *au-dessus* de a; lecture de x sur la Réglette *au-dessus* de b, lu sur l'échelle des carrés.

Emploi simultané des trois échelles.

Nos D'ORDRE.	FORMULES.	EXPRESSION DES FORMULES EN LANGAGE ORDINAIRE.	OBSERVATIONS SUR LA MANIÈRE D'OPÉRER.
14	$x=a^2y$	Produit du carré d'un nombre constant par une suite de nombres variables.	L'index de la Réglette *au-dessus* du nombre constant. Lecture du produit sur l'échelle supérieure *au-dessus* du nombre variable lu sur la Réglette. — Cas particulier : $y=a$, $x=a^3$ (élévation au cube, n° **450**, 2°).
15	$y=\frac{x}{a^2}$	Quotient d'un nombre variable par le carré d'un nombre constant.	Même position de la Réglette. Lecture du quotient sur la Réglette *au-dessous* du nombre variable lu sur l'échelle supérieure.
16	$x=\frac{y^2}{a}$	Troisième proportionnelle à deux nombres donnés, dont le second est variable dans la proportion $a:y::y:x$.	L'index de la Réglette droite *sous* le nombre constant lu sur la Règle. Lecture du nombre cherché *au-dessus* du nombre variable lu sur l'échelle des carrés.
17	$y=\sqrt{ax}$	Racine carrée du produit d'un nombre constant par un nombre variable.	Même position de la Réglette. Lecture de la racine *au-dessous* du nombre variable lu sur la Réglette.
18	$x=\frac{a^2}{y}$	Troisième proportionnelle à deux nombres donnés dont le second est constant dans la proportion $y:a::a:x$.	L'index de la Réglette renversée *au-dessus* du nombre constant lu sur l'échelle des carrés. Lecture de x sur la Réglette *au-dessous* du nombre variable.

N° D'ORDRE.	FORMULES.	EXPRESSION DES FORMULES EN LANGAGE ORDINAIRE.	OBSERVATIONS SUR LA MANIÈRE D'OPÉRER.
19	* $x = y^3$	Élévation au cube.	Le nombre y pris sur la Réglette renversée *au dessus* du même nombre pris sur l'échelle des carrés. La lecture de x sur l'échelle supérieure *au dessus* de l'index de la Réglette.
20	* $y = \sqrt[3]{x}$	Extraction de la racine cubique.	L'index de la Réglette renversée *au-dessous* du nombre donné pris sur l'échelle supérieure. Lecture simultanée de la racine sur la Réglette et sur l'échelle des carrés, au point où les deux graduations en coïncidant expriment des nombres égaux.
21	$x = \frac{a^2 b}{y}$	4e terme de la proportion $y : a^2 :: b : x$, dans laquelle un des moyens (tous deux constants) est élevé au carré.	Placez le moyen simple b pris sur la Réglette renversée *au-dessus* du nombre a; lecture de x sur l'échelle supérieure *au-dessus* de l'extrême y.
22	$x = \frac{by^2}{a^2}$	4e terme de la proportion $a^2 : b :: y^2 : x$, dans laquelle un des moyens (nombre variable) est élevé au carré.	Placez le moyen constant b pris sur la Réglette *sous* l'extrême connu a; lecture de x sur la Réglette *au-dessus* de y pris sur l'échelle des carrés.
23	$y = \sqrt{\frac{ax}{b}}$	4e terme de la proportion $\sqrt{b} : \sqrt{a} :: \sqrt{x} : y$, dans laquelle les trois premiers termes sont des racines carrées.	Placez le nombre b pris sur la Réglette *sous* le nombre a; lecture de y sur l'échelle des carrés *au-dessous* de x pris sur la Réglette.
24	$x = \frac{a^2 y}{b}$	4e terme de la proportion $b : a^2 :: y : x$, dans laquelle un des moyens (nombre constant) est élevé au carré.	Placez l'extrême connu b pris sur la Réglette *au-dessus* du nombre a; lecture de x sur l'échelle supérieure *au-dessus* du moyen variable y pris sur la Réglette.
25	$y = \frac{bx}{a^2}$	4e terme de la proportion $a^2 : b :: x : y$, dans laquelle les deux termes du premier rapport sont constants, et le premier terme un carré.	Placez le moyen connu b pris sur la Réglette *au-dessus* du nombre a; lecture de y sur la Réglette *au-dessous* du moyen variable x pris sur l'échelle supérieure.
26	$x = \frac{a^3}{y}$	Quotient d'un cube par une quantité variable.	Placez le nombre à élever au cube pris sur la Réglette renversée *au-dessus* du même nombre pris sur l'échelle des carrés; lecture de x sur l'échelle supérieure *au-dessus* du diviseur variable.
27	* $x = \frac{y^3}{a}$	Quotient d'un cube variable par un diviseur constant.	Comme précédemment. On peut aussi placer le nombre à élever au cube pris sur la Réglette *au-dessous* du diviseur constant, et lire x sur la Réglette *au-dessus* du nombre à élever au cube pris sur l'échelle des carrés.
28	* $y = \sqrt[3]{ax}$	Racine cubique d'un produit de deux facteurs.	Placez l'un des facteurs pris sur la Réglette renversée *au dessous* de l'autre pris sur l'échelle supérieure; et lisez x simultanément sur la Réglette et sur l'échelle des carrés au point correspondant à des nombres égaux.

A l'exception des formules marquées d'un astérisque, une position unique de la Réglette donne la solution de toutes les questions de même nature dans lesquelles l'élément variable est désigné, soit par y si la formule est en x, soit par x si la formule est en y.

466. En général, si l'on désigne par a, a', a'', par b, b', b'', deux séries de nombres qui se correspondent sur l'échelle supérieure de la Règle, sur la Réglette et sur l'échelle des carrés, dans une position quelconque de la Réglette, on aura les relations suivantes suivant que la Réglette sera droite ou renversée :

Règle (Échelle supérieure)	a'	b'
Réglette	a	b
Échelle des carrés	a''	b''

(Réglette droite)	(Réglette renversée)
$ab' = ba'$	$aa' = bb'$,
$ab''^2 = ba'$	$aa' = bb''^2$;
$ab''^2 = ba''^2$	$aa''^2 = bb''^2$.

Ces relations permettent toujours de retrouver la marche à suivre pour résoudre les questions du tableau précédent.

467. Les applications de la Règle à calcul aux questions usuelles de géométrie, de mécanique, de chimie, etc., sont extrêmement nombreuses. Il serait beaucoup trop long de les énumérer ici; mais nous engageons vivement nos lecteurs à se reporter à l'*Instruction sur les Règles à calcul* de M. *L. Lalanne*. Ils trouveront dans cet ouvrage, avec tous les développements nécessaires, un choix nombreux de questions dont la résolution achèvera de les familiariser avec l'usage de la Règle à calcul et de leur faire comprendre toute l'utilité pratique de cet ingénieux instrument.

CHAPITRE XIII.

THÉORIE DES FONCTIONS DÉRIVÉES.

§ I. DÉFINITIONS ET PRINCIPES GÉNÉRAUX.

468. Nous avons dit (20) qu'*une quantité dont la valeur dépend de celles d'autres quantités est appelée une* FONCTION *de ces quantités*. Ces quantités se nomment *variables*, parce que, pour chaque système de valeurs arbitraires que l'on peut leur donner, la fonction prend une valeur correspondante.

469. Une fonction d'une certaine quantité x s'indique à l'aide de notations telles que $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $F(x)$, $f(x)$, etc.

On représente de même une fonction de deux variables x et y par $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $F(x, y)$, $f(x, y)$, etc.

$\varphi(x, y, z)$ indique une fonction de x, de y et de z, c'est-à-dire une expression composée d'une manière quelconque de ces quantités x, y, z.

Il faut faire précéder la parenthèse de lettres différentes, si l'on veut représenter des fonctions différentes ; ainsi $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ expriment des quantités qui ne sont pas composées de la même manière en x.

Au contraire, si deux fonctions sont formées de la même manière, au moyen des variables qu'elles renferment, elles sont représentées par la même caractéristique. Par exemple, $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ désignent deux fonctions composées de la même manière, l'une en x et l'autre en y, de telle sorte que $\varphi(y)$ est ce que devient $\varphi(x)$, lorsque l'on y remplace x par y. Ainsi, $\varphi(x, y)$ représentant, je suppose, le polynome $2x^2-3xy+y^2-x+10$, $\varphi(3, 4)$ représentera la valeur que prendra ce polynome, si l'on y remplace x par 3 et y par 4, de sorte que l'on aura $\varphi(3, 4)=2.9-3.3.4+16-3+10=5$.

470. *Une fonction est dite* CONTINUE, *entre deux limites don-*

nées, lorsqu'en faisant varier d'une manière continue les quantités dont elle dépend, elle est constamment réelle et passe par tous les états de grandeurs compris entre ces limites.

471. *On appelle* LIMITE *d'une fonction la valeur vers laquelle elle tend, lorsque la variable, dont elle dépend, converge elle-même vers une valeur déterminée.*

472. Si, dans une fonction de x, on donne à cette variable un certain accroissement h, la fonction prendra un accroissement correspondant, positif ou négatif, et *la limite vers laquelle tend le rapport de cet accroissement de la fonction à celui de la variable, lorsque cet accroissement de la variable tend vers zéro, est ce qu'on appelle la* FONCTION DÉRIVÉE *ou simplement la* DÉRIVÉE *de la fonction proposée.* Ainsi, la limite vers laquelle converge le rapport $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$, lorsque h tend vers zéro, est la dérivée de $\varphi(x)$.

473. Si cette dérivée est elle-même une fonction de x, elle aura aussi une dérivée, qui sera ainsi la dérivée de la dérivée ou la dérivée du deuxième ordre de la fonction primitive. On pourra de même obtenir une dérivée du troisième ordre, puis une du quatrième; et ainsi de suite.

On est convenu de représenter la dérivée d'une fonction par la même notation que cette fonction, mais en affectant d'un accent la caractéristique de la fonction. Ainsi, pour indiquer la dérivée de $\varphi(x)$, nous écrirons $\varphi'(x)$; par conséquent la dérivée de $\varphi'(x)$, c'est-à-dire la dérivée du deuxième ordre de $\varphi(x)$, sera représentée par $\varphi''(x)$, et, en général, la dérivée de l'ordre n le sera par $\varphi^n(x)$.

474. Une fonction quelconque de x peut être soumise à différentes opérations, de manière à constituer une nouvelle fonction, qui sera par conséquent une fonction d'une fonction de x. En considérant cette nouvelle fonction elle-même comme une variable, on pourra encore la soumettre aux opérations qui constituent une nouvelle fonction, et ainsi de suite. Les

fonctions obtenues de cette manière se nomment en général des *fonctions de fonctions.*

473. *La dérivée d'une fonction de fonction est le produit des dérivées de chacune de ces fonctions par rapport à la variable dont elle dépend* IMMÉDIATEMENT.

Ainsi, soit une certaine fonction de x que je représenterai par $u = \mathrm{F}(x)$; soit $y = f(u)$ une autre fonction composée d'une manière quelconque avec u, de sorte que $y = f(\mathrm{F}(x)) = \varphi(x)$ est une fonction de fonction de x; je dis que la dérivée de y est égale au produit de la dérivée de $f(u)$ prise comme si u était une variable indépendante, par la dérivée de $\mathrm{F}(x)$, c'est-à-dire que

$$\varphi'(x) = f'(u) \,.\, \mathrm{F}'(x).$$

En effet, d'après la définition de la dérivée (**472**), on a

$$\varphi'(x) = \lim \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}.$$

Mais $\varphi(x) = f(u)$; u étant une fonction de x, cette égalité reste vraie en y changeant x en $x+h$; or, pour cet accroissement h donné à x, la fonction de x représentée par u prend un certain accroissement que j'appelle k, on aura donc

$$\varphi(x+h) = f(u+k),$$

donc :

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = f(u+k) - f(u),$$

et par suite

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{f(u+k) - f(u)}{k} \cdot \frac{k}{h};$$

et cette égalité subsistera toujours pour toutes les valeurs de h et les valeurs correspondantes de k. Or, lorsque deux quantités variables restent constamment égales entre elles, dans tous les états de grandeur par lesquels elles passent, leurs

limites sont égales (*Arith.*, **237**); donc

$$\lim \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \lim \frac{f(u+k)-f(u)}{k} \cdot \lim \frac{k}{h}\,^*.$$

Or, le premier membre est $\varphi'(x)$, c'est-à-dire la dérivée de y. Le premier facteur du second membre est la dérivée $f'(u)$ de $f(u)$ formée en regardant u comme une variable indépendante; quant au second facteur, c'est la limite du rapport de l'accroissement de la fonction $u = F(x)$ à celui de la variable x, ou $F'(x)$; donc enfin

$$\varphi'(x) = f'(u) \, . \, F'(x),$$

ce qu'il fallait démontrer.

476. Il est facile d'étendre ce théorème important à un nombre quelconque de fonctions. Soient en effet les fonctions

$$u = F(x)$$
$$y = f(u) = f(F(x)) = \varphi(x)$$
$$z = \psi(y) = \psi(f(u)) = \psi(\varphi(x)) = \pi(x).$$

D'après ce que nous venons de démontrer, on aura successivement

$$\varphi'(x) = f'(u) \, . \, F'(x),$$
$$\pi'(x) = \psi'(y) \, . \, \varphi'(x),$$

d'où l'on déduit, en multipliant membre à membre,

$$\pi'(x) = \psi'(y) \, . \, f'(u) \, . \, F'(x).$$

Ainsi, ce principe permettra de ramener la formation des dérivées d'une fonction de fonctions à celle des dérivées de chacune des fonctions qui concourent à la former.

---

* *La limite d'un produit est égale au produit des limites de ses facteurs.* Soient en effet $P + \alpha$, $Q + \beta$ deux facteurs ayant pour limites respectives P et Q, on a : $(P+\alpha)(Q+\beta) = PQ + P\beta + Q\alpha + \alpha\beta$, et cette égalité subsistera quels que soient α et β; donc, elle aura encore lieu lorsque $P+\alpha$ et $Q+\beta$ auront atteint leurs limites; mais alors les termes $P\beta$, $Q\alpha$, $\alpha\beta$, se réduisent à zéro, et l'égalité devient : $\lim [(P+\alpha)(Q+\beta)] = PQ$.

477. Il résulte immédiatement de la définition des dérivées que *la dérivée d'une constante est nulle*. Réciproquement, *si pour toutes les valeurs de la variable comprise entre les valeurs* α *et* β, *la dérivée d'une fonction est nulle, cette fonction est constante dans cet intervalle.*

En effet, puisque la valeur de $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ converge vers $\varphi'(x)$, nous pourrons représenter la différence $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} - \varphi'(x)$ par une quantité ε qui s'annule pour $h=0$, de sorte que l'on pourra représenter en général l'accroissement de la fonction $\varphi(x)$ par $h[\varphi'(x)+\varepsilon]$. Ceci posé, je prends deux valeurs arbitraires de la variable, x_0 et x, comprises entre α et β ; je partage l'intervalle $x-x_0$ en n parties égales, et je représente par $h=\frac{x-x_0}{n}$ l'une quelconque de ces parties; h pourra devenir aussi petit que l'on voudra, puisque n est un nombre quelconque. En donnant à la variable les valeurs successives x_0, $x_0+h=x_1$, $x_1+h=x_2$, ... $x_{n-1}+h=x$, et observant que par hypothèse la dérivée de la fonction est constamment nulle pour toutes ces valeurs, il viendra :

$$\begin{aligned} \varphi(x_0+h) &- \varphi(x_0) = h\varepsilon_0, \\ \varphi(x_1+h) &- \varphi(x_1) = h\varepsilon_1, \\ &\vdots \\ \varphi(x_{n-1}+h) &- \varphi(x_{n-1}) = h\varepsilon_{n-1}. \end{aligned}$$

ou bien :

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) &- \varphi(x_0) = h\varepsilon_0, \\ \varphi(x_2) &- \varphi(x_1) = h\varepsilon_1, \\ &\vdots \\ \varphi(x) &- \varphi(x_{n-1}) = h\varepsilon_{n-1}. \end{aligned}$$

D'où, en ajoutant membre à membre :

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=h(\varepsilon_0+\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{n-1})<h.n\varepsilon,$$

en appelant ε la plus grande des quantités ε_0, ε_1.... ε_{n-1}. Ainsi,

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)<nh.\varepsilon.$$

Or, $nh=x-x_0$ est une quantité finie; quant au facteur ε, il

devient nul à la limite, lorsque l'on fait $n = \infty$, d'où $h = 0$; donc alors la quantité $\varphi(x) - \varphi(x_0) = 0$. Mais cette quantité ne change pas de valeur; donc elle est toujours nulle; donc $\varphi(x) = \varphi(x_0) =$ constante.

478. *Si deux fonctions sont égales ou ne diffèrent que par une quantité constante, pour toutes les valeurs de la variable comprises entre les valeurs* α *et* β, *leurs dérivées sont égales.*

Supposons que x variant entre α et β, les deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ restent constamment égales. Je dis que l'on aura $\varphi'(x) = \psi'(x)$. En effet, on a par hypothèse :

$$\varphi(x) = \psi(x), \quad \varphi(x+h) = \psi(x+h),$$

d'où l'on tire, en retranchant et divisant par h,

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h}.$$

Ces deux quantités ne cessant pas d'être égales pour toutes les valeurs de h, leurs limites seront aussi égales, c'est-à-dire que $\varphi'(x) = \psi'(x)$.

479. Réciproquement, *si les dérivées de deux fonctions sont égales, pour les valeurs de la variable comprises entre* α *et* β, *ces fonctions sont aussi égales ou ne diffèrent que par une constante.*

Supposons, en effet, que les deux fonctions ne soient pas égales, et soit $f(x)$ leur différence, de sorte que :

$$\varphi(x) = \psi(x) + f(x).$$

On aura, en donnant à x un accroissement h,

$$\varphi(x+h) = \psi(x+h) + f(x+h)$$

d'où l'on tire

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h} + \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

et à la limite :

$$\varphi'(x) = \psi'(x) + f'(x).$$

or $\varphi'(x) = \psi'(x)$ par hypothèse; donc $f'(x) = 0$, donc $f(x)$ est une quantité constante (**477**).

480. Si nous nous reportons à l'expression $h[\varphi'(x)+\varepsilon]$ par laquelle nous avons dit que l'on pouvait représenter (**477**) l'accroissement $\varphi(x+h)-\varphi(x)$ que prend la fonction $\varphi(x)$ pour un accroissement h donné à la variable, on en conclura que la fonction $\varphi(x)$ prendra des valeurs croissantes si la quantité $h[\varphi'(x)+\varepsilon]$ est positive, décroissantes si cette quantité est négative, puisque $\varphi(x+h)$ sera plus grand que $\varphi(x)$ dans le premier cas, et plus petit dans le second. Or l'accroissement h donné à x est positif; donc on aura $h[\varphi'(x)+\varepsilon] \gtrless 0$ suivant que $\varphi'(x)+\varepsilon \gtrless 0$. Mais $\varphi'(x)$ étant une quantité finie, et ε décroissant indéfiniment avec h, on pourra toujours prendre h assez petit pour que la valeur absolue de $\varphi'(x)$ soit plus grande que celle de ε, c'est-à-dire pour que $\varphi'(x)$ donne son signe à l'expression $\varphi'(x)+\varepsilon$. Donc $\varphi(x+h)-\varphi(x)$ sera $\gtrless 0$ suivant que $\varphi'(x) \gtrless 0$; donc, ***une fonction est croissante quand sa dérivée est positive, et décroissante quand sa dérivée est négative.***

§ II. DÉRIVÉES D'UNE FONCTION ENTIÈRE ET RATIONNELLE; FORMULE DE *TAYLOR*.

481. Considérons maintenant en particulier une fonction rationnelle et entière de x; et soit

$$\varphi(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + \ldots + Tx + U$$

une pareille fonction, de sorte que m est un nombre entier et positif. Changeons x en $x+h$, ce qui donnera

$$\varphi(x+h) = A(x+h)^m + B(x+h)^{m-1} + C(x+h)^{m-2} + D(x+h)^{m-3} + \ldots + T(x+h) + U;$$

puis, développons les diverses puissances du binome $x+h$, d'après la formule du binome de Newton; il viendra

$$
\begin{array}{ll|l|l|l}
\varphi(x+h)=Ax^m & +\quad mAx^{m-1} & h+\dfrac{m(m-1)}{1.2}Ax^{m-2} & h^2+\dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}Ax^{m-3} & h^3+\ldots+Ah^m.\\
+Bx^{m-1} & +(m-1)Bx^{m-2} & +\dfrac{(m-1)(m-2)}{1.2}Bx^{m-3} & +\dfrac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}Bx^{m-4} & \\
+Cx^{m-2} & +(m-2)Cx^{m-3} & +\dfrac{(m-2)(m-3)}{1.2}Cx^{m-4} & +\dfrac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3}Cx^{m-5} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
+Tx & +\quad T & & & \\
+U & & & &
\end{array}
$$

On voit que le terme indépendant de h est la fonction proposée $\varphi(x)$ elle-même, de sorte que si, pour abréger, on convient de représenter par A_1, A_2, A_3,... les coefficients respectifs de h, h^2, h^3,... on tirera facilement de l'égalité précédente

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=A_1+A_2h+A_3h^2+\ldots+Ah^{m-1}.$$

Or, si l'on suppose que h décroisse indéfiniment, tous les termes qui, dans le deuxième membre de cette égalité, viennent après le premier, tendront vers zéro, de sorte que la limite de ce deuxième membre, et par conséquent celle du premier est A_1; donc *la dérivée de la fonction proposée* $\varphi(x)$ *est le coefficient de la première puissance de* h *dans le développement de* $\varphi(x+h)$; ainsi

$$\varphi'(x)=mAx^{m-1}+(m-1)Bx^{m-2}+(m-2)Cx^{m-3}+\ldots+T.$$

Si on compare cette dérivée à la fonction proposée, on verra que *Pour former la dérivée d'une fonction rationnelle et entière de* x, *il faut multiplier chaque terme de cette fonction par l'exposant de* x *dans ce terme, et diminuer cet exposant d'une unité.*

482. Or, le coefficient de $\frac{h^2}{1.2}$ se déduit de celui de h d'après la même loi; donc il est la dérivée du deuxième ordre de la fonction proposée. De même le coefficient de $\frac{h^3}{1.2.3}$ se déduit de celui de $\frac{h^2}{1.2}$ d'après cette loi; donc il est la dérivée du troisième ordre de la fonction proposée, et ainsi de suite.

D'après cela, et en employant les notations dont nous sommes convenus au n° 473, la formule qui exprime le développement de $\varphi(x+h)$, pourra être écrite de la manière suivante :

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+\varphi'(x)h+\varphi''(x)\frac{h^2}{1.2}+\varphi'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots+\varphi^m(x)\frac{h^m}{1.2.3\ldots m} \quad [1],$$

car la dérivée de l'ordre m du polynome proposé est évidemment $m(m-1)(m-2)\ldots\{m-(m-1)\}$ A. Elle est due au géomètre anglais *Taylor*, qui l'a donnée pour une fonction quelconque de x, et elle a été appelée en conséquence *formule de Taylor*. La démonstration que nous venons d'en donner exige que la fonction $\varphi(x)$ soit algébrique, rationnelle et entière ; ainsi nous ne devrons appliquer la formule de Taylor qu'à de pareilles fonctions.

Cette formule, traduite en langage ordinaire, donne lieu au théorème suivant, qui est connu aussi sous le nom de THÉORÈME DES FONCTIONS DÉRIVÉES : *Si dans une fonction algébrique, entière et rationnelle de* x, *on donne à cette variable un certain accroissement* h, *et qu'on développe la nouvelle fonction suivant les puissances ascendantes de cet accroissement, le premier terme du développement sera la fonction proposée ; le coefficient de la première puissance de* h *sera la dérivée de cette fonction ; le coefficient de* h^2 *en sera la dérivée du deuxième ordre, divisée par* 1.2, *et en général le coefficient de* h^n *sera la dérivée du* n^{me} *ordre de la fonction proposée, divisée par* 1.2.3...n.

483. Si dans la fonction $\varphi(x)$, on fait $x=a+h$, a étant un nombre connu, elle deviendra $\varphi(a+h)$, et on aura évidemment la valeur de cette quantité, en faisant $x=a$, dans la formule [1]; donc

$$\varphi(a+h)=\varphi(a)+\varphi'(a)h+\varphi''(a)\frac{h^2}{1.2}+\varphi'''(a)\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots+\varphi^m(a)\frac{h^m}{1.2.3\ldots m} \quad [2];$$

ainsi, pour obtenir la valeur de $\varphi(a+h)$, on commencera par former *toutes* les dérivées de $\varphi(x)$, puis on remplacera, dans chacune et dans $\varphi(x)$, x par a, en effectuant ce calcul d'après la règle du n° 69, et il n'y aura plus qu'à substituer les résultats qu'on aura trouvés, dans le deuxième membre de l'équation précédente.

EXEMPLE. *Que devient* $\varphi(x)=x^3-4x^2+5x-1$, *pour* $x=2+h$?
On trouvera facilement que

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= x^3-4x^2+5x-1, \quad \text{par suite} & \varphi(2) &= 1\,;\\
\varphi'(x) &= 3x^2-8x+5, & \varphi'(2) &= 1\,;\\
\frac{\varphi''(x)}{1.2} &= 3x-4, & \frac{\varphi''(2)}{1.2} &= 2\,;\\
\frac{\varphi'''(x)}{1.2.3} &= 1, & \frac{\varphi'''(2)}{1.2.3} &= 1\,;
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\varphi(2+h)=1+h+2h^2+h^3.$$

484. *La dérivée d'un produit de plusieurs facteurs est égale à la somme des produits formés en multipliant la dérivée de chaque facteur par le produit de tous les autres.*

Soient U, V, X, Y... plusieurs facteurs dépendants de x; si, dans chacun d'eux, on change x en $x+h$, ils deviendront respectivement

$$U+U'h+U''\frac{h^2}{1.2}+\ldots,$$

$$V+V'h+V''\frac{h^2}{1.2}+\ldots,$$

$$X+X'h+X''\frac{h^2}{1.2}+\ldots,$$

$$Y+Y'h+Y''\frac{h^2}{1.2}+\ldots,$$

$$\vdots$$

De sorte que, pour avoir la dérivée du produit UVXY..., il faudra faire le produit de ces quantités, et cette dérivée sera le coefficient de la première puissance de h dans ce produit (481). Or, il est évident que, pour former ce coefficient, il faudra multiplier le coefficient de h dans chaque facteur par le produit des termes indépendants de h dans les autres, et additionner les résultats. Donc la dérivée du produit UVXY... est

$$U'VXY\ldots+V'UXY\ldots+X'UVY\ldots+Y'UVX\ldots+\ldots,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

485. Il suit de là que *la dérivée de la* m^{me} *puissance d'une fonction rationnelle et entière de* x *est égale à* m *fois la dérivée de cette fonction, multipliée par la* $(m-1)^{me}$ *puissance de cette même fonction;* qu'ainsi la dérivée de X^m est $mX'X^{m-1}$. En effet, X^m étant le produit de m facteurs X, la dérivée de X^m, qui est égale à la dérivée X′ de chaque facteur multipliée par le produit X^{m-1} de tous les autres, vaut par conséquent m fois $X'X^{m-1}$.

EXEMPLE. *Quelle est la dérivée de*

$$(x^2-1)^3(2-3x^2)(2x-1)?$$

C'est

$$3.2x(x^2-1)^2(2-3x^2)(2x-1)-6x(x^2-1)^3(2x-1)$$
$$+2(x^2-1)^3(2-3x^2);$$

d'où l'on tire, en mettant $2(x^2-1)^2$ en facteur commun,

$$-2(x^2-1)^2[27x^4-12x^3-23x^2+9x+2].$$

486. *Pour former la dérivée d'une fraction, il faut du produit de la dérivée de son numérateur par son dénominateur retrancher le produit de la dérivée du dénominateur par le numérateur, et diviser le reste par le carré du dénominateur.*

Soit, en effet, $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ cette fraction que, pour abréger, nous représenterons par $F(x)$: il s'agira de trouver la limite vers laquelle converge le rapport $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$, lorsque h tend vers zéro. En conséquence, je remplace x par $x+h$, et je trouve (482):

$$F(x+h)-F(x)=\frac{\varphi(x+h)}{\psi(x+h)}-\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(x)+\varphi'(x)h+\varphi''(x)\frac{h^2}{1.2}+\ldots}{\psi(x)+\psi'(x)h+\psi''(x)\frac{h^2}{1.2}+\ldots}-\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

ou, en réduisant au même dénominateur, puis faisant la réduction,

$$F(x+h)-F(x)=\frac{\{\psi(x)\varphi'(x)-\varphi(x)\psi'(x)\}h+\{\psi(x)\varphi''(x)-\varphi(x)\psi''(x)\}\frac{h^2}{1.2}+\ldots}{\psi(x+h)\psi(x)}.$$

On tire de là

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{\{\psi(x)\varphi'(x)-\varphi(x)\psi'(x)\}+\{\psi(x)\varphi''(x)-\varphi(x)\psi''(x)\}\frac{h}{1.2}+\ldots}{\psi(x+h)\psi(x)}.$$

Or, la limite du numérateur est évidemment $\psi(x)\varphi'(x)-\varphi(x)\psi'(x)$; celle du dénominateur est $[\psi(x)]^2$; donc la limite de $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$, c'est-à-dire la dérivée de $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ est

$$\frac{\psi(x)\varphi'(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{[\psi(x)]^2},$$

ce qu'il fallait démontrer.

487. Théorème. *Si dans une fonction entière et rationnelle de* x *on fait croître cette variable d'une manière continue, depuis* α *jusqu'à* β, α *et* β *étant deux nombres quelconques, cette fonction variera aussi d'une manière continue.*

Je désigne, en effet, par $\varphi(x)$ la fonction proposée, puis je partage la différence $\beta-\alpha$ en n parties égales, et je représente par h l'une quelconque de ces parties : h pourra devenir aussi petite que l'on voudra, puisque n est un nombre quelconque. Cela posé, je donne successivement à x les valeurs

$$\alpha,\quad \alpha+h,\quad \alpha+2h,\quad \alpha+3h,\ldots,\quad \alpha+nh=\beta,$$

et je dis que l'on pourra prendre h assez petite pour que l'une quelconque des valeurs correspondantes de la fonction diffère de la suivante d'une quantité moindre que toute grandeur assignable, d'où l'on devra conclure que cette fonction variera d'une manière continue, lorsque x passera par tous les états de grandeur compris entre α et β; sans quoi notre fonction devrait passer brusquement d'une valeur à une autre qui en différerait d'une quantité finie, ce qui est absurde, puisque sa variation peut être rendue moindre que toute grandeur donnée. Soit donc a un quelconque des termes de la progression ci-dessus, autre que β. Je pose $x=a+h$, et il vient alors, d'après le théorème des fonctions dérivées (483),

$$\varphi(a+h)=\varphi(a)+\varphi'(a)h+\varphi''(a)\frac{h^2}{1.2}+\varphi'''(a)\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc.};$$

d'où l'on tire

$$\varphi(a+h)-\varphi(a)=\varphi'(a).h+\varphi''(a)\frac{h^2}{1.2}+\varphi'''(a)\frac{h^3}{1.2.3}+\text{etc. [3].}$$

Or, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi'''(x)$... étant des fonctions entières de x, il est évident que $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$, $\varphi'''(a)$,... sont des quantités finies, de sorte qu'en donnant à h une valeur suffisamment petite, on pourra rendre chacun des termes qui composent le deuxième membre de l'équation [3] aussi petit que l'on voudra ; il en sera donc de même de ce deuxième membre, puisqu'il renferme un nombre limité de termes *. Notre théorème est donc démontré.

488. Il est facile d'étendre la formule de Taylor aux fonctions de deux variables. Soit, en effet, $\varphi(x, y)$ une pareille fonction, et supposons que l'on donne à x et à y les accroissements respectifs h et k : il s'agira de trouver quel est le développement de $\varphi(x+h, y+k)$, ordonné par rapport aux puissances et aux

---

* Si l'on veut déterminer la valeur qu'il faut assigner à h pour rendre la différence $\varphi(a+h)-\varphi(a)$ moindre qu'une quantité donnée δ, on représentera par A la plus grande valeur absolue des quantités $\varphi'(a)$, $\frac{\varphi''(a)}{1.2}$, $\frac{\varphi'''(a)}{1.2.3}$, ... et l'inégalité

$$\varphi'(a)h+\frac{\varphi''(a)}{1.2}h^2+\frac{\varphi'''(a)}{1.2.3}h^3+\ldots<\delta,$$

sera évidemment comportée par la suivante :

$$Ah(1+h+h^2+\ldots+h^{m-1})<\delta.$$

Or, la quantité $1+h+h^2+\ldots+h^{m-1}=\frac{1-h^m}{1-h}$ (72) ; donc l'inégalité précédente revient à

$$\frac{Ah(1-h^m)}{1-h}<\delta.$$

Mais h étant supposé moindre que l'unité, il est évident que le premier membre de cette inégalité est moindre que $\frac{Ah}{1-h}$, de sorte que si l'on pose

$$\frac{Ah}{1-h}<\delta;\quad \text{d'où}\quad h<\frac{\delta}{A+\delta},$$

on aura, à plus forte raison,

$$\varphi(a+h)-\varphi(a)<\delta.$$

produits de ces accroissements. Or, il est clair que l'on arrivera à ce résultat si l'on change d'abord x en $x+h$, ce qui donnera $\varphi(x+h, y)$; puis que, dans le développement de $\varphi(x+h, y)$, effectué d'après la formule de Taylor, on remplace y par $y+k$, et qu'on applique encore cette formule aux fonctions résultantes. Mais il faut auparavant convenir d'une notation, car on sera conduit à regarder successivement x et y comme constantes et comme variables.

L'ordre de la dérivation sera toujours indiqué par le nombre des accents dont sera affectée la caractéristique de la fonction; mais on donnera à la variable, par rapport à laquelle on aura dérivé, un indice qui fera connaître l'ordre de la dérivation relative à cette variable. Ainsi, $\varphi^n(x_p, y_q)$, n étant égal à $p+q$, indique que l'on a pris la dérivée de la fonction $\varphi(x, y)$, p fois par rapport à x, et q fois par rapport à y. Toutefois, quand une seule des quantités x ou y aura varié, nous conviendrons, pour plus de simplicité, de n'écrire que cette seule variable, entre parenthèses, sans lui donner d'indice; ainsi

$$\varphi'(x) \quad \text{et} \quad \varphi'(x_1, y); \quad \varphi'(y) \quad \text{et} \quad \varphi'(x, y_1);$$
$$\varphi^n(x) \quad \text{et} \quad \varphi^n(x_n, y); \quad \varphi^n(y) \quad \text{et} \quad \varphi^n(x, y_n),$$

seront des expressions équivalentes. De même, au lieu de $\varphi''(x_1, y_1)$, on pourra écrire $\varphi''(x, y)$.

Ces conventions établies, changeons x en $x+h$, et il viendra

$$\varphi(x+h, y) = \varphi(x, y) + \varphi'(x_1, y)h + \varphi''(x_2, y)\frac{h^2}{1.2} + \varphi'''(x_3, y)\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Si maintenant on remplace, dans cette équation, y par $y+k$, nous trouverons

$$\varphi(x+h, y+k) = \varphi(x, y+k) + \varphi'(x_1, y+k)h + \varphi''(x_2, y+k)\frac{h^2}{1.2} + \varphi'''(x_3, y+k)\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Mais, en vertu de la formule [1], on a

$$\varphi(x, y+k) = \varphi(x, y) + \varphi'(x, y_1)k + \varphi''(x, y_2)\frac{k^2}{1.2} + \varphi'''(x, y_3)\frac{k^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$
$$\varphi'(x_1, y+k) = \varphi'(x_1, y) + \varphi''(x_1, y_1)k + \varphi'''(x_1, y_2)\frac{k^2}{1.2} + \text{etc.}$$
$$\varphi''(x_2, y+k) = \varphi''(x_2, y) + \varphi'''(x_2, y_1)k + \text{etc.}$$
$$\varphi'''(x_3, y+k) = \varphi'''(x_3, y) + \text{etc.}$$
etc.

Donc enfin, en substituant dans l'expression précédente de $\varphi(x+h, y+k)$, on trouvera

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x+h, y+k)=\varphi(x,y)+\varphi'(x_1,y)h+\varphi''(x_2,y)\frac{h^2}{1.2}+\varphi'''(x_3,y)\frac{h^3}{1.2.3}+\dots\\ +\varphi'(x,y_1)k+2\varphi''(x_1,y_1)\frac{hk}{1.2}+3\varphi'''(x_2,y_1)\frac{h^2k}{1.2.3}+\dots\\ +\varphi''(x,y_2)\frac{h^2}{1.2}+3\varphi'''(x_1,y_2)\frac{hk^2}{1.2.3}+\dots\\ +\varphi'''(x,y_3)\frac{k^3}{1.2.3}+\dots\end{aligned}\right\}[4],$$

formule dont la loi est très-facile à saisir.

Exemple. Soit $\varphi(x,y)=y^3-3axy+x^3$, on trouvera

$$\varphi'(x)=3x^2-3ay;\quad \frac{\varphi''(x)}{1.2}=3x;\quad \frac{\varphi'''(x)}{1.2.3}=1,$$

$$\varphi'(y)=3y^2-3ax;\quad \frac{\varphi''(y)}{1.2}=3y;\quad \frac{\varphi'''(y)}{1.2.3}=1,$$

$$\varphi''(x,y)=-3a,\quad \varphi'''(x_2,y_1)=0,\quad \varphi'''(x_1,y_2)=0.$$

On a formé $\varphi''(x,y)$ en prenant la dérivée de $\varphi'(x)$ par rapport à y; on a de même pris la dérivée par rapport à y de $\varphi''(x)$, pour avoir $\varphi'''(x_2,y)$. Donc

$$\begin{aligned}\varphi(x+h, y+k)=y^3 &+3(x^2-ay)h+3xh^2+h^3\\ -3axy&+3(y^2-ax)k-3ahk+k^3\\ +x^3&\qquad\qquad\qquad\quad +3yk^2\end{aligned}$$

489. Nous avons obtenu le développement précédent en changeant d'abord x en $x+h$, puis y en $y+k$; mais on aurait pu procéder dans un ordre inverse, c'est-à-dire mettre d'abord $y+k$ au lieu de y, et ensuite $x+h$ à la place de x, et il est évident que le deuxième développement aurait été nécessairement identique avec le premier; alors, au lieu de prendre d'abord les dérivées de $\varphi(x,y)$ par rapport à x, puis les dérivées par rapport à y, de ces dérivées, nous aurions opéré dans un ordre contraire; donc cet ordre d'opérations est parfaitement indifférent. Ainsi, par exemple, pour former $\varphi'''(x_1,y_2)$, on pourra prendre la dérivée de $\varphi(x,y)$, d'abord par rapport à x, puis deux fois par rapport à y, ou bien deux fois relativement à y, et ensuite une fois par rapport à x.

§ III. DÉRIVÉES D'UNE SOMME, D'UN PRODUIT, D'UNE PUISSANCE, D'UN QUOTIENT.

490. *La dérivée de la somme algébrique de plusieurs fonctions est égale à la somme des dérivées de chaque fonction prise avec son signe.*

Soit $y = u + v - w$, u, v, w, étant des fonctions de x. Donnons à x un accroissement h, d'où résultent pour y, u, v, w, les accroissements k_y, k_u, k_v, k_w ; on aura :

$$k_y = k_u + k_v - k_w,$$

d'où :

$$\frac{k_y}{h} = \frac{k_u}{h} + \frac{k_v}{h} - \frac{k_w}{h}$$

et à la limite :

$$y' = u' + v' - w',$$

en désignant la dérivée par la lettre de la fonction affectée d'un accent.

491. *La dérivée d'un produit de plusieurs fonctions est égale à la somme des produits des dérivées de chaque fonction par toutes les autres fonctions* *.

1° Soit d'abord un produit de deux fonctions, $y = uv$. Donnons à x l'accroissement h, et soient k_y, k_u, k_v, les accroissements correspondants de y, u, v ; il viendra successivement

$$y + k_y = (u + k_u)(v + k_v)$$
$$y + k_y = uv + vk_u + uk_v + k_u k_v$$
$$\frac{k_y}{h} = v\frac{k_u}{h} + u\frac{k_v}{h} + \frac{k_u}{h}.k_v.$$

et cette dernière égalité subsistera lorsqu'on passera à la limite.

* Les démonstrations données aux nos 484, 485 et 486 s'appliquent *exclusivement* à des fonctions *entières* et *rationnelles* ; car elles ont été déduites immédiatement de la formule de Taylor, et nous avons établi cette formule seulement pour de semblables fonctions (482).

Mais alors le produit $\frac{k_u}{h} \cdot k_v$ devient nul, car le facteur $\frac{k_u}{h}$ converge vers u', c'est-à-dire vers une quantité finie, et k_v a pour limite zéro ; et l'égalité devient

$$y' = vu' + uv'.$$

Si l'une des deux fonctions, v par exemple, est une quantité constante a, sa dérivée est nulle, et la dérivée du produit $y = au$ devient

$$y' = au'.$$

2° Considérons maintenant un produit de plusieurs fonctions; et supposons que le théorème soit démontré pour un produit de m facteurs; je vais prouver qu'il sera vrai pour $(m+1)$ facteurs. Soit en effet $y = tu \ldots vw$ un produit de $(m+1)$ facteurs ; je peux considérer comme effectué le produit $tu \ldots v$, et regarder y comme le produit des deux facteurs $tu \ldots v$ et w. On aura (1°)

$$y' = w(tu \ldots v)' + tu \ldots vw'.$$

Mais d'après notre hypothèse, on aura

$$(tu \ldots v)' = tu \ldots v' + t \ldots vu' + u \ldots vt' + \ldots$$

donc :

$$y' = wtu \ldots v' + wt \ldots vu' + wu \ldots vt' + \ldots + tu \ldots vw',$$

résultat conforme à l'énoncé du théorème. Or, nous avons démontré cette règle pour deux facteurs ; donc elle sera vraie dans le cas de trois facteurs; l'étant pour trois, elle le sera pour quatre et ainsi de suite; donc elle est générale.

492. *La dérivée d'une puissance quelconque d'une fonction est égale au produit de l'exposant multiplié successivement par la fonction élevée à une puissance moindre d'une unité et par la dérivée de la fonction.*

1ᵉʳ Cas. *Exposant entier et positif.* En supposant que tous les facteurs u, v, t,... deviennent égaux à u, il vient évidemment pour la dérivée de $y = u^m$,

$$y' = mu^{m-1}u'.$$

2° CAS. *Exposant fractionnaire.* Soit $y = u^{\frac{p}{q}}$; il en résulte immédiatement

$$y^q = u^p;$$

donc la dérivée de y^q est égale à la dérivée de u^p (**478**), c'est-à-dire que l'on a (1er cas)

$$qy^{q-1}y' = pu^{p-1}u';$$

d'où :

$$y' = \frac{p}{q} \cdot \frac{u^{p-1}}{y^{q-1}} u'$$

et en remplaçant y par $u^{\frac{p}{q}}$,

$$y' = \frac{p}{q} \cdot u^{\frac{p}{q}-1} \cdot u'.$$

3° CAS. *Exposant négatif.* Soit $y = u^{-m}$, d'où

$$yu^m = 1.$$

On en conclut que la derivée de yu^m est nulle (**477**); donc

$$y'u^m + ymu^{m-1}u' = 0 \text{ [491 et 492 (1}^{er}\text{ et 2}^e\text{ cas)]}$$

d'où

$$y' = -m\frac{y}{u}u'$$

$$y' = -mu^{-m-1}u'.$$

493. Si l'on cherche la dérivée de $y = \sqrt{x}$, on trouvera facilement, en observant que $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$,

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

494. *La dérivée d'un quotient s'obtient en retranchant du produit du diviseur par la dérivée du dividende le produit du dividende par la dérivée du diviseur, et en divisant le reste par le carré du diviseur* (**491***).

Soit en effet $y = \frac{u}{v}$. On en déduit

$$vy = u,$$

donc (491)

$$vy' + yv' = u',$$

$$y' = \frac{u' - yv'}{v},$$

et à cause de $y = \frac{u}{v}$,

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Si le dividende était une quantité constante a, on aurait $-\frac{av'}{v^2}$ pour la dérivée de $\frac{a}{v}$.

§ IV. DÉRIVÉES DES FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES.

498. Considérons d'abord la fonction $y = a^u$, dans laquelle la base a est constante et l'exposant u variable. Sa dérivée est, par définition, la limite de l'expression

$$\frac{a^{u+h} - a^u}{h} = \frac{a^u(a^h - 1)}{h}$$

lorsque h tend vers zéro.

Posons $a^h - 1 = \alpha$, α étant une quantité qui converge vers zéro, puisque a^h converge vers l'unité. On en déduit :

$$a^h = 1 + \alpha$$

$$h \log a = \log(1 + \alpha)$$

$$h = \frac{\log(1 + \alpha)}{\log a}.$$

Par conséquent l'expression $\frac{a^u(a^h - 1)}{h}$ devient

$$\frac{a^u \alpha \log a}{\log(1 + \alpha)} = \frac{a^u \log a}{\frac{1}{\alpha}\log(1 + \alpha)}.$$

Or on a

$$\frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha)=\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

en posant $\alpha=\frac{1}{n}$, n tendant vers l'infini quand α tend vers zéro. Mais $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge vers e lorsque n augmente indéfiniment (420*); donc l'expression considérée a pour limite $\frac{a^u\log a}{\log e}$; telle est la dérivée de a^u.

Si les logarithmes étaient pris dans le système dont la base est e, la dérivée de a^u aurait pour expression $a^u . l a$, en désignant par la caractéristique l les logarithmes népériens.

On conclut de là que les dérivées successives de la fonction e^u sont toutes égales à e^u, c'est-à-dire à cette fonction elle-même.

496. Proposons-nous maintenant de trouver la dérivée de $y=\log u$, c'est-à-dire la limite de l'expression

$$\frac{\log(u+h)-\log u}{h}=\frac{\log\left(1+\frac{h}{u}\right)}{h}$$

lorsque h tend vers zéro.

Posons $\frac{h}{u}=\alpha$, d'où $h=\alpha u$, α tendant vers zéro en même temps que h; l'expression deviendra

$$\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha u}=\frac{1}{u}\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Or, la limite de $\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ est $\log e$ (495); donc enfin, la dérivée de $\log u$ est $\frac{\log e}{u}$.

Si les logarithmes étaient pris dans le système dont la base est e, la dérivée de $\log u$ aurait pour expression $\frac{1}{u}$.

497. Nous pouvons actuellement trouver sans peine la dérivée de la fonction exponentielle $y=v^u$ dans laquelle la base

v et l'exposant u sont des fonctions d'une certaine variable indépendante x. On peut toujours, en effet, transformer une exponentielle à base variable en une exponentielle à base constante ; il suffit pour cela d'observer que $v = a^{\log v}$, a étant la base du système de logarithmes considéré, d'où l'on déduit :

$$y = v^u = (a^{\log v})^u = a^{u \log v} = a^z,$$

en posant $z = u \log v = \psi(x)$. Donc, en vertu du principe des fonctions de fonction (**475**)

$$y' = \frac{a^z}{\log e} z' = \frac{v^u}{\log e}\left(u \frac{\log e}{v} + \log v\right),$$

ou bien :

$$y' = uv^{u-1} + v^u \frac{\log v}{\log e},$$

c'est-à-dire que *la dérivée d'une exponentielle à base et à exposant variables est la somme des résultats que l'on obtient en considérant successivement la base et l'exposant comme étant seul variable.*

§ V. DÉRIVÉES DES FONCTIONS CIRCULAIRES DIRECTES ET INVERSES.

498. 1° $y = \sin u$. La dérivée de $\sin u$ est par définition la limite de l'expression

$$\frac{\sin(u+h) - \sin u}{h},$$

lorsque h tend vers zéro. Or, (*Trigon.* **29**),

$$\sin(u+h) - \sin u = 2 \cos\left(u + \frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2};$$

donc :

$$\frac{\sin(u+h) - \sin u}{h} = \frac{2\cos\left(u+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = \cos\left(u+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

Si maintenant on fait décroître h indéfiniment, $\cos\left(u + \frac{h}{2}\right)$

tend vers $\cos u$, et $\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ tend vers l'unité (*Trigon.* 33); donc la limite de l'expression est $\cos u$. Telle est la dérivée de $\sin u$.

2° $y = \cos u$. La dérivée de $\cos u$ est la limite de l'expression

$$\frac{\cos(u+h) - \cos u}{h} = -\sin\left(u+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}},$$

en observant que (*Trigon.* 29),

$$\cos(u+h) - \cos u = -2 \sin\left(u+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2};$$

or, le premier facteur $\sin\left(u+\frac{h}{2}\right)$ a pour limite $\sin u$, le second facteur a pour limite l'unité; donc la dérivée de $\cos u$ est $-\sin u$.

On pourrait dire aussi : la dérivée de $\cos u$ n'est autre chose que la dérivée de $\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)$; elle est donc égale à $\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)$ ou $-\sin u$.

3° $y = \operatorname{tang} u$. Si l'on observe que $\operatorname{tang} u = \frac{\sin u}{\cos u}$, et que la dérivée du quotient $\frac{u}{v}$ de deux fonctions quelconques u et v a pour expression $\frac{vu' - uv'}{v^2}$ (494), on remplacera dans cette formule u par $\sin u$, v par $\cos u$, u' par $\cos u$, v' par $-\sin u$, et on trouvera facilement, en observant que $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$,

$$y' = \frac{1}{\cos^2 u}.$$

4° $y = \cot u$. On a $y = \frac{\cos u}{\sin u}$, d'où l'on déduit sans peine :

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 u}.$$

5° $y = \text{séc}\, u$. On observera que $\text{séc}\, u = \frac{1}{\cos u}$; donc (**494**) sa dérivée est $y' = \frac{\sin u}{\cos^2 u} = \frac{\sin u}{\cos u} \cdot \frac{1}{\cos u} = \text{tang}\, u\ \text{séc}\, u$.

6° $y = \text{coséc}\, u$. On trouvera d'une manière analogue $y' = -\cot u\ \text{coséc}\, u$.

499. Occupons-nous maintenant de chercher la dérivée d'une *fonction circulaire inverse*, c'est-à-dire d'un arc considéré comme fonction d'une de ses lignes trigonométriques. En général, si l'on a une certaine fonction $y = f(u)$, on en déduira la fonction inverse $u = \text{F}(y)$; et il est facile de voir que le produit des dérivées de ces deux fonctions est égal à l'unité. En effet, on a identiquement $u = \text{F}(f(u))$; si donc on prend les dérivées en appliquant le principe des fonctions de fonctions (**475**), il viendra :

$$1 = \text{F}'(y) \cdot f'(u),$$

c'est-à-dire que $\text{F}'(y)$ est l'inverse de $f'(u)$.

1° $y = \text{arc sin}\, u$ *. On en tire immédiatement :

$$u = \sin y,$$

y étant une fonction de u ; donc, en prenant les dérivées (**475**), il viendra :

$$1 = \cos y \cdot y',$$

d'où

$$y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Mais $\cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y} = \pm\sqrt{1 - u^2}$; donc enfin

$$y' = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - u^2}}.$$

L'arc y est indéterminé ; on sait en effet qu'il y a une infinité d'arcs ayant même sinus ; tous ces arcs aboutissent à deux

* C'est-à-dire $y =$ l'arc dont le sinus est égal à u.

points distincts de la circonférence, et sont donnés par les deux formules

$$2k\pi + \alpha \text{ et } (2k+1)\pi - \alpha.$$

Or, il est clair que si α' désigne la dérivée de l'arc principal α, tous les arcs compris dans la première formule auront aussi α' pour dérivée, mais la dérivée de tous les arcs compris dans la seconde formule sera $-\alpha'$. On devait donc trouver pour y' deux valeurs égales et de signes contraires.

2° $y = \text{arc} \cos u$. On a $u = \cos y$, et l'on en déduira comme précédemment :

$$y' = \frac{-1}{\pm\sqrt{1-u^2}}.$$

On se rendra compte, comme plus haut, du double signe de y' en observant que $y = 2k\pi \pm \alpha$.

3° $y = \text{arc tang}\, u$. On a $u = \text{tang}\, y$, d'où :

$$1 = \frac{1}{\cos^2 y} \cdot y'$$

et partant, en observant que $\cos y = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}^2 y}}$,

$$y' = \frac{1}{1+u^2}.$$

Nous ne trouvons ici qu'une seule valeur pour y', ce qui doit être, puisque tous les arcs qui ont même tangente ne diffèrent que par une constante, étant tous compris dans la formule $k\pi + \alpha$.

4° $y = \text{arc} \cot u$. On trouvera facilement que $y' = \frac{-1}{1+u^2}$.

5° $y = \text{arc séc}\, u$. On en déduit $u = \text{séc}\, y$, et par suite

$$1 = \text{tang}\, y \,\text{séc}\, y .\, y'$$

d'où en observant que $\text{tang}\, y = \pm\sqrt{\text{séc}^2 y - 1}$,

$$y' = \frac{1}{\pm u\sqrt{u^2-1}}.$$

6° $y = \text{arc coséc}\, u$. On trouvera sans peine $y' = \frac{-1}{\pm u\sqrt{u^2-1}}$.

§ VI. DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DE LOG $(1-x)$ ET DE LOG $(1+x)$.

500. Développement de log $(1-x)$. Si l'on divise 1 par $1-x$, on obtiendra facilement (387) la série indéfinie :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\text{etc.} \qquad [1].$$

Cette série est convergente si x est <1 (383).

Or, d'une part, si l'on considère la série également convergente

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{n+1}+\text{etc.} \qquad [2],$$

et que l'on forme sa dérivée, on retrouvera précisément (490 et 492) la série [1]. D'une autre part, $\frac{1}{1-x}$ est évidemment la dérivée de $-\frac{\log(1-x)}{\log e}$ (496) *. Donc la série [2] et $-\frac{\log(1-x)}{\log e}$, ayant des dérivées égales, ne peuvent différer que par une constante C ; donc :

$$-\frac{\log(1-x)}{\log e}=C+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots$$

et par suite

$$\log(1-x)=-\log e\left(C+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots\right).$$

Or, pour le cas particulier de $x=0$, le second membre doit se réduire au logarithme de 1, c'est-à-dire à zéro ; donc $C=0$, donc enfin :

$$\log(1-x)=-\log e\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right) [3]$$

* On a en effet, si $u=1-x$, d'après le principe des fonctions :

$$\text{dérivée de } \frac{-\log u}{\log e}=\left(-\frac{1}{u}\right)\times \text{dérivée de } (1-x)=+\frac{1}{u}=\frac{1}{1-x}.$$

ou, en prenant les logarithmes népériens :

$$\mathrm{l}\,(1-x) = -\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right)[4].$$

501. Développement de log $(1+x)$. On obtient, en divisant 1 par $1+x$, la série convergente :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{2n} - \text{etc.}$$

Le second membre est évidemment la dérivée de la série :

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \text{etc.};$$

le premier membre est la dérivée de $\frac{\log(1+x)}{\log e}$; et l'on arrivera facilement, en raisonnant comme au n° précédent, aux formules

$$\log(1+x) = \log e\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right)[5],$$

$$\mathrm{l}\,(1+x) = \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right) \quad [6].$$

Ces formules, comme les précédentes, supposent essentiellement que x est <1, autrement, les séries qui forment les seconds membres seraient divergentes.

502. Si l'on retranche l'un de l'autre les développements de $\log(1-x)$ et de $\log(1+x)$, on trouvera :

$$\log(1+x) - \log(1-x) = 2\log e\left(x+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right),$$

ou bien :

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\log e\left(x+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right).$$

Posons actuellement :

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{z}{n} = \frac{n+z}{n},$$

d'où :

$$2x : 2 :: z : 2n+z;\quad x = \frac{z}{2n+z};$$

il viendra, en observant que $\log\frac{n+z}{n} = \log(n+z) - \log n$,

$$\log(n+z) - \log n = 2\log e\left[\frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \ldots\right].$$

Si l'on fait $z=1$, on aura :

$$\log(n+1) = \log n + 2\log e\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5 + \ldots\right] \quad [7].$$

formule très-convergente, au moyen de laquelle on pourra calculer le logarithme d'un nombre quelconque $(n+1)$, connaissant le logarithme du nombre précédent n. Or, on connaît le logarithme de 1, qui est 0; on aura donc successivement :

$$\log 2 = 2\log e\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \ldots\right]$$

$$\log 3 = \log 2 + 2\log e\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 + \ldots\right]$$

etc.

503. En considérant le système de logarithmes dont la base est e, la formule [7] deviendra :

$$\mathrm{l}(n+1) = \mathrm{l}n + 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5 + \ldots\right] \quad [8]$$

formule au moyen de laquelle on calculera facilement les logarithmes népériens des nombres.

Pour calculer les logarithmes vulgaires, dans le système dont la base est 10, au moyen de la formule [7], il faudra commencer par déterminer le logarithme de e dans ce système. Or, on a :

$$10^{\log e} = e,$$

d'où en prenant les logarithmes népériens :

$$\log e\,\mathrm{l}10 = \mathrm{l}e = 1$$

$$\log e = \frac{1}{\mathrm{l}10}.$$

Il faudra donc calculer le logarithme népérien de 10, ce

qui est facile au moyen de la formule [8]. En effet :

$$l\,10 = l\,2\,5 = l\,2\,l(4+1)$$

on déterminera l 2 en faisant $n=1$ dans [8], et on en déduira $l\,4 = 2.\,l\,2$; puis, en se servant encore de la formule [8], on calculera $l(4+1)$ au moyen de $l\,4$.

§ VII. DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE ARC TANG x.

504. Si nous développons le quotient de 1 par $1+x^2$, nous obtiendrons la série indéfinie

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots.$$

série convergente, si l'on suppose que la variable x reste comprise entre 0 et 1.

Or, le second membre est la dérivée de la série :

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Le premier membre est (499, 3°) la dérivée de arc tang x (remarquons que x variant entre 0 et 1, la fonction arc tang x varie entre 0 et $\frac{\pi}{4}$ et n'a qu'une seule valeur pour chaque valeur de x, de sorte qu'elle est définie d'une manière précise) ; on aura donc

$$\text{arc tang}\, x = +\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots. \qquad [1]$$

(la constante est nulle, puisque le second membre doit s'annuler pour $x=0$). Cette série est convergente pour $x \leqq 1$.

Si l'on observe que arc tang $(-x) = -$ arc tang x, on en conclura que

$$\text{arc tang}(-x) = +\frac{(-x)}{1} - \frac{(-x)^3}{3} + \frac{(-x)^5}{5} - \frac{(-x)^7}{7} - \text{etc.}$$

La formule [1] est donc vraie pour toutes les valeurs de x, comprises entre -1 et $+1$.

505. Si l'on suppose dans la formule [1] $x=1$, d'où arc tang $x=\frac{\pi}{4}$, il viendra :

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\text{etc.} \qquad [2].$$

Cette série est convergente (386): mais ses termes décroissent trop lentement pour qu'on puisse l'employer avec avantage au calcul du nombre π. On peut obtenir des séries beaucoup plus convergentes, au moyen du procédé de *Machin*, rapporté par M. *Lacroix*, dans l'introduction du *Traité des calculs différentiel et intégral*.

Ce procédé consiste à prendre une fraction assez petite pour la tangente d'un premier arc, et à répéter cet arc autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir celui de ses multiples qui approche le plus de $\frac{\pi}{4}$, puis à calculer la tangente de la différence de ces deux derniers arcs, tangente qui n'est aussi qu'une petite fraction, et dont par conséquent on obtient l'arc par une série très-convergente.

Ainsi, soit $\frac{1}{m}$ la tangente d'un arc a, $\frac{1}{m}$ étant une petite fraction. Je calcule successivement tang $2a$, tang $3a$, tang $4a$, etc., en fonction de tang $a=\frac{1}{m}$, au moyen de la formule

$$\text{tang}(a+b)=\frac{\text{tang } a+\text{tang } b}{1-\text{tang } a \text{ tang } b} \quad (\textit{Trigon. } 48),$$

d'où l'on déduit, en faisant $b=a$,

$$\text{tang } 2a=\frac{2 \text{ tang } a}{1-\text{tang}^2 a},$$

puis, en faisant $b=2a$,

$$\text{tang } 3a=\frac{\text{tang } a+\text{tang } 2a}{1-\text{tang } a \text{ tang } 2a},$$

et ainsi de suite. On arrivera ainsi à un arc ka dont la tan-

gente différera très-peu de tang $\frac{\pi}{4}=1$. On calculera

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-ka\right)=\frac{1-\operatorname{tang} ka}{1+\operatorname{tang} ka}=\frac{1}{n},$$

et $\frac{1}{n}$ sera également une très-petite fraction, puisque la différence $\frac{\pi}{4}-ka$ est très-petite. Actuellement, en vertu de la formule [1], on aura :

$$\frac{\pi}{4}-ka=\operatorname{arc tang}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{n}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{n}\right)^7+\ldots$$

$$ka=k\operatorname{arc tang}\frac{1}{m}=k\left[\frac{1}{m}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{m}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{m}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{m}\right)^7+\ldots\right]$$

d'où l'on tire enfin, en ajoutant :

$$\frac{\pi}{4}=\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{n}\right)^5-\ldots\right]+k\left[\frac{1}{m}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{m}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{m}\right)^5-\ldots\right]$$

série beaucoup plus convergente que la série [2].

Cette méthode peut évidemment conduire à différentes séries, puisque le point de départ est arbitraire. Si l'on part de $\frac{1}{m}=\frac{1}{2}$, on trouvera :

$$\operatorname{tang} 2a=\frac{2.\frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^2}=\frac{4}{3}.$$

puis $$\operatorname{tang}\left(2a-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{4}{3}-1}{1+\frac{4}{3}}=\frac{1}{7},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\pi}{4}=2\operatorname{arc tang}\tfrac{1}{2}-\operatorname{arc tang}\tfrac{1}{7}.$$

En prenant $\frac{1}{m}=\frac{1}{3}$, on aura

$$\operatorname{tang} 2a=\tfrac{3}{4},$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-2a\right)=\frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}=\frac{1}{7},$$

d'où $$\frac{\pi}{4}=2\operatorname{arc tang}\tfrac{1}{3}+\operatorname{arc tang}\tfrac{1}{7}.$$

Si l'on suppose $\frac{1}{m} = \frac{1}{5}$, on trouvera successivement

$$\tang 2a = \tfrac{5}{12}$$

$$\tang 4a = \tfrac{120}{119},$$

valeur qui diffère très-peu de 1. On en déduira

$$\tang\left(4a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \tfrac{1}{239}$$

d'où l'on tire

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc tang} \tfrac{1}{5} - \operatorname{arc tang} \tfrac{1}{239}$$

$$\frac{\pi}{4} = 4\left[\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{5})^3 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{5})^5 - \ldots\right] - \left[\tfrac{1}{239} - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{239})^3 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{239})^5 \ldots\right],$$

formule remarquable par sa simplicité et sa convergence, au moyen de laquelle on pourra aisément calculer π avec un assez grand nombre de décimales.

CHAPITRE XIV.

DES QUANTITÉS QUI SE RÉDUISENT A $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$ OU $\infty-\infty$.

506. Considérons une fraction $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ dont les deux termes sont des fonctions algébriques, entières et rationnelles de x, et supposons que cette fraction se réduise à $\frac{0}{0}$, quand on y fera $x=a$. Ses deux termes seront par conséquent divisibles (**71**, 1°) par une certaine puissance de $(x-a)$, de sorte que si on les divise par leur plus grand commun diviseur, on obtiendra une fraction dont les deux termes ne seront plus divisibles en même temps par $(x-a)$; ainsi en y faisant $x=a$, on trouvera la limite vers laquelle tend la fraction proposée lorsque l'on donne à x des valeurs qui tendent vers a (**140**).

Mais il y a un moyen plus simple d'obtenir la valeur cherchée de la fraction $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$; car il n'est pas nécessaire de supprimer *tous* les facteurs communs à ses deux termes, mais seulement la plus haute puissance des facteurs $(x-a)$ qui entre à la fois dans tous les deux. En conséquence, je remarque que $x=a+\overline{x-a}$, et comme les quantités $\varphi(a)$ et $\psi(a)$ sont supposées nulles, on aura (**483**)

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(a+\overline{x-a})}{\psi(a+\overline{x-a})}=\frac{\varphi'(a)(x-a)+\varphi''(a)\frac{(x-a)^2}{1.2}+\varphi'''(a)\frac{(x-a)^3}{1.2.3}+\ldots}{\psi'(a)(x-a)+\psi''(a)\frac{(x-a)^2}{1.2}+\psi'''(a)\frac{(x-a)^3}{1.2.3}+\ldots},$$

ou, en supprimant le facteur $(x-a)$, qui est commun aux deux termes du second membre,

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi'(a)+\varphi''(a)\frac{x-a}{1.2}+\varphi'''(a)\frac{(x-a)^2}{1.2.3}+\ldots}{\psi'(a)+\psi''(a)\frac{x-a}{1.2}+\psi'''(a)\frac{(x-a)^2}{1.2.3}+\ldots}.$$

Or, si on fait $x = a$, le deuxième membre de cette équation se réduit à $\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$; d'où l'on voit que l'*on obtiendra la valeur cherchée en formant une fraction* $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ *dont les deux termes soient les dérivées respectives des deux termes de la fraction proposée* $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, *et en y faisant* $x = a$.

Si la fraction $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ se réduit aussi à $\frac{0}{0}$, par l'hypothèse de $x=a$, on la traitera comme la proposée, c'est-à-dire que l'on formera la fraction $\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}$ et on supposera $x = a$ dans celle-ci, et ainsi de suite, de sorte que *la vraie valeur du rapport* $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}$, *qui se présente sous la forme* $\frac{0}{0}$, *est le rapport des valeurs que prennent pour* $x = a$ *les deux dérivées de même ordre des fonctions* $\varphi(x)$ *et* $\psi(x)$ *qui, les premières, cessent de s'évanouir à la fois.* Si l'une de ces deux dérivées devient nulle, la vraie valeur du rapport sera 0 ou ∞; elle sera, au contraire, une quantité finie si aucune de ces dérivées ne devient nulle.

307. Exemple I. *La fraction*

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x^4+ax^3-3a^2x^2-a^3x+2a^4}{x^4-ax^3-13a^2x^2+25a^3x-12a^4}$$

se réduit à $\frac{0}{0}$ *pour* $x = a$, *quelle est sa véritable valeur?*

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{4x^3+3ax^2-6a^2x-a^3}{4x^3-3ax^2-26a^2x+25a^3} = \frac{0}{0} \text{ pour } x = a,$$

$$\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = \frac{12x^2+6ax-6a^2}{12x^2-6ax-26a^2} = -\frac{12a}{20a^2} = -\frac{3}{5} \text{ pour } x = a.$$

II. $$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x^3+3ax^2-a^2x-3a^3}{x^4-ax^3-13a^2x^2+25a^3x-12a^4} = \frac{0}{0} \text{ pour } x = a,$$

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{3x^2+6ax-a^2}{4x^3-3ax^2-26a^2x+25a^3} = \frac{8a^2}{0} = \infty \text{ pour } x = a.$$

308. Si $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ ne sont pas des fonctions entières et rationnelles de x, il n'y a pas de méthode élémentaire qui soit

tout à fait générale pour trouver la véritable valeur de la fraction $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ qui se réduit à $\frac{0}{0}$, pour une certaine valeur a donnée à x. Alors il faudra tâcher de supprimer tous les facteurs $(x-a)$, communs aux deux termes de cette fraction, puis supposer $x=a$ dans la fraction résultante. Pour faciliter la suppression de ces facteurs, on posera $x-a=h$; car, alors le facteur à supprimer étant un monome, il sera, en général, plus facile de le mettre en évidence au numérateur et au dénominateur. On divisera donc ces deux termes par la plus haute puissance de h qu'ils renfermeront tous les deux, et on fera ensuite $h=0$, c'est-à-dire $x=a$ dans la fraction ainsi simplifiée.

509. Exemple I. *La fraction* $\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$ *se réduit à* $\frac{0}{0}$ *pour* $x=a$; mais je vois que le numérateur est exactement divisible par le dénominateur : j'effectue donc cette division, ce qui donne $(x+a)^{\frac{3}{2}}$ pour quotient, de sorte que la vraie valeur de la fraction proposée est $(2a)^{\frac{3}{2}} = 2a\sqrt{2a}$.

II. $$\frac{\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^3-1}} = \frac{0}{0} \textit{ pour } x=1.$$

On voit que $\sqrt{x-1}$ est facteur commun aux deux termes de cette fraction (71, 3°) et la suppression de ce facteur donne

$$\frac{1+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ pour } x=1.$$

III. $$\frac{\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt[3]{(2x^2-x-1)^2}}{\sqrt[4]{x^5-2x^4+x^3+x^2-2x+1}} = \frac{0}{0} \text{ pour } x=1.$$

Je pose $x=1+h$, et, en développant la quantité soumise à chaque radical, par le théorème de Taylor, on trouvera que la fraction proposée deviendra

$$\frac{\sqrt{3h+h^2}+\sqrt[3]{(5h+6h^2+2h^3)^2}}{\sqrt[4]{2h^2+3h^3+3h^4+h^5}} = \frac{\sqrt{3+h}+h^{\frac{1}{6}}\sqrt[3]{(5+6h+2h^2)^2}}{\sqrt[4]{2+3h+3h^2+h^3}},$$

en divisant haut et bas par $h^{\frac{1}{2}}$. En faisant maintenant $h=0$, on trouvera, pour la vraie valeur de la fraction proposée, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt{\frac{9}{2}}$.

IV. $$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{0}{0}\ pour\ x=0.$$

Je remarque que $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ et qu'ainsi

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Mais la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$, quand x tend vers zéro, est l'unité; donc la vraie valeur cherchée est $\frac{1}{2}$.

V. $$\frac{\sin\frac{x}{2}+\cos x}{1+\sin^2 x+\cos x}=\frac{0}{0}\ pour\ x=\pi.$$

Je pose $x=\pi+h$, et il vient

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{2}\right)+\cos(\pi+h)}{1+\sin^2(\pi+h)+\cos(\pi+h)}=\frac{\cos\frac{h}{2}-\cos h}{1+\sin^2 h-\cos h}.$$

Or, $\cos\frac{h}{2}-\cos h=2\sin\frac{3h}{4}\sin\frac{h}{2}$, $1-\cos h=2\sin^2\frac{h}{2}$,

et $\sin h=2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{h}{2}$:

en introduisant ces valeurs dans l'expression précédente, elle deviendra

$$\frac{2\sin\frac{3h}{4}\sin\frac{h}{2}}{2\sin^2\frac{h}{2}+4\sin^2\frac{h}{2}\cos^2\frac{h}{2}}=\frac{\sin\frac{3h}{4}}{\sin\frac{h}{2}\left(1+2\cos^2\frac{h}{2}\right)},$$

quantité qui se réduit encore à $\frac{0}{0}$ pour $h=0$. Mais j'observe que l'on peut mettre cette expression sous la forme

$$\frac{\frac{3h}{4}\cdot\frac{\sin\frac{3h}{4}}{\frac{3h}{4}}}{\frac{h}{2}\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\left(1+2\cos^2\frac{h}{2}\right)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{\sin\frac{3h}{4}}{\frac{3h}{4}}}{\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\left(1+2\cos^2\frac{h}{2}\right)}.$$

Or, quand on fera $h=0$, cette expression se réduira à $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$. Telle est donc la vraie valeur de la fraction proposée pour $x=\pi$.

310. Il pourra arriver que les deux termes de la fraction proposée $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ deviennent tous deux infinis pour $x=a$; alors on observera que les deux quantités $\frac{1}{\varphi(x)}$ et $\frac{1}{\psi(x)}$ s'évanouiront; de sorte qu'en écrivant

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}},$$

on remplacera la fraction proposée par une autre qui, pour $x=a$, se réduira à $\frac{0}{0}$, ce qui nous ramènera au cas précédent.

Exemple. $\dfrac{\sec\frac{\pi x}{2a}}{\operatorname{tang}\frac{3\pi x}{2a}}=\frac{\infty}{\infty}$ *pour* $x=a$.

Je remplace ici $\sec\frac{\pi x}{2a}$ et $\operatorname{tang}\frac{3\pi x}{2a}$ par leurs valeurs $\dfrac{1}{\cos\frac{\pi x}{2a}}$ et $\dfrac{\sin\frac{3\pi x}{2a}}{\cos\frac{3\pi x}{2a}}$, et la fraction proposée reviendra ainsi à $\dfrac{\cos\frac{3\pi x}{2a}}{\sin\frac{3\pi x}{2a}\cos\frac{\pi x}{2a}}$,

fraction qui se réduit à $\frac{0}{0}$ pour $x=a$. Je pose donc $x=a+h$; ce qui donne

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi h}{2a}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi h}{2a}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{2a}\right)}=\frac{\sin\frac{3\pi h}{2a}}{\cos\frac{3\pi h}{2a}\sin\frac{\pi h}{2a}}=\frac{\frac{3\pi h}{2a}\cdot\frac{\sin\frac{3\pi h}{2a}}{\frac{3\pi h}{2a}}}{\frac{\pi h}{2a}\cos\frac{3\pi h}{2a}\cdot\frac{\sin\frac{\pi h}{2a}}{\frac{\pi h}{2a}}},$$

en faisant $h=0$, on trouvera que cette quantité se réduit à $\frac{3\pi}{2a}:\frac{\pi}{2a}=3$.

511. Des deux facteurs d'un produit $\varphi(x).\psi(x)$, l'un peut se réduire à zéro et l'autre à l'infini : alors sa véritable valeur sera la même que celle du rapport $\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}$, qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, en supposant que ce soit $\varphi(x)$ qui, pour $x=a$, s'est réduit à zéro.

Exemple. $(1-x)\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2}=0.\infty$ *pour* $x=1$.

$$(1-x)\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2}=\frac{1-x}{\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{\pi x}{2}}}=\frac{(1-x)}{\cot\frac{\pi x}{2}}=\frac{0}{0}\text{ pour } x=1.$$

Je pose donc $x=1+h$, et il vient

$$\frac{1-x}{\cot\frac{\pi x}{2}}=\frac{-h}{\cot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi h}{2}\right)}=\frac{h}{\operatorname{tang}\frac{\pi h}{2}}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\frac{\pi h}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\pi h}{2}}=\frac{2}{\pi}\text{ pour } h=0.$$

512. Si la différence de deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ se réduit à $\infty-\infty$, on pourra mettre cette différence sous la forme

$$\varphi(x)-\psi(x)=\frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{\psi(x)}}=\frac{\frac{1}{\psi(x)}-\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)\,\psi(x)}},$$

et ainsi elle se réduira à $\frac{0}{0}$.

513. EXEMPLE I. *La différence* $x - \sqrt{x^2 - 2ax - a^2}$ *devient* $\infty - \infty$ *pour* $x = \infty$: *quelle est sa véritable valeur?*

Je multiplie et je divise cette différence par $x + \sqrt{x^2 - 2ax - a^2}$, ce qui donne (51, 3°)

$$\frac{2ax + a^2}{x + \sqrt{x^2 - 2ax - a^2}}.$$

Maintenant, pour avoir la limite vers laquelle converge cette fraction, quand x tend vers l'infini, je la traiterai d'après la règle du n° 149, ce qui donnera

$$\frac{2a + \frac{a^2}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2a}{x} - \frac{a^2}{x^2}}},$$

puis, en supposant $x = \infty$, je trouverai que cette limite est a.

II. $\sec\frac{3\pi x}{2} - \operatorname{tang}\frac{\pi x}{2}$ *se réduit à* $\infty - \infty$ *pour* $x = 1$.

Je transforme cette différence dans l'expression

$$\frac{1}{\cos\frac{3\pi x}{2}} - \frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}} = \frac{\cos\frac{\pi x}{2} - \sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{3\pi x}{2}}{\cos\frac{3\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}},$$

laquelle se réduit à $\frac{0}{0}$ pour $x = 1$. En conséquence, on traitera cette fraction d'après la méthode du n° 509, exemple V, et on trouvera que sa véritable valeur, c'est-à-dire celle de la différence $\sec\frac{3\pi x}{2} - \operatorname{tang}\frac{\pi x}{2}$ est ∞.

CHAPITRE XV.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS.

---

314. ***Résoudre* ALGÉBRIQUEMENT *une équation à une seule inconnue, c'est trouver une formule au moyen de laquelle on puisse déterminer, en fonction de ses coefficients, toutes les quantités qui, substituées dans cette équation, à la place de l'inconnue, rendent ses deux membres identiques.*** Jusqu'à présent on n'a pu trouver cette formule que pour les équations des quatre premiers degrés, et encore celles qui sont relatives aux équations du troisième et du quatrième sont tellement compliquées, que l'on n'en fait presque jamais usage; et cependant il arrive souvent que l'on a besoin de résoudre une équation d'un degré supérieur au second. Il a donc fallu ***chercher des méthodes à l'aide desquelles on pût calculer directement toutes les valeurs numériques de l'inconnue d'une équation, pour tel ou tel système désigné de valeurs particulières des coéfficients de ses différents termes. Tel est l'objet de la* RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.**

Ainsi, si nous considérons les deux équations

$$x^2-2ax+b=0, \quad \text{et} \quad x^5-2ax+b=0,$$

on tirera de la première

$$x=a\pm\sqrt{a^2-b};$$

et, au moyen de cette formule, on résoudra toutes les équations du second degré correspondantes à tous les couples de valeurs que l'on pourra assigner à a et à b, sans qu'il soit jamais besoin de répéter les raisonnements qui ont conduit à la formule, et seulement en y remplaçant a et b par leurs valeurs numériques. Mais il n'en sera pas de même de la deuxième, parce que, dans l'état actuel de l'algèbre, on ignore la loi suivant laquelle la valeur de x dépend de celles de a et de b. Or, si l'on donne des

valeurs numériques à ces deux coefficients, on pourra bien, à l'aide des méthodes que nous enseignerons, en traitant de la résolution des équations numériques, trouver toutes les valeurs de x, mais non-seulement il faudra faire un calcul particulier pour chaque racine, mais encore il faudra recommencer tous les calculs, lorsqu'on donnera d'autres valeurs à a et à b. On voit ainsi qu'il y a une grande différence entre la résolution *algébrique* des équations et leur résolution *numérique*. Néanmoins l'une et l'autre sont fondées sur un certain nombre de théorèmes dont l'ensemble constitue ce qu'on appelle la *théorie générale des équations*.

515. Nous ne nous occuperons, dans tout ce qui va suivre, que d'*équations algébriques*, c'est-à-dire d'équations dans lesquelles l'inconnue n'entre ni comme exposant, ni sous aucun des signes *log*, *sin*, *cos*, *tang*, etc. Si l'inconnue se trouvait en dénominateur dans quelques termes, on commencerait par faire évanouir les dénominateurs, et s'il y avait des termes où l'inconnue fût placée sous un radical, on rendrait l'équation rationnelle, comme nous le verrons plus loin (chap. XVI, § II).

Nous supposerons, en outre, que l'on ait transposé tous les termes de l'équation dans le premier membre, ce qui rendra le deuxième nul; ordonné ensuite ce premier membre par rapport aux puissances décroissantes de l'inconnue x, et dégagé le premier terme de son coefficient. L'équation proposée sera ainsi ramenée à la forme

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + Tx + U = 0,$$

dans laquelle les lettres A, B, C,... T, U représentent des quantités quelconques, et où m désigne un nombre entier positif.

Si l'équation renferme toutes les puissances de x depuis la m^{me} jusqu'à la puissance *zéro*, elle sera *complète;* sinon elle sera *incomplète*. Mais on pourra la rendre complète, en y introduisant les puissances de x qui manquent, en leur donnant *zéro* pour coefficient. Ainsi, au lieu de l'équation

$$x^3 - 2ax + b = 0,$$

on pourra écrire

$$x^5+0.x^4+0.x^3+0.x^2-2ax+b=0.$$

*516. THÉORÈME I. *Une équation de degré quelconque, à coefficients réels ou imaginaires de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, a toujours au moins une racine réelle ou imaginaire de cette forme* *.

Nous commencerons par démontrer la vérité de ce théorème pour les équations binomes

$$x^m \pm 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^m \pm \sqrt{-1} = 0.$$

On voit d'abord que, quel que soit m, l'équation $x^m-1=0$ sera vérifiée par $x=1$.

Si m est impair, l'équation $x^m+1=0$ le sera par $x=-1$.

Maintenant supposons que m soit un nombre pair, il sera de la forme $m=2^n.p$, p étant un nombre impair; mais $x^{2^n.p}=(x^{2^n})^p$; si donc on peut trouver une valeur de x, réelle ou imaginaire, qui satisfasse à l'équation

$$x^{2^n}=-1,$$

cette valeur de x vérifiera nécessairement

$$(x^{2^n})^p=-1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x^m+1=0.$$

Or, on tire de l'équation $x^{2^n}=-1$, $x=\sqrt[2^n]{-1}$, et on sait (*Arithm.*, **214**) que pour extraire d'une quantité quelconque une racine du degré 2^n, il n'y a qu'à extraire de cette quantité n racines carrées successives; mais la première racine sera $\pm\sqrt{-1}$; et comme la racine carrée d'une expression de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ est aussi de cette forme (**284**), on en conclura qu'il en sera de même pour la racine du degré 2^n de -1; donc, lorsque m est un nombre pair, l'équation $x^m+1=0$ a une racine de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$.

Considérons maintenant l'équation

$$x^m+\sqrt{-1}=0.$$

* C'est à M. *Cauchy* qu'est due l'ingénieuse démonstration de ce théorème.

Si m est un nombre impair, il sera de la forme $4n+1$ ou de la forme $4n+3$; mais nous avons vu (286) que

$$(-\sqrt{-1})^{4n+1}=-\sqrt{-1},\quad (+\sqrt{-1})^{4n+3}=-\sqrt{-1},$$

donc, on satisfera à la proposée en faisant $x=-\sqrt{-1}$ ou $x=+\sqrt{-1}$, suivant que m sera égal à $4n+1$ ou à $4n+3$.

Si m est un nombre pair, on pourra poser $m=2^n.p$, p étant impair; et, en raisonnant comme plus haut, on verra que l'équation $x^m+\sqrt{-1}=0$ aura une racine telle que $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, si on peut trouver pour x une valeur de la même forme qui vérifie l'équation

$$x^{2^n}=-\sqrt{-1}\quad \text{ou}\quad =+\sqrt{-1},$$

selon que p sera égal à $4n+1$ ou à $4n+3$. Mais les racines carrées successives de $\pm\sqrt{-1}$ sont de cette forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$; donc il en est aussi de même de la racine du degré 2^n de $\pm\sqrt{-1}$.

On démontrera, de la même manière, que l'équation $x^m-\sqrt{-1}=0$ a une racine de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$.

Soit maintenant l'équation générale

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+\ldots+Tx+U=0,$$

dans laquelle A, B, C,... T, U sont des quantités réelles ou imaginaires. Je dis que l'on pourra toujours assigner à y et à z des valeurs réelles, telles que $y+z\sqrt{-1}$ soit une racine de cette équation que, pour abréger, nous représenterons par $\varphi(x)=0$.

La condition nécessaire et suffisante pour que $y+z\sqrt{-1}$ soit une racine de cette équation est

$$\varphi(y+z\sqrt{-1})=0,$$

ou, en développant et représentant par U la partie réelle et par $V\sqrt{-1}$ la partie imaginaire,

$$U+V\sqrt{-1}=0.$$

Mais, pour qu'une expression imaginaire soit nulle, il faut et il suffit que son module le soit; par conséquent la question est

ramenée à démontrer qu'il existe au moins un couple de valeurs réelles de y et de z qui vérifient l'équation

$$\sqrt{U^2+V^2}=0.$$

Pour y parvenir, nous prouverons d'abord que cette fonction de y et de z a un minimum qui répond à des valeurs finies de ces variables, et ensuite que ce minimum est zéro.

Je mets x^m en facteur commun de tous les termes du premier membre de l'équation proposée ; ce qui donne

$$\varphi(x)=x^m\left\{1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\ldots+\frac{T}{x^{m-1}}+\frac{U}{x^m}\right\},$$

puis, je remplace x par $y+z\sqrt{-1}$, et il vient

$$U+V\sqrt{-1}=(y+z\sqrt{-1})^m\left\{1+\frac{A}{y+z\sqrt{-1}}+\frac{B}{(y+z\sqrt{-1})^2}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{U}{(y+z\sqrt{-1})^m}\right\}.$$

Soit $\dfrac{N}{(y+z\sqrt{-1})^n}$ le terme général de l'expression qui est comprise dans les accolades, et supposons que $N=p+q\sqrt{-1}$; comme le module du quotient d'une division est égal au module du dividende divisé par celui du diviseur (**291**), le module de ce terme général sera, en vertu de ce principe et de celui du n° **290**,

$$\sqrt{\frac{p^2+q^2}{(y^2+z^2)^n}}\,;$$

mais ce terme général peut être mis sous la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ (**284**), donc

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{\frac{p^2+q^2}{(y^2+z^2)^n}}\,;$$

d'où l'on voit que, si l'on fait croître au delà de toute limite, l'une des quantités y et z ou toutes les deux à la fois, ce module $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ décroîtra indéfiniment, et par conséquent α et β décroîtront aussi indéfiniment; comme on en dira autant de tous les termes

du polynome compris dans les accolades, à l'exception du premier, on voit que ce polynome se réduira à une quantité de la forme

$$1+a+b\sqrt{-1},$$

dans laquelle a et b pourront être rendues moindres que toute grandeur assignable, puisque ce sont des sommes de quantités qui décroissent toutes indéfiniment, lorsque l'une des quantités y et z, ou que toutes les deux croissent au delà de toute limite. On aura ainsi

$$\mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1}=(y+z\sqrt{-1})^m.(1+a+b\sqrt{-1}).$$

Mais le module d'un produit de plusieurs facteurs est égal au produit des modules de ces facteurs, donc

$$\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{V}^2}=\sqrt{(y^2+z^2)^m}.\sqrt{(1+a)^2+b^2}.$$

Or, lorsque l'une des quantités y et z ou toutes les deux croîtront indéfiniment, le facteur $\sqrt{(y^2+z^2)^m}$ augmentera au delà de toute limite; le facteur $\sqrt{(1+a)^2+b^2}$ tendra vers l'unité; donc $\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{V}^2}$ tendra vers l'infini; et il n'atteindra cette limite que quand l'une au moins des quantités y et z deviendra infinie; car, pour toute autre valeur de ces variables $\sqrt{(y^2+z^2)^m}$ ne sera pas infini, et $\sqrt{(1+a)^2+b^2}$ est toujours une quantité finie.

Ainsi la fonction $\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{V}^2}$ qui est toujours positive et qui peut croître indéfiniment avec y et z, a nécessairement un ou plusieurs *minimums* *; or je dis que l'un de ces minimums est *zéro*. Nous le démontrerons en prouvant que, si $y+z\sqrt{-1}$ est une valeur de x qui ne rend pas $\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{V}^2}$ égale à zéro, on pourra

* En effet, si l'on pose $x=+\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{V}^2}$, et qu'on regarde x, y, z comme les trois coordonnées d'un même point, cette équation représentera une surface située tout entière au-dessus du plan des yz, que nous supposerons horizontal, et qui s'étend indéfiniment au-dessus de ce plan. Elle a donc, soit sur ce plan, soit au-dessus de ce plan, des limites qu'elle ne peut dépasser; or, les ordonnées de ces points-limites sont évidemment les minimums de $+\sqrt{\mathrm{U}^2+\mathrm{V}^2}$.

toujours assigner à x une autre valeur de la même forme qui, substituée dans $\varphi(x)$, donnera un résultat dont le module sera plus petit que $\sqrt{U^2+V^2}$.

Posons, en effet, $x=y+z\sqrt{-1}+\varepsilon t$, ε étant une quantité susceptible de devenir moindre que toute grandeur assignable, et t une indéterminée dont nous disposerons comme nous le jugerons convenable. Pour effectuer la substitution de cette valeur de x dans le premier membre de l'équation proposée, nous y changerons d'abord x en $x+h$, ce qui donnera (482)

$$\varphi(x)+\varphi'(x)h+\frac{\varphi''(x)}{1.2}h^2+\frac{\varphi'''(x)}{1.2.3}h^3+\ldots+h^m,$$

puis nous remplacerons dans cette formule x par $y+z\sqrt{-1}$ et h par εt. Le terme $\varphi(x)$ deviendra, comme nous l'avons supposé plus haut, $U+V\sqrt{-1}$, et une ou plusieurs des dérivées de $\varphi(x)$ pourront devenir nulles. Supposons que $\varphi^n(x)$ soit la première dérivée qui ne s'anéantisse pas par la substitution de $y+z\sqrt{-1}$ à la place de x, et désignons par $R+S\sqrt{-1}$ la valeur que prend alors le quotient de cette dérivée par $1.2.3\ldots n$: on trouvera, en représentant d'ailleurs par $U'+V'\sqrt{-1}$ ce que devient $\varphi(x)$, pour $x=y+z\sqrt{-1}+\varepsilon t$,

$$U'+V'\sqrt{-1}=U+V\sqrt{-1}+(R+S\sqrt{-1})\varepsilon^n t^n+G\varepsilon^{n+1}t^{n+1},$$

en désignant, pour abréger, par $G\varepsilon^{n+1}t^{n+1}$ la somme de tous les termes où εt entre à une puissance supérieure à la n^{me}.

t étant indéterminée, on pourra lui donner, comme nous l'avons dit plus haut, une valeur de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, telle que $t^n=\pm1$, et si l'on sépare en même temps les parties réelles et les parties imaginaires, on trouvera

$$U'=U\pm R\varepsilon^n+G'\varepsilon^{n+1},$$
$$V'=V\pm S\varepsilon^n+G''\varepsilon^{n+1};$$

d'où l'on tirera facilement

$$U'^2+V'^2=U^2+V^2\pm2(UR+VS)\varepsilon^n+K\varepsilon^{n+1},$$

ou bien

$$U'^2+V'^2=U^2+V^2+\{\pm2(UR+VS)+K\varepsilon\}\varepsilon^n.$$

Or, il est évident que le terme $K\varepsilon$ tend vers zéro en même temps que ε, et qu'ainsi on peut assigner à ε une valeur assez petite pour que celle de la quantité comprise dans les accolades ait le signe même de son premier terme $\pm 2(UR+VS)$; donc, en prenant celui des deux signes $+$ et $-$ qui sera contraire à celui du binome $UR+VS$, ce qui revient à poser $t^n=+1$ ou $t^n=-1$, on aura

$$U'^2+V'^2<U^2+V^2, \quad \text{ou} \quad \sqrt{U'^2+V'^2}<\sqrt{U^2+V^2},$$

ce que nous voulions prouver.

Si $UR+VS=0$, nous recommencerons le même calcul, en posant $t^n=\pm\sqrt{-1}$, ce qui donnera

$$U'=U\mp S\varepsilon^n+G_1\varepsilon^{n+1},$$
$$V'=V\pm R\varepsilon^n+G_2\varepsilon^{n+1},$$

d'où

$$U'^2+V'^2=U^2+V^2\mp 2(US-VR)\varepsilon^n+K_1\varepsilon^{n+1},$$

et on conclura comme tout à l'heure qu'on pourra prendre ε assez petit pour que la somme de tous les termes qui suivent U^2+V^2 soit négative, en posant $t^n=+\sqrt{-1}$ ou $t^n=-\sqrt{-1}$ suivant que $US-VR$ sera négatif ou positif; donc encore

$$\sqrt{U'^2+V'^2}<\sqrt{U^2+V^2}.$$

Il est d'ailleurs facile de voir que l'on n'a pas $US-VR=0$; car, puisqu'on suppose $UR+VS=0$, il en résulterait

$$(UR+VS)^2+(US-VR)^2=0,$$

ou bien

$$U^2R^2+V^2S^2+U^2S^2+V^2R^2=(U^2+V^2)(R^2+S^2)=0,$$

ce qui exige que l'on ait à la fois

$$U=0 \quad \text{et} \quad V=0,$$

et alors le théorème serait démontré; ou

$$R=0 \quad \text{et} \quad S=0,$$

et alors $\varphi^n(y+z\sqrt{-1})$ serait nulle, et nous avons supposé le contraire.

Concluons donc que quand, pour une certaine valeur $y+z\sqrt{-1}$ de x, le module $\sqrt{U^2+V^2}$ n'est pas nul, on peut assigner à x une valeur de la même forme qui soit telle que le module correspondant de $\varphi(x)$ soit moindre que $\sqrt{U^2+V^2}$; donc la valeur minimum de ce module est zéro, et par conséquent la valeur de x à laquelle répond ce minimum est racine de l'équation proposée $\varphi(x)=0$. Notre théorème est donc démontré.

517. Théorème II. *Si* a *est une racine de l'équation*

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+Tx+U=0,$$

le premier membre de cette équation est divisible par le binome $x-a$, *formé en retranchant cette racine de l'inconnue.*

En effet, le reste de la division du premier membre de notre équation par $(x-a)$ est

$$a^m+Aa^{m-1}+Ba^{m-2}+\ldots+Ta+U,$$

et ce reste est nul par hypothèse.

Scolie. Ce théorème est applicable seulement aux équations algébriques, rationnelles et entières par rapport à x, car celui du n° **66**, sur lequel nous nous sommes appuyés, n'est vrai que pour de pareilles fonctions de x. Ainsi $x=64$ est une racine de l'équation $x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}-2=0$, et cependant son premier membre n'est pas divisible par $x-64$.

518. Théorème III. *Une équation a autant de racines qu'il y a d'unités dans l'exposant de son degré.*

Représentons, en effet, l'équation proposée par

$$X_m=0,$$

l'indice m désignant son degré. Soit a_1 une racine de cette équation (**516**), son premier membre sera divisible par $x-a_1$ (**71**, 1°), et le quotient de cette division sera un polynome du degré $(m-1)$, que je représenterai par X_{m-1}, de sorte que

$$X_m=(x-a_1)X_{m-1}.$$

Mais, si l'on pose l'équation $X_{m-1}=0$, cette équation aura au-

moins une racine que je désignerai par a_2, et on verra, comme précédemment, que

$$X_{m-1}=(x-a_2)X_{m-2};$$

par conséquent

$$X_m=(x-a_1)(x-a_2)X_{m-2}.$$

Posons $X_{m-2}=0$, et soit a_3 une racine de cette équation, on aura

$$X_{m-2}=(x-a_3)X_{m-3},$$

et par conséquent

$$X_m=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)X_{m-3}.$$

Or, nous voyons qu'à la première division nous avons mis en évidence un facteur du premier degré et un quotient du $(m-1)^{me}$; à la deuxième, un deuxième facteur du premier degré et un quotient du $(m-2)^{me}$; à la troisième, un troisième facteur du premier degré et un quotient du $(m-3)^{me}$; donc, à la $(m-1)^{me}$ division, nous aurons mis en évidence $(m-1)$ facteurs du premier degré, et un quotient du $\{m-(m-1)\}^{me}$ degré, c'est-à-dire du premier; donc

$$X_m=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_m).$$

L'équation proposée aura donc pour racines les m quantités a_1, a_2, a_3,...a_m, puisque, pour chacune de ces valeurs de x, son premier membre X_m deviendra nul.

Elle n'en aura pas davantage, car le produit

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_m)$$

ne saurait s'évanouir si l'un de ses facteurs n'est pas nul, et le facteur $x-a_3$, par exemple, ne devient nul que pour $x=a_3$.

On peut dire encore que si $x=\alpha$ était une racine de $X_m=0$, différente des quantités a_1, a_2, a_3,...a_m, il faudrait que le polynome X_m fût divisible par $(x-\alpha)$, ce qui est impossible, puisqu'il ne peut être décomposé que dans un seul système de facteurs premiers (**120**).

319. COROLLAIRE I. *Le premier membre d'une équation du degré* m *est le produit de* m *facteurs du premier degré formés en retranchant chaque racine de l'inconnue*.*

---

* C'est là un caractère propre aux fonctions algébriques, rationnelles et entières d'une seule variable, de pouvoir être toujours décomposées en facteurs du premier degré. En effet, nous allons démontrer qu'*une pareille fonction de deux variables* x *et* y *ne saurait être décomposée en facteurs du premier degré, à moins que l'on n'établisse certaines relations entre les coefficients de ses différents termes.*

Considérons donc une fonction *complète* de deux variables x et y, du degré m. Elle devra contenir tous les termes du degré m, tant en x qu'en y; tous ceux des degrés respectifs $(m-1)$, $(m-2)$, ...3, 2, 1 et 0; donc, en l'ordonnant par rapport à x, elle pourra être mise sous la forme

$$\begin{array}{l|l|l|l} x^m + a_1 y & x^{m-1} + a_2 y^2 & x^{m-2} + a_3 y^3 & x^{m-3} + \ldots\ldots + a_m y^m \\ \quad + b_1 & \quad + b_2 y & \quad + b_3 y^2 & \qquad\qquad + b_m y^{m-1} \\ & \quad + c_2 & \quad + c_3 y & \qquad\qquad + c_m y^{m-2} \\ & & \quad + d_3 & \qquad\qquad \vdots \\ & & & \qquad\qquad + s_m y \\ & & & \qquad\qquad + t_m \end{array}$$

Ainsi le nombre des constantes qui entrent dans cette fonction est

$$2+3+4+\ldots+(m+1) = \frac{m(m+3)}{2} \text{ (365).}$$

Cela posé, si cette fonction est le produit de deux facteurs rationnels fonction de x et de y, il faut que le nombre des constantes contenues dans ces deux facteurs soit $\frac{m(m+3)}{2}$. Soit donc n le degré du premier, celui du second sera $(m-n)$; et par conséquent le nombre des constantes de l'un sera $\frac{n(n+3)}{2}$, et celui des constantes de l'autre sera $\frac{(m-n)(m-n+3)}{2}$; donc on doit avoir l'égalité

$$\frac{m(m+3)}{2} = \frac{n(n+3)}{2} + \frac{(m-n)(m-n+3)}{2},$$

ou, en réduisant,

$$0 = n(n-m),$$

équation absurde, puisque $n < m$. Donc, etc. Cette démonstration a été donnée par M. *A. Comte*, dans le premier volume de son *Cours de philosophie positive.*

Si nous appliquons cette démonstration aux fonctions d'une seule variable, la condition qu'elle exige sera toujours remplie, car le nombre des constantes d'une pareille fonction est m; une fonction du degré n en ren-

Donc, *pour composer une équation qui ait pour racines des nombres donnés, il faudra égaler à zéro le produit des facteurs formés en retranchant chacun de ces nombres de* x. On verra ainsi que l'équation qui a 2, 3 et — 1 pour racines, est

$$(x-2)(x-3)(x+1)=x^3-4x^2+x+6=0.$$

320. *Une équation de degré quelconque, à coefficients rationnels, peut donc avoir des racines réelles ou imaginaires, commensurables ou incommensurables.* Ainsi l'équation

$$(x-1)(x^2+x-1)(x^2-x+1)=x^5-x^4-x^3+3x^2-3x+1=0$$

a une racine commensurable $+1$, deux racines incommensurables $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ et deux racines imaginaires $\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$.

321. Corollaire II. *Il n'y a de facteurs premiers fonction de* x *que ceux qui sont du premier degré par rapport à cette quantité.*

322. Scolie. Le théorème III semble souffrir une exception lorsque, parmi les facteurs premiers dans lesquels son premier membre est décomposable, il s'en trouve d'égaux. Si l'on avait, par exemple, l'équation

$$(x-a)^4(x-b)^3(x-c)(x-d)=0,$$

il semblerait que cette équation n'a que *quatre* racines, quoiqu'elle soit du neuvième degré. Elle n'a en effet que quatre racines *distinctes;* mais, comme elle est satisfaite par toute valeur de x qui anéantit l'un des facteurs de son premier membre, et qu'il y a dans ce premier membre quatre facteurs égaux à $(x-a)$, on dit qu'*elle a* QUATRE *racines égales à* a; elle en a de même

terme n, et une fonction du degré $(m-n)$ en contient $(m-n)$; or, on a identiquement $m=n+(m-n)$.

On peut démontrer le théorème dont il s'agit très-simplement, en s'aidant de considérations géométriques. En effet, si une fonction de deux variables x et y pouvait toujours se décomposer en facteurs rationnels du premier degré, l'équation formée, en l'égalant à zéro, représenterait toujours un système de lignes droites, et jamais une ligne courbe.

TROIS *égales à* b, et comme elle a encore les DEUX racines c et d, elle se trouve avoir effectivement *neuf* racines, ainsi que l'indiquait l'exposant de son degré.

Désormais, *lorsque nous dirons qu'une équation a* n *racines égales à* a, *nous entendrons par là que son premier membre sera divisible par* $(x-a)^n$.

323. Nous pouvons actuellement démontrer un principe que nous avons déjà eu occasion de citer, savoir qu'*une racine a autant de valeurs qu'il y a d'unités dans son indice.* Supposons, en effet, que l'on demande la racine m^{me} d'une quantité quelconque A, et représentons cette racine inconnue par x; nous aurons

$$x^m = A, \quad \text{ou} \quad x^m - A = 0.$$

Or, résoudre cette équation, c'est trouver toutes les quantités qui, élevées à la puissance m, reproduisent A; donc les racines de cette équation sont toutes les racines m^{mes} de A; donc, puisqu'elle a m racines, $\sqrt[m]{A}$ a m valeurs.

Si l'on représente par a la *détermination arithmétique de la racine* m^{me} *de* A, c'est-à-dire la quantité que l'on trouve en extrayant la racine m^{me} de A, d'après les procédés indiqués aux n^{os} **307**, **295** et **360**, suivant que A sera un nombre, un monome ou un polynome, on pourra poser $x = ay$, et alors l'équation

$$x^m - A = 0, \quad \text{se réduira à} \quad y^m - 1 = 0,$$

car $a^m = A$. Or, les racines de cette équation sont les m racines m^{mes} de l'unité, donc *pour obtenir toutes les valeurs de* $\sqrt[m]{A}$, *il faut multiplier sa détermination arithmétique par les* m *racines* m^{mes} *de l'unité.*

324. THÉORÈME IV. *Le premier membre de toute équation dont les coefficients sont réels est toujours décomposable en facteurs réels du premier et du second degré, de sorte que les racines imaginaires sont conjuguées deux à deux.*

Si toutes les racines sont réelles, la chose est évidente (**319**).

Supposons donc qu'il y ait des racines imaginaires et que $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ soit une de ces racines.

Il est évident que cette quantité sera aussi racine de l'équation du deuxième degré $(x-\alpha)^2+\beta^2=0$. Cela posé, effectuez la division du premier membre de la proposée, que je représente par $\varphi(x)=0$, par $(x-\alpha)^2+\beta^2$, jusqu'à ce que vous soyez arrivé à un reste du premier degré par rapport à x; soient $Mx+N$ ce reste, et Q le quotient, vous aurez

$$\varphi(x)=Q\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}+Mx+N.$$

Cette équation étant vraie quelle que soit x, on peut y faire $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, et elle se réduira alors à

$$0=(M\alpha+N)+M\beta\sqrt{-1},$$

ce qui exige que l'on ait à la fois (289)

$$M\alpha+N=0 \quad \text{et} \quad M\beta=0;$$

et comme β n'est pas nul, il faut que

$$M=0 \quad \text{et partant que} \quad N=0.$$

$\varphi(x)$ est donc divisible par $(x-\alpha)^2+\beta^2$, ce qui démontre notre théorème, et prouve en même temps que les deux racines $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$ de l'équation $(x-\alpha)^2+\beta^2=0$ appartiennent à la proposée et qu'ainsi *ses racines imaginaires sont conjuguées deux à deux.*

323. Nous avons établi que le premier membre de toute équation du degré m est le produit de m facteurs du premier degré formés en retranchant chaque racine de l'inconnue (319); par conséquent on peut assimiler ce premier membre au produit de m binomes qui ont tous un même premier terme x, et dont les seconds termes sont les différentes racines de la proposée, *prises en signes contraires.* Il suit de là et de la composition d'un pareil produit (330) que *le coefficient du terme qui en a* n *avant lui est la somme de tous les produits distincts que l'on peut former en multipliant* n *à* n *les racines prises en signes contraires;* mais si n est pair, ces produits, et par conséquent leur somme, ne changeront pas en prenant les racines avec

leurs signes; tandis que, au contraire, si n est impair, ces produits et leur somme changeront alors de signes. Nous pouvons donc établir la proposition suivante :

THÉORÈME V. *Dans toute équation complète, le coefficient du deuxième terme, pris en signe contraire, est égal à la somme des racines;*

Le coefficient du troisième terme est égal à la somme des produits distincts des racines multipliées deux à deux;

Le coefficient du quatrième terme, pris en signe contraire, est égal à la somme des produits différents des racines multipliées trois à trois; et ainsi de suite, en ayant le soin de changer les signes des coefficients des termes de rang pair;

Enfin le dernier terme, pris avec son signe ou avec un signe contraire, suivant que l'équation est de degré pair ou de degré impair, est le produit de toutes les racines.

326. THÉORÈME VI. *Les* m *relations qui existent entre les coefficients d'une équation et ses* m *racines ne peuvent pas servir à déterminer ces racines.*

En effet, si entre les m équations qui expriment ces relations on élimine toutes les racines, à l'exception d'une seule, que j'appellerai a, on obtiendra une équation qui ne différera de la proposée qu'en ce que x y sera remplacée par a. En effet, comme a ne désigne pas une racine plutôt qu'une autre, l'équation, quelle qu'elle soit, qui déterminera la valeur de a, devra donner en même temps celles de toutes les autres racines b, c, $d \ldots k$; donc elle ne pourra pas être d'un degré inférieur à celui de la proposée. Elle ne sera pas non plus d'un degré plus elevé que m, car alors elle serait au moins du degré $2m$, d'après ce que nous venons de dire, et ainsi les équations qui expriment les relations qui existent entre les coefficients et les racines de la proposée, admettraient au moins deux systèmes de valeurs; si donc on désigne ce deuxième système de valeurs par a', b', $c' \ldots k'$, les deux produits

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)$$

et

$$(x-a')(x-b')(x-c')\ldots(x-k')$$

devraient être égaux, de sorte que la proposée admettrait $2m$ racines. Donc l'équation qui déterminera la racine a sera l'équation proposée elle-même.

C'est au reste ce que l'on peut vérifier en résolvant directement les équations dont il s'agit. Pour le faire plus facilement, je représenterai en général par A_n la somme des produits distincts, que l'on peut former en multipliant n à n les racines $b, c, d, \ldots k$; et en supposant d'ailleurs que

$$x^m + P_1x^{m-1} + P_2x^{m-2} + \ldots + P_{m-2}x^2 + P_{m-1}x + P_m = 0$$

soit l'équation proposée, les équations fournies par le théorème V seront

$$\begin{aligned} A_1 + a &= -P_1, \\ A_2 + A_1a &= +P_2, \\ A_3 + A_2a &= -P_3, \\ &\vdots \\ A_{m-2} + A_{m-3}a &= \pm P_{m-2}, \\ A_{m-1} + A_{m-2}a &= \mp P_{m-1}, \\ A_{m-1}a^* &= \pm P_m, \end{aligned}$$

en prenant les signes supérieurs si m est pair, et les signes inférieurs si m est impair.

Dans ces équations $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{m-1}$ sont des fonctions des racines $b, c, d, \ldots k$; par conséquent, si nous éliminons ces $(m-1)$ quantités entre elles, l'équation finale que nous obtiendrons ne renfermera plus que la seule inconnue a, et déterminera ainsi la valeur de cette racine. Pour opérer cette élimination, nous multiplierons la première équation par a^{m-1}, la deuxième par $-a^{m-2}$, la troisième par a^{m-3}, la quatrième par $-a^{m-4}$, la $(m-1)^{me}$ par $\pm a$, et la m^{me} par ∓ 1; puis nous ajouterons les équations-produits membre à membre. Nous

* Observez que la somme des produits distincts $(m-1)$ à $(m-1)$ des quantités $b, c, d, \ldots k$ est précisément leur produit $bcd\ldots k$.

trouverons de cette manière, toutes réductions faites et après avoir transposé,

$$a^m + P_1 a^{m-1} + P_2 a^{m-2} + P_3 a^{m-3} + \ldots + P_{m-1} a + P_m = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

327. Problème. *Partager un nombre donné* P_1 *en* m *parties telles que les sommes des produits différents que l'on peut former en les multipliant* 2 *à* 2, 3 *à* 3 ... (m — 1) *à* (m — 1) *soient des nombres donnés* P_2, P_3,... P_{m-1}, *et que leur produit soit égal à* P_m.

Il est évident que si l'on forme une équation du degré m qui ait $-P_1$ pour coefficient de son second terme, $+P_2$ pour coefficient du troisième, $-P_3$ pour coefficient du quatrième ... $\mp P_{m-1}$ pour coefficient du m^{me} terme, suivant que m sera pair ou impair, et $\pm P_m$ pour dernier terme, les racines de cette équation

$$x^m - P_1 x^{m-1} + P_2 x^{m-2} - P_3 x^{m-3} \ldots \mp P_{m-1} x \pm P_m = 0$$

résoudront la question proposée, car elle ne peut avoir qu'une solution, puisque les équations de ce problème seraient précisément les relations qui existent entre les coefficients et les racines de l'équation ci-dessus, et nous venons de démontrer que ces équations de relation ne pouvaient admettre qu'un seul système de valeurs.

328. Il suit du théorème V que *si les racines d'une équation sont toutes entières, les coefficients de cette équation*, qui sont des fonctions entières de ces racines, *seront entiers*.

La réciproque de cette proposition n'est pas vraie, car *une équation peut n'avoir que des coefficients entiers et ne pas avoir de racines entières*. Telle est l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$.

329. Théorème VII. *Si les coefficients d'une équation sont tous des nombres entiers, celui du premier terme étant toujours l'unité, cette équation ne pourra avoir pour racines commensurables que des nombres entiers.*

Soit

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Tx + U = 0$$

une équation dont les coefficients sont tous des nombres entiers; et supposons que la fraction *irréductible* $\frac{a}{b}$ puisse être une de ses racines : on aura l'identité

$$\frac{a^m}{b^m}+A\frac{a^{m-1}}{b^{m-1}}+B\frac{a^{m-2}}{b^{m-2}}+\ldots+T\frac{a}{b}+U=0,$$

d'où, en multipliant tous ses termes par b^{m-1}, et en isolant le premier dans le deuxième membre,

$$Aa^{m-1}+Bba^{m-2}+\ldots+Tb^{m-2}a+Ub^{m-1}=-\frac{a^m}{b}.$$

Or, cette égalité est impossible, car son premier membre est un nombre entier, tandis que le second est fractionnaire, puisque b, étant premier avec a, ne peut pas diviser a^m (*Arith.*, **85**). Donc aucune quantité fractionnaire ne peut vérifier l'équation proposée.

330. Corollaire. *Si, parmi les racines commensurables d'une équation, il y en a de fractionnaires, tous ses coefficients ne seront pas des nombres entiers.*

331. Il suit encore du théorème V que *quand une équation a toutes ses racines réelles et positives elle est complète, et son premier membre n'a que des variations* (**38**); au contraire, *elle n'aura que des permanences, si toutes ses racines sont réelles et négatives.*

332. Réciproquement 1° *lorsqu'une équation* complète* *n'a que des variations, toutes ses racines réelles sont positives;* car, si on substitue une quantité négative quelconque à la place de x, tous ses termes de degré impair changeront de signes, tandis que les autres conserveront ceux dont ils sont affectés. Le résultat sera donc une somme de quantités toutes de mêmes signes, et, par conséquent, ne pourra pas être nul.

2° *Si une équation* complète ou incomplète *n'a que des perma-*

---

* Cette restriction est nécessaire. Par exemple, l'équation incomplète $(x-1)(x-2)(x+3)=x^3-7x+6=0$ n'a que des variations et elle a une racine négative.

nences, elle ne peut avoir pour racines réelles que des quantités négatives, car la substitution de tout nombre positif, dans son premier membre, donnera une somme de quantités positives qui, en conséquence, ne pourra pas être égale à zéro.

Ces deux derniers principes ne sont qu'un cas particulier d'une proposition beaucoup plus générale, connue sous le nom de *règle des signes de* DESCARTES, du nom du grand géomètre qui l'a découverte. En voici l'énoncé :

333. THÉORÈME VIII. *Une équation complète ou incomplète ne peut pas avoir plus de racines positives qu'elle n'a de variations, ni plus de racines négatives qu'il ne se trouve de variations dans l'équation obtenue en y changeant* x *en* — x; *et si toutes ses racines sont réelles, elle a précisément autant de racines positives que de variations, et autant de racines négatives qu'il y a de variations dans sa transformée en* — x.

En effet, on peut toujours regarder le premier membre de l'équation proposée comme résultant de la multiplication du produit des facteurs du premier degré correspondants à ses racines positives par le quotient obtenu en le divisant par ce produit; d'après cela, il est clair que si l'on démontré qu'*en multipliant un polynome quelconque par un facteur* (x — a), *dans lequel* a *représente une quantité positive, le produit aura au moins une variation de plus que le multiplicande*, on devra en conclure qu'en multipliant le quotient, dont nous venons de parler, successivement par chacun des facteurs du premier degré correspondants aux racines positives de l'équation proposée, le premier membre de cette équation, que l'on retrouvera ainsi, renfermera au moins autant de variations qu'il y a de racines positives; de sorte que la première partie de la règle de *Descartes* sera ainsi démontrée.

Considérons donc un polynome ordonné suivant les puissances descendantes de l'inconnue x. Soit x^m son premier terme; $-Nx^n$ son premier terme négatif; $+Px^p$, le premier terme positif qui vient après; $-Qx^q$, le premier terme négatif qui le suit, etc. Soit enfin $\pm Tx^t$ le premier d'une série de termes qui,

jusqu'au dernier inclusivement, ont le même signe, et $\pm V$ ce dernier terme du polynome, qui sera ainsi :

$$x^m + \ldots - Nx^n - \ldots + Px^p + \ldots - Qx^q - \ldots \pm Tx^t \pm \ldots \pm V \quad [1].$$

Multiplions ce polynome par $(x-a)$, a étant une quantité positive. Il est clair que le premier terme du produit sera x^{m+1} (58); que le coefficient de x^{n+1} sera négatif, car il sera la somme de $-N$ et du produit par $-a$, du coefficient du terme précédent, lequel est positif (ce coefficient est zéro, s'il n'y a pas dans le multiplicande de terme en x^{n+1}). On verra de la même manière que les coefficients de x^{p+1}, x^{q+1},... x^{t+1} auront les mêmes signes que les coefficients respectifs de x^p, x^q,... x^t dans le polynome multiplicande. Quant au dernier terme, il sera $\mp Va$. Le produit sera donc de la forme

$$x^{m+1} \ldots - N'x^{n+1} \ldots + P'x^{p+1} \ldots - Q'x^{q+1} \ldots \pm T'x^{t+1} \ldots \mp Va \quad [2].$$

Quant aux termes intermédiaires sous-entendus, leurs signes dépendront des valeurs numériques des coefficients du polynome proposé et de celle de a. Mais, quels qu'ils soient, on voit que depuis le terme x^{m+1} jusqu'au terme $-N'x^{n+1}$ du produit, il y a au moins une variation, tandis qu'il n'y en a qu'une seule du premier terme x^m au terme $-Nx^n$ du multiplicande; que de même on trouve au moins une variation depuis le terme $-N'x^{n+1}$ jusqu'au terme $+P'x^{p+1}$ du produit, tandis qu'on en rencontre une seule dans le multiplicande depuis le terme $-Nx^n$ jusqu'au terme $+Px^p$, et ainsi de suite. Par conséquent, le produit présentera au moins autant de variations jusqu'au terme $\pm T'x^{t+1}$ qu'il y en a dans le multiplicande, jusqu'au terme $\pm Tx^t$. Or, de $\pm T'x^{t+1}$ à $\mp Va$, il y a au moins une variation, tandis qu'il n'y en a pas dans le multiplicande, depuis $\pm Tx^t$ jusqu'à $\pm V$; donc *le produit a nécessairement au moins une variation de plus que le multiplicande* *.

---

* *La différence entre le nombre des variations du produit et celui des variations du multiplicande est un nombre impair.* En effet, supposons, pour fixer les idées, que le dernier terme du multiplicande soit positif,

Donc *le premier membre d'une équation complète ou incomplète a au moins autant de variations que cette équation a de racines positives* *.

534. Je dis maintenant que *cette même équation ne peut pas avoir plus de racines négatives qu'il n'y a de variations dans l'équation que l'on obtient en y changeant* x *en* — x. En effet, les racines de cette transformée sont égales et de signes contraires à celles de la proposée, et par conséquent le nombre de ses variations sera au moins égal à celui des racines négatives de l'équation proposée.

535. Avant de démontrer la troisième partie de la règle des signes de *Descartes*, nous prouverons que *le nombre total des variations de la proposée* $\varphi(x) = 0$ *et de sa transformée* $\varphi(-x) = 0$ *ne peut pas surpasser l'exposant de leur degré.*

Considérons, en effet, deux termes consécutifs de rangs quelconques Qx^n et Rx^{n-p}. Il pourra se présenter deux cas, selon que p sera un nombre pair ou impair.

Si p est pair, n et $n-p$ seront deux nombres de même

---

auquel cas le dernier terme du produit sera négatif; comme on ne peut passer d'un signe + à un autre signe + que par un nombre pair de changements de signes, il y aura un nombre pair de variations dans le multiplicande, et partant un nombre impair de variations dans le produit; donc *ce dernier polynome a un nombre impair de variations de plus que l'autre.* Le raisonnement serait le même si le multiplicande était terminé par un terme négatif.

* On peut ajouter que *s'il en a davantage, il en a un nombre pair de plus.* Supposons, en effet, que l'on ait divisé le premier membre de l'équation proposée par le produit des facteurs du premier degré correspondants à ses racines positives. Il résulte des nos 524 et 525, que le dernier terme du quotient sera positif, de sorte que si ce quotient renferme des variations, il en contiendra un nombre pair. Or, pour chaque facteur correspondant à une racine positive par lequel on le multipliera, on augmentera le nombre de ses variations d'un nombre impair; de sorte que le premier membre de la proposée présentera un nombre pair ou impair de variations, selon que le nombre des racines positives sera pair ou impair. La différence entre le nombre de ces variations et celui de ces racines sera donc un nombre pair.

espèce, c'est-à-dire tous deux pairs ou tous deux impairs; de sorte que, quand on changera x en $-x$, ces termes conserveront leurs signes ou en changeront tous les deux; donc s'ils formaient une permanence ou une variation dans la proposée, ils formeront pareillement une permanence et une variation dans la transformée, et *ils fourniront ainsi zéro ou deux variations.*

Si p est impair, n et $n-p$ sont deux nombres d'espèces différentes, de sorte que quand on changera x en $-x$, l'un d'eux conservera son signe et l'autre en changera; donc s'ils formaient une permanence ou une variation dans la proposée, ils formeront une variation ou une permanence dans la transformée, et *ils fourniront ainsi une variation en tout.*

Or, p vaut au moins deux unités dans le premier cas, et une dans le second : d'où il suit que *le nombre des variations produites par deux termes consécutifs, tant dans la proposée que dans la transformée, ne peut pas surpasser la différence de leurs exposants.*

Cela posé, soit

$$x^m + Ax^{m-n} + Bx^{m-n-n'} + Cx^{m-n-n'-n''} + \ldots + U = 0$$

l'équation proposée; désignons par v, v', v'',... les nombres respectifs de variations fournies par le premier et le deuxième terme, le deuxième et le troisième, le troisième et le quatrième,... tant dans la proposée que dans sa transformée $\varphi(-x)=0$, on aura

$$v \not> n, \quad v' \not> n', \quad v'' \not> n'' \ldots;$$

donc

$$v + v' + v'' + \ldots \not> n + n' + n'' + \ldots = m,$$

car, c'est en retranchant successivement n, n', n''... de l'exposant m du premier terme qu'on est arrivé à l'exposant zéro du dernier.

536. Nous pouvons maintenant démontrer la troisième partie de la règle de Descartes. En effet, si toutes les racines sont réelles, leur nombre est égal à m; de sorte qu'en désignant

par p le nombre de ses racines positives et par n celui de ses racines négatives, on aura

$$p+n=m.$$

D'un autre côté, le nombre total $V+V'$ des variations de $\varphi(x)=0$ et de sa transformée $\varphi(-x)=0$ ne peut pas surpasser m; il ne saurait non plus être plus petit, en vertu des deux premières parties de la règle de *Descartes*, puisque toutes les racines sont réelles; donc

$$V+V'=m,$$

et partant

$$p+n=V+V'.$$

Or, V n'est pas moindre que p, comme nous l'avons démontré; il ne peut pas non plus surpasser p, sans quoi n serait plus grand que V', ce qui n'est pas; donc $p=V$ et $n=V'$; donc *quand une équation complète ou incomplète a toutes ses racines réelles, elle a autant de racines positives que de variations et autant de racines négatives qu'il y a de variations dans sa transformée en* $-x$.

537. *On peut, à l'aide de la règle des signes de* DESCARTES, *reconnaître qu'une équation a des racines imaginaires et trouver une limite inférieure du nombre de ces racines.* Désignons, en effet, par V le nombre total des variations de l'équation proposée et de sa transformée en $-x$: cette équation aura au plus V racines réelles; donc si $V<m$, elle a au moins $m-V$ racines imaginaires.

Si l'on considère, par exemple, l'équation $x^m-1=0$, on verra que si m est pair, elle présente ainsi que sa transformée $(-x)^m-1=0$ une variation, et qu'elle a en conséquence au moins $(m-2)$ racines imaginaires; mais $+1$ et -1 sont évidemment racines de cette équation; donc elle a $(m-2)$ racines imaginaires. Si m est impair, sa transformée n'a point de variation, et par conséquent elle a $(m-1)$ racines imaginaires.

538. *On peut même déterminer, à l'inspection seule d'une équation incomplète, une limite inférieure du nombre de ses racines imaginaires.*

Reprenons, en effet, l'équation

$$x^m + Ax^{m-n} + Bx^{m-n-n'} + Cx^{m-n-n'-n''} + \ldots = 0,$$

et désignons encore par v, v', v'',... les nombres respectifs de variations fournies par le premier et le deuxième terme, le deuxième et le troisième, le troisième et le quatrième,..., tant dans cette équation que dans sa transformée en $-x$; nous aurons

$$m = n + n' + n'' + \ldots, \quad \text{et} \quad V = v + v' + v'' + \ldots,$$

de sorte que

$$m - V = (n - v) + (n' - v') + (n'' - v'') + \ldots$$

Si toutes les différences $(n-v)$, $(n'-v')$, $(n''-v'')$... ne sont pas nulles, $m-V$ ne l'est pas non plus, car aucune de ces différences ne peut être négative (535), et l'équation a au moins autant de racines imaginaires *qu'il est marqué par la somme de celles de ces différences* $n-v$, $n'-v'$,... *qui ne sont pas égales à zéro.*

Cela posé, supposons qu'il manque un nombre impair $(2k+1)$ de termes entre deux termes de mêmes signes, de sorte que la différence de leurs exposants soit $n = 2k+2$. Dans ce cas, le nombre v des variations produites par ces deux termes dans l'équation proposée et dans sa transformée est égal à zéro (535); donc $n - v = 2k+2$; donc $(m-V)$ est au moins égal à $2k+2$; donc il y a au moins $2k+2$ racines imaginaires.

Si les deux termes entre lesquels il en manque $(2k+1)$ sont de signes contraires, $v=2$, et $n-v=2k$; donc alors il y a au moins $2k$ racines imaginaires.

Observons que si alors $k=0$, il *peut* ne pas y avoir de racines imaginaires; de sorte que *l'absence d'un terme entre deux autres qui sont affectés de signes contraires n'indique rien.* Ainsi l'équation $(x-1)(x-2)(x+3) = x^3 - 7x + 6 = 0$ n'a pas de racines imaginaires.

Supposons maintenant qu'il manque un nombre pair $2k$ de termes entre deux termes quelconques : alors $n = 2k+1$ et $v=1$;

donc $n-v=2k$, et il y a au moins $2k$ racines imaginaires, quels que soient les signes des deux termes.

Concluons de cette discussion 1° que *quand deux termes consécutifs sont de mêmes signes, l'équation a au moins autant de racines imaginaires qu'il y a d'unités dans le plus grand nombre pair contenu dans la différence de leurs exposants;*

2° Que *quand deux termes consécutifs sont de signes contraires, il y a au moins autant de racines imaginaires qu'il y a d'unités dans le plus grand nombre pair contenu dans la différence de leurs exposants, diminuée d'une unité;*

3° Que *s'il y a plusieurs lacunes de termes dans le premier membre d'une équation, cette équation a au moins le nombre total des racines imaginaires indiquées par chacune d'elles en particulier.*

Soit, par exemple, l'équation $x^m+1=0$. La différence des exposants de ses deux termes est m. En conséquence, si m est pair, toutes ses racines sont imaginaires; et si m est impair, elle a $(m-1)$ racines imaginaires, car il est évident que -1 la vérifie alors.

Prenons encore pour exemple l'équation

$$x^9-2x^6-x^5-x^3+2x+2=0.$$

Les deux premiers termes accusent l'existence de deux racines imaginaires au moins; il en est de même du deuxième et du troisième; donc cette équation a au moins quatre racines imaginaires.

Appliquez la règle à l'équation $x^{2m}+px^m+q=0$.

339. On peut encore reconnaître quelquefois qu'une équation a des racines imaginaires, lorsque les règles précédentes ne fournissent aucune indication. Pour cela, on multiplie le premier membre de l'équation proposée $\varphi(x)=0$ par $(x-a)$, et on profite de l'indétermination de a pour faire en sorte que le nombre des variations du produit surpasse de plus d'une unité celui des variations de $\varphi(x)$, ou que ce produit ait moins de variations que $\varphi(x)$; et, si la chose est possible, l'équation pro-

posée a des racines imaginaires. Car, si toutes les racines de $\varphi(x)=0$ étaient réelles, cette équation aurait autant de racines positives que de variations, et par conséquent la transformée $\varphi(x).(x-a)=0$, devrait avoir une seule variation de plus que la proposée, si a est positif, et autant de variations qu'elle, si a est négatif.

*540. M. *Sturm* a donné le moyen d'obtenir ainsi une limite inférieure du nombre des racines imaginaires. Supposons, en effet, qu'en donnant à a une valeur positive, on ait trouvé que l'équation $\varphi(x).(x-a)=0$ a k variations de plus que la proposée*, que nous supposerons être du degré m et avoir v variations. La transformée en $-x$ de cette équation aura donc au plus $m+1-v-k$ variations, de sorte que $\varphi(x)=0$ ne peut pas avoir plus de $m+1-v-k$ racines négatives, car ses racines négatives sont les mêmes que celles de $\varphi(x).(x-a)=0$. Mais elle a au plus v racines positives; donc elle a au moins $m-(m+1-v-k+v)=k-1$ racines imaginaires.

Si $a<0$, et que $\varphi(x).(x-a)=0$ ait k variations de moins que $\varphi(x)=0$, que nous supposons toujours en avoir v, cette transformée aura au plus $(v-k)$ racines positives, et il en sera de même de $\varphi(x)=0$. Mais $\varphi(-x)$ a au plus $(m-v)$ variations; donc le nombre des racines réelles de la proposée est au plus égal à $v-k+m-v=m-k$; donc elle a au moins k racines imaginaires.

Prenons pour exemple l'équation

$$x^5-x^4+x^3-x^2+x-1=0:$$

en multipliant son premier membre par $(x-a)$, on trouvera

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|l} x^6-1 & x^5+1 & x^4-1 & x^3+1 & x^2-1 & x+a=0, \\ -a & +a & -a & +a & -a & \end{array}$$

et on voit immédiatement qu'en posant $a=-1$ elle se réduit à

$$x^6-1=0,$$

équation qui a quatre variations de moins que la proposée; donc celle-ci a quatre racines imaginaires, car elle est vérifiée par $x=1$.

* Ce nombre k est impair, d'après la note de la page 424.

Prenons encore pour exemple l'équation

$$x^3+3x^2+12x+4=0.$$

En multipliant son premier membre par $(x-a)$, on trouvera

$$x^4\begin{array}{l|l|l|l}+3 & x^3+12 & x^2+\ 4 & x-4a=0.\\ -a & \ \ -3a & \ -12a & \end{array}$$

On voit qu'en donnant à a une valeur comprise entre $+3$ et $+4$, cette équation aura trois variations, tandis que la proposée n'en a aucune ; donc cette proposée a $(3-1)=2$ racines imaginaires (**324**).

341. On a longtemps énoncé la règle des signes de *Descartes* de la manière suivante : *Une équation n'a pas plus de racines positives qu'elle n'a de variations, ni plus de racines négatives qu'elle n'a de permanences, et si toutes ses racines sont réelles, elle a autant de racines positives que de variations et autant de racines négatives que de permanences.* Mais cet énoncé est inexact, car les deuxième et troisième parties de ce théorème ne sont pas vraies, si l'équation que l'on considère est incomplète, à moins que, dans ce cas, on n'ait eu soin de la compléter auparavant, en y rétablissant les termes qui manquent, en leur donnant le coefficient *zéro*, quel que soit d'ailleurs le signe dont on affecte ce coefficient.

Si la proposée est complète, ou si on l'a rendue telle, ainsi que nous venons de l'indiquer, on conçoit qu'en y changeant x en $-x$, on obtiendra une transformée qui aura autant de variations et de permanences que la proposée a de permanences et de variations ; car deux termes consécutifs étant l'un de degré pair et l'autre de degré impair, quand on y remplacera x par $-x$, l'un d'eux conservera son signe et l'autre en changera, de sorte que s'ils formaient une permanence ou une variation, ils formeront maintenant une variation et une permanence. Mais les racines positives de la transformée sont les racines négatives de la proposée ; donc *celle-ci n'a pas plus de racines négatives qu'elle n'a de permanences.*

Maintenant si l'équation étant complète, toutes ses racines

sont réelles, le nombre total $P+V$ des permanences et des variations de son premier membre sera égal au nombre total $p+n$ des racines positives et des racines négatives, puisqu'il y a toujours dans une équation complète autant de successions de signes que d'unités dans l'exposant de son degré, lequel est, dans notre hypothèse, égal au nombre des racines positives et négatives. Ainsi

$$P+V=p+n.$$

Or si V était plus grand que p, il faudrait que P fût moindre que n, ce que nous avons reconnu tout à l'heure impossible. D'ailleurs $V \not< p$; donc $V=p$ et partant $P=n$. Donc *quand une équation complète a toutes ses racines réelles, elle a autant de racines positives que de variations et autant de racines négatives que de permanences.*

On pourrait déduire du deuxième énoncé, mais rectifié, de la règle des signes de *Descartes* les limites inférieures que nous avons données plus haut du nombre des racines imaginaires d'une équation, mais il est inutile de nous arrêter sur ce sujet.

542. Théorème IX. *Lorsque deux nombres substitués successivement dans le premier membre d'une équation donnent deux résultats de signes contraires, ces deux nombres comprennent au moins une racine réelle de cette équation.*

Soient α et β les deux nombres qui, substitués dans le premier membre de l'équation $\varphi(x)=0$, donnent deux résultats de signes contraires, et supposons, pour fixer les idées, que α soit plus petit que β, et que l'on ait $\varphi(\alpha)<0$ et $\varphi(\beta)>0$. Cela posé, concevons que l'on fasse croître x d'une manière continue depuis α jusqu'à β : la fonction $\varphi(x)$ variera d'une manière continue (487), de sorte qu'elle passera par tous les états de grandeur compris entre la quantité négative $\varphi(\alpha)$ et la quantité positive $\varphi(\beta)$; donc il y a *au moins* une valeur de x comprise entre α et β pour laquelle la fonction $\varphi(x)$ se réduit à zéro; donc cette valeur de x est racine de l'équation proposée.

J'ai dit, *au moins* une valeur de x, parce que la fonction $\varphi(x)$

peut recevoir des valeurs qui croîtront jusqu'à une certaine limite, pour décroître ensuite jusqu'à une autre limite, et croître de nouveau, et ainsi de suite, de sorte qu'il peut se trouver entre α et β plusieurs valeurs de x pour lesquelles $\varphi(x)$ s'anéantisse, c'est-à-dire qui soient racines de l'équation proposée $\varphi(x)=0$.

Remarquons que cette démonstration ne suppose qu'une chose, savoir : que $\varphi(x)$ varie d'une manière continue lorsque x croît aussi d'une manière continue. Ainsi, le théorème que nous venons d'établir sera vrai, quelle que soit l'équation proposée $\varphi(x)=0$, qu'elle soit algébrique ou non, pourvu que son premier membre satisfasse à cette condition ; mais il n'y a que les équations algébriques rationnelles et entières pour lesquelles il soit applicable sans aucune restriction.

543. THÉORÈME X. *Lorsque deux nombres comprennent un nombre impair de racines d'une équation, ces nombres, substitués dans son premier membre, donneront deux résultats de signes contraires ; mais ils donneront deux résultats de mêmes signes, si le nombre des racines qu'ils comprennent est zéro ou un nombre pair.*

Soient en effet $a, b, c, \ldots k$ les racines comprises entre les deux nombres α et β : nous pourrons diviser le premier membre de l'équation proposée par le produit des facteurs du premier degré correspondants à ces racines. Appelons $\psi(x)$ le quotient de cette division, et le premier membre de l'équation proposée pourra être mis sous la forme

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k).\psi(x),$$

de sorte que les résultats trouvés en remplaçant x successivement par α et par β, reviendront aux produits

$$(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)\ldots(\alpha-k).\psi(\alpha) \qquad [3],$$

$$(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)\ldots(\beta-k).\psi(\beta) \qquad [4].$$

Or j'observe que les nombres $\psi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$ sont de mêmes signes, sans quoi α et β comprendraient au moins (542) une

racine réelle de l'équation $\psi(x)=0$, c'est-à-dire une racine de la proposée autre que $a, b, c, \ldots k$. Cela posé, si nous supposons $\alpha<\beta$, on voit que tous les facteurs $\alpha-a$, $\alpha-b$, $\alpha-c, \ldots (\alpha-k)$ sont négatifs, de sorte que leur produit sera négatif, si les racines $a, b, c, \ldots k$ sont en nombre impair (38); mais le produit [4] est au contraire positif; donc les produits [3] et [4] sont de signes contraires, puisque les facteurs $\psi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$ ont les mêmes signes.

Il est évident que ces deux produits auraient les mêmes signes, si le nombre des racines $a, b, c, \ldots k$, comprises entre α et β était pair.

Dans le cas où les nombres α et β ne comprendraient aucune racine de la proposée, les résultats de leur substitution à la place de x dans son premier membre auraient les mêmes signes, sans quoi ces deux nombres comprendraient au moins une racine de cette équation (**342**).

344. Théorème XI. Réciproquement *si deux nombres substitués dans le premier membre d'une équation donnent deux résultats de signes contraires, ils comprennent un nombre impair de racines de cette équation*, sans quoi ces résultats auraient les mêmes signes; *et s'ils donnent deux résultats de mêmes signes, ils ne comprennent point de racines, ou ils en interceptent un nombre pair*, sans quoi les deux résultats seraient affectés de signes contraires.

345. Scolie. Il est important de remarquer que, dans les énoncés de ces deux derniers théorèmes, il faut avoir égard au degré de multiplicité des racines égales (**322**) qui pourraient être comprises entre les nombres substitués α et β. Ainsi dans l'équation

$$(x-3)(x-4)^2(x-5)^3(x-6)(x-8)=0,$$

il y a *neuf* racines interceptées entre 2 et 7.

346. Théorème XII. *Toute équation de degré impair a nécessairement une racine réelle de signe contraire à celui de son dernier terme, et si elle a plusieurs racines réelles, celles qui sont*

de signe contraire au dernier terme sont en nombre impair, et les autres, s'il y en a, sont en nombre pair.

Soit

$$\varphi(x) = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + Tx + U = 0$$

l'équation proposée, et supposons d'abord que son dernier terme soit *négatif*. Si l'on y fait $x = 0$, son premier membre se réduira à son dernier terme, et on aura ainsi un résultat négatif. Cela posé, mettons x^m en facteur commun de tous les termes du deuxième membre, il viendra

$$x^m \left\{ 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \ldots + \frac{U}{x^m} \right\},$$

et si l'on donne à x des valeurs positives qui croissent indéfiniment, il est clair que tous les termes qui ont x dans leur dénominateur décroîtront indéfiniment, de sorte que l'on arrivera à une valeur $+L$ de x, pour laquelle leur somme sera moindre que l'unité en valeur absolue; par conséquent, à partir de cette valeur de x, le polynome compris dans les accolades restera constamment positif, et comme il en est de même du facteur x^m, on n'obtiendra plus que des résultats positifs, et ainsi $+L$ surpasse toutes les racines positives de la proposée. Puis donc que *zéro* et $+L$ donnent deux résultats de signes contraires, ces deux nombres comprennent une racine *positive*, et ils en comprennent un *nombre impair*, s'il y en a plus d'une.

Si on remplace maintenant x par $-x$ dans l'équation $\varphi(x)=0$, et qu'on change ensuite les signes de tous les termes, on aura une transformée dont les racines seront égales et de signes contraires à celles de $\varphi(x)=0$ et dont le dernier terme sera positif. On verra alors, en reprenant le raisonnement précédent, que les substitutions de *zéro* et de $+L$, dans son premier membre, donneront deux résultats de mêmes signes, de sorte que les racines positives de cette équation, et par conséquent les racines *négatives* de la proposée, seront en *nombre pair*, si elle a de pareilles racines.

Supposons actuellement que le dernier terme de l'équation

$\varphi(x)=0$ soit positif : nous remplacerons x par $-x$ dans cette équation, et, après avoir changé les signes de tous les termes, nous obtiendrons une transformée dont le dernier terme sera négatif; elle aura donc, en vertu de ce qui précède, un nombre impair de racines positives et un nombre pair de racines négatives; par conséquent la proposée aura au contraire un nombre impair de racines négatives et un nombre pair de racines positives.

347. Théorème XIII. *Toute équation de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative, et si elle a plus de deux racines réelles, ses racines positives sont en nombre impair, ainsi que ses racines négatives.*

Soit

$$\varphi(x)=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots-U=0$$

l'équation proposée, dans laquelle U représente une quantité positive. Si l'on fait $x=0$ dans son premier membre, on trouvera un résultat *négatif*. Cela posé, si l'on met x^m en facteur commun de tous ses termes, on reconnaîtra, en répétant les raisonnements que nous avons faits dans le numéro précédent, qu'il existe une valeur $+L$ de x, à partir de laquelle le polynome $\varphi(x)$ restera constamment positif, de sorte que $+L$ surpassera toutes les racines réelles de la proposée. Puis donc que $x=0$ et $x=+L$ donnent deux résultats de signes contraires, ces deux nombres comprennent au moins une racine positive de $\varphi(x)=0$, et ils en comprennent un nombre impair, si elle en a plus d'une.

Si dans l'équation proposée on change x en $-x$, son premier terme ne changera pas, de sorte que le dernier terme de la transformée étant négatif, elle aura un nombre impair de racines positives; donc la proposée, dont les racines ne diffèrent des siennes que par les signes, aura un nombre impair de racines négatives.

348. Théorème XIV. *Toute équation qui a des racines ima-*

ginaires en a toujours un nombre pair ; si elle n'a que de pareilles racines, son dernier terme sera positif, et si on substitue des nombres quelconques à la place de x, *on ne trouvera que des résultats positifs* *.

En effet, si l'on divise le premier membre de l'équation proposée par le produit des facteurs du premier degré correspondants à toutes ses racines réelles, et qu'on égale à zéro le quotient de cette division, on formera une équation qui aura pour racines toutes les racines imaginaires de la proposée, et qui n'en aura point d'autres. Il faut donc que cette équation-quotient soit de degré pair (546), et que son dernier terme soit positif (547).

De plus, si l'on y substitue des nombres quelconques au lieu de x, on ne pourra trouver que des résultats positifs; car, s'il n'en était pas ainsi, puisque $x=0$ réduit le premier membre à son dernier terme, notre équation-quotient aurait au moins une racine réelle comprise entre les deux nombres dont la substitution aurait donné deux résultats de signes contraires.

549. Scolie. *La réciproque de la dernière partie du théorème précédent n'est pas vraie*, car les équations qui ne renferment que des racines réelles égales, dont le degré de multiplicité est pair, ou qui ne renferment que de pareilles racines jointes à des racines imaginaires, jouissent aussi de la propriété de donner des résultats constamment positifs, quelques valeurs réelles que l'on y substitue au lieu de x. Telles sont les équations

$$(x-a)^{2n}.(x-b)^{2p}.(x-c)^{2q}=0,$$
$$(x-a)^{2n}.(x-b)^{2p}.(x-c)^{2q}.\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}.\{(x-\alpha')^2+\beta'^2\}=0$$

550. Nous terminerons cette première partie de la théorie générale des équations, en faisant une application des principes que nous avons établis, à la solution de cette question :

* Ce théorème est une conséquence directe du théorème IV, car d'abord les racines imaginaires sont toujours conjuguées deux à deux, et si une équation n'a que des racines imaginaires, son premier membre est le produit de facteurs du second degré, tels que $(x-\alpha)^2+\beta^2$.

Problème. *Trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients de l'équation*

$$x^3 + px + q = 0 \qquad [5],$$

pour que ses trois racines soient réelles.

Nous supposerons que le dernier terme q soit négatif, et cela n'altérera pas la généralité des résultats ; car, si q était positif, en remplaçant x par $-x$ et en changeant ensuite les signes de tous les termes, on obtiendrait une transformée dont le dernier terme serait négatif, et comme cette transformée aurait ses racines égales et de signes contraires à celles de la proposée, les conditions qui expriment que les racines de l'une sont réelles doivent exprimer qu'il en est de même de celles de l'autre.

Cela posé, l'équation proposée ayant son dernier terme négatif aura une racine réelle positive, et elle n'en aura qu'une, puisque son premier membre n'a qu'une variation (535). Soit a cette racine : si l'on divise $x^3 + px + q$ par $(x - a)$ et qu'on égale à zéro le quotient de cette division, on formera l'équation

$$x^2 + ax + (a^2 + p) = 0 \qquad [6],$$

dont les racines seront les deux autres racines de la proposée, de sorte que, pour que celle-ci ait ses trois racines réelles, il faut que l'on ait

$$a^2 - 4(a^2 + p) > 0, \quad \text{ou} \quad 3a^2 + 4p < 0.$$

p doit donc être une quantité négative, et c'est ce qui résulte d'ailleurs de la règle des signes de *Descartes*, car si $p > 0$, l'équation $x^3 + px + q = 0$ a nécessairement deux racines imaginaires (538). De $3a^2 + 4p < 0$, on tire

$$a < \sqrt{-\frac{4p}{3}}.$$

Mais a est la seule racine positive de la proposée, donc, en remplaçant x par $\sqrt{-\frac{4p}{3}}$ qui est une quantité plus grande que a, il *faut* que l'on ait un résultat positif, sans quoi entre *zéro* et

$\sqrt{-\frac{4p}{3}}$ qui donneraient deux résultats négatifs, il ne pourrait pas se trouver la seule racine positive a (**544**), donc

$$-\frac{4p}{3}\sqrt{-\frac{4p}{3}}+p\sqrt{-\frac{4p}{3}}+q>0,$$

d'où

$$-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{4p}{3}}>-q;$$

et comme les deux membres de cette inégalité sont positifs, on pourra les élever au carré, ce qui donnera

$$-\frac{4p^3}{27}>q^2, \quad \text{ou enfin} \quad 4p^3+27q^2<0.$$

Telle est la seule condition *nécessaire*, pour que les racines de l'équation proposée soient réelles, puisqu'elle exige que p soit <0.

Elle est *suffisante*, car si elle est remplie, la substitution de $\sqrt{-\frac{4p}{3}}$ dans [5] donnera un résultat positif, et comme $x=0$ en donne un négatif, cette équation aura une racine positive

$$a<\sqrt{-\frac{4p}{3}},$$

et elle n'en aura qu'une seule positive, puisque son premier membre ne présente qu'une variation. Mais de cette inégalité, on tire

$$3a^2+4p<0,$$

et ainsi l'équation [6] a ses deux racines réelles, de sorte que celles de la proposée le sont aussi.

551. Remarquons que si l'on avait

$$4p^3+27q^2=0,$$

les deux racines de l'équation [6] seraient égales entre elles, de sorte que la proposée aurait alors deux racines égales. Leur valeur est $-\frac{a}{2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{4p}{3}}=\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$, suivant que q est positif ou négatif (**478**).

332. Si l'équation du troisième degré était

$$x^3 + px^2 + q = 0 \qquad [7];$$

on observerait qu'en posant $x = \frac{1}{y}$, elle deviendrait

$$\frac{1}{y^3} + \frac{p}{y^2} + q = 0,$$

que l'on ramène facilement à la forme

$$y^3 + \frac{p}{q} y + \frac{1}{q} = 0.$$

Mais on voit qu'en vertu de la relation $x = \frac{1}{y}$, les racines de la proposée seront réelles, si celles de la transformée le sont, et réciproquement. La condition de réalité des racines de l'équation [7] est donc

$$4\left(\frac{p}{q}\right)^3 + 27\left(\frac{1}{q}\right)^2 < 0,$$

et pour qu'elle ait deux racines égales, il faut et il suffit que l'on ait

$$4\left(\frac{p}{q}\right)^3 + 27\left(\frac{1}{q}\right)^2 = 0, \quad \text{ou bien} \quad 4p^3 + 27q = 0.$$

CHAPITRE XVI.

THÉORIE DE L'ÉLIMINATION.

§ I. DE L'ÉLIMINATION ENTRE DEUX ÉQUATIONS DE DEGRÉ QUELCONQUE A DEUX INCONNUES.

553. *Résoudre deux équations entre deux inconnues* **x** *et* **y**, *c'est trouver tous les couples de valeurs de ces inconnues qui peuvent satisfaire à ces équations.*

554. S'il était toujours possible de résoudre une des équations proposées par rapport à l'une des inconnues qu'elle renferme, en substituant la valeur ainsi trouvée dans l'autre équation, on obtiendrait une équation qui ne contiendrait plus que l'autre inconnue, et qui en déterminerait par conséquent toutes les valeurs. Une pareille équation se nomme l'*équation finale*. Soient β une de ses racines, et α la valeur correspondante de l'autre inconnue, que nous désignerons par x. Alors, en substituant β et α à la place de y et de x, dans les équations proposées, ces équations devront être satisfaites. Donc, si l'on y remplace y par β, les équations résultantes devront avoir la racine commune α : donc leurs premiers membres auront un commun diviseur; et, en égalant ce commun diviseur à zéro, on formera une équation dont les racines seront les valeurs de x, qui, conjointement avec la valeur β de y, satisfont aux équations proposées. Mais, la résolution d'une équation par rapport à l'une des inconnues qu'elle renferme étant souvent impossible dans l'état actuel de l'algèbre (**514**), on a dû *chercher une méthode au moyen de laquelle on pût*, SANS AVOIR BESOIN DE RÉSOUDRE AUCUNE ÉQUATION, *effectuer l'élimination de l'une des inconnues entre les deux équations proposées, et obtenir ainsi une équation à une seule inconnue, dont les racines fussent* TOUTES *les valeurs et les* SEULES *valeurs de cette inconnue.* C'est cette méthode que nous nous proposons d'exposer ici.

555. Une équation *complète* du degré m entre deux inconnues x et y doit contenir tous les termes possibles du degré m tant en x qu'en y, savoir :

$$a_0x^m,\ a_1yx^{m-1},\ a_2y^2x^{m-2}\ldots\ldots\ a_ny^nx^{m-n}\ldots\ldots\ a_my^m\,;$$

tous les termes du degré $m-1$, savoir :

$$b_1x^{m-1},\ b_2yx^{m-2}\ldots\ldots\ b_ny^{n-1}x^{m-n}\ldots\ldots\ b_my^{m-1}\,;$$

tous les termes du degré $m-2$, savoir :

$$c_2x^{m-2}\ldots\ldots\ c_ny^{n-2}x^{m-n}\ldots\ldots\ c_my^{m-2},$$

tous ceux des degrés $m-3$, $m-4$, $m-5$, ... 3, 2, 1, 0; de sorte que la forme d'une équation complète du degré m entre deux inconnues, ordonnée par rapport à x, est

$$\left.a_0x^m + \left.\begin{array}{l} a_1y \\ +b_1 \end{array}\right| x^{m-1} + \left.\begin{array}{l} a_2y^2 \\ +b_2y \\ +c^2 \end{array}\right| x^{m-2} + \ldots + \left.\begin{array}{l} a_ny^n \\ +b_ny^{n-1} \\ +c_ny^{n-2} \\ \vdots \\ +p_ny \\ +q_n \end{array}\right| x^{m-n} + \ldots + \begin{array}{l} a_my^m \\ +b_my^{m-1} \\ +c_my^{m-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ +s_my \\ +t_m \end{array}\right\} = 0.$$

Toute équation qui ne contient pas tous ces termes est *incomplète*, et l'on évalue son degré en faisant la somme des exposants de x et de y dans le terme où cette somme est maximum.

Remarquons que le nombre des termes d'une équation complète du degré m à deux inconnues est la somme des termes de la progression des nombres entiers depuis 1 jusqu'à $(m+1)$: ainsi une pareille équation contient $\dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$ termes.

556. Nous appellerons *valeurs conjuguées*, *solutions*, *couples* ou *systèmes de valeurs*, les nombres qui, substitués simultanément à la place de x et de y, dans les équations proposées, en rendent les deux membres identiques.

557. On conçoit que la résolution des équations proposées sera en général d'autant plus facile, que ces équations seront d'un degré moins élevé : d'où il suit que, si l'on parvenait à décomposer les premiers membres de ces équations en facteurs,

le problème de leur résolution pourrait être beaucoup simplifié. Soient en effet $M=0$, $N=0$, les deux équations proposées, et supposons que M soit de la forme $M=A.B$, et N de la forme $N=C.D$: toute solution des équations proposées doit anéantir à la fois un facteur de M et un de ceux de N; donc les solutions des équations $\left.\begin{matrix}M=0\\N=0\end{matrix}\right\}$ satisfont aux systèmes

$$\left.\begin{matrix}A=0\\C=0\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}A=0\\D=0\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}B=0\\C=0\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}B=0\\D=0\end{matrix}\right\},$$

formés en combinant chaque facteur de M successivement avec chacun des facteurs de N. Mais, réciproquement, les solutions de tous ces systèmes satisfont aux équations proposées; donc la résolution des équations $\left.\begin{matrix}M=0\\N=0\end{matrix}\right\}$ est ramenée à celle des systèmes d'équations plus simples

$$\left.\begin{matrix}A=0\\C=0\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}A=0\\D=0\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}B=0\\C=0\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}B=0\\D=0\end{matrix}\right\}.$$

558. Ainsi, la première chose à faire, quand on aura deux équations à résoudre, sera de décomposer leurs premiers membres en facteurs, si la chose est possible. Soient donc $\left.\begin{matrix}M=0\\N=0\end{matrix}\right\}$ les équations proposées. Si l'on ordonne le polynome M par rapport à y, que l'on cherche le plus grand commun diviseur des coefficients de ses différents termes, et que l'on divise M par ce facteur; si ensuite on ordonne le quotient par rapport à x, que l'on cherche le plus grand commun diviseur des coefficients des diverses puissances de x, et qu'on divise encore le quotient par ce plus grand commun diviseur, on aura ainsi décomposé le polynome M en trois facteurs X, Y, M', fonctions respectives de x, de y, et de x et de y, de sorte que

$$M=XYM'.$$

On pourra faire subir une décomposition semblable au polynome N, et l'on aura

$$N=X'Y'N'.$$

Cela posé, il est possible que les polynomes X et X', Y et Y', M' et N', aient des facteurs communs : on cherchera donc leurs plus grands communs diviseurs respectifs d, d', d'', et les polynomes M et N pourront alors être mis sous la forme

$$M = d.d'.d''.X_1.Y_1.A,$$
$$N = d.d'.d''.X'_1.Y'_1.B.$$

Maintenant, tout couple de valeurs des équations $\left.\begin{matrix} M=0 \\ N=0 \end{matrix}\right\}$ doit anéantir à la fois un facteur de M et un facteur de N, et réciproquement : donc, on obtiendra toutes les solutions de ces équations en égalant simultanément à zéro un facteur de M et un facteur de N. On posera donc d'abord :

$$d=0, \quad \text{ou} \quad d'=0, \quad \text{ou} \quad d''=0.$$

La première de ces équations détermine un certain nombre de valeurs de x, et laisse y arbitraire ; la seconde donne un nombre limité de valeurs de y, et laisse x indéterminé ; enfin, la troisième laisse tout à fait arbitraire celle des deux inconnues que l'on voudra, mais détermine les valeurs correspondantes de l'autre.

Ainsi, chacune des équations

$$d=0, \quad d'=0, \quad d''=0$$

fournit une infinité de solutions des équations proposées.

Les autres manières de satisfaire aux équations $\left.\begin{matrix} M=0 \\ N=0 \end{matrix}\right\}$, consistent à égaler en même temps à zéro l'un des facteurs restants X_1, Y_1, A de la première, et l'un de ceux X'_1, Y'_1, B de la seconde. Mais nous remarquons que l'on ne peut pas avoir en même temps $\left.\begin{matrix} X_1=0 \\ X'_1=0 \end{matrix}\right\}$: car les facteurs X_1 et X'_1 sont premiers entre eux, et par conséquent ne peuvent pas être anéantis par une même valeur de x. Par la même raison, on ne pourra pas poser non plus $\left.\begin{matrix} Y_1=0 \\ Y'_1=0 \end{matrix}\right\}$. Donc on achèvera la

résolution des équations proposées, en résolvant les sept systèmes

$$\left.\begin{matrix}X_1=0\\ Y'_1=0\end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix}X_1=0\\ B=0\end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix}Y_1=0\\ X'_1=0\end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix}Y_1=0\\ B=0\end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix}A=0\\ X'_1=0\end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix}A=0\\ Y'_1=0\end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix}A=0\\ B=0\end{matrix}\right\}.$$

Or, dans les six premiers systèmes, l'une au moins des deux équations ne renferme qu'une seule inconnue : par conséquent, pour trouver toutes les solutions de l'un quelconque de ces systèmes, on résoudra l'équation qui ne contient qu'une seule inconnue; et, en substituant successivement chacune de ses racines dans l'autre équation, on obtiendra les valeurs correspondantes de l'autre inconnue.

La résolution complète des deux équations $\left.\begin{matrix}M=0\\ N=0\end{matrix}\right\}$ *est ainsi ramenée à celle des deux équations à deux inconnues* $\left.\begin{matrix}A=0\\ B=0\end{matrix}\right\}$, *dont les premiers membres sont premiers entre eux*, *et n'ont aucun facteur qui soit fonction de l'une seulement des deux inconnues.* Mais avant de nous occuper des équations $\left.\begin{matrix}A=0\\ B=0\end{matrix}\right\}$, nous ferons quelques remarques sur les équations finales des six premiers systèmes.

*339. Nous avons dit que l'*on appelle* ÉQUATION FINALE *une équation qui a pour racines, non pas seulement les valeurs différentes de l'une des deux inconnues, mais toutes les valeurs, tant égales qu'inégales, de cette inconnue, avec lesquelles sont conjuguées des valeurs de l'autre inconnue* (334). Ainsi l'équation finale doit avoir autant de racines que les proposées admettent de couples. Il suit de là que l'équation finale en y du système $\left.\begin{matrix}X_1=0\\ Y'_1=0\end{matrix}\right\}$ n'est pas $Y'_1=0$: car à chaque racine de cette équation correspondent autant de valeurs de x qu'il est marqué par le plus haut exposant de cette variable dans $X_1=0$; donc, si cet exposant est n, l'équation finale du système $\left.\begin{matrix}X_1=0\\ Y'_1=0\end{matrix}\right\}$ est $(Y'_1)^n=0$.

*360. On voit de même que l'équation finale en y du système $\left.\begin{matrix}Y_1=0\\ B=0\end{matrix}\right\}$ n'est pas non plus $Y_1=0$: car à chaque racine de cette dernière correspondent en général plusieurs valeurs de x. Mais, comme on ne sait pas *a priori* quel est le nombre de ces valeurs de x, on ne peut pas dire immédiatement, comme tout à l'heure, quelle sera l'équation finale en y du système $\left.\begin{matrix}Y_1=0\\ B=0\end{matrix}\right\}$.

Pour la former, je suppose que l'équation $B=0$ soit

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+dx^{n-3}+\ldots+tx+u=0.$$

Je décompose Y_1 dans le produit de deux facteurs a_1 et α, dont l'un soit premier avec a, et dont l'autre ne renferme que des facteurs premiers de a*; je décompose de même α en deux facteurs b_1 et β, dont l'un soit premier avec b, et dont l'autre ne soit composé que de facteurs premiers de b; je décompose de même β en deux facteurs, c_1 et γ, dont l'un soit premier avec c, et dont l'autre ne contienne que des facteurs premiers de c, et ainsi de suite, jusqu'à t inclusivement, s'il y a lieu. Mais, pour fixer les idées, nous supposerons que γ soit premier avec d, et nous aurons ainsi

$$Y_1=a_1\alpha,\quad \alpha=b_1\beta,\quad \beta=c_1\gamma,\quad \text{et partant}\quad Y_1=a_1b_1c_1\gamma,$$

de sorte que les racines de l'équation $Y_1=0$ sont fournies par les équations plus simples

$$a_1=0\quad b_1=0,\quad c_1=0,\quad \gamma=0.$$

---

* Pour effectuer cette décomposition, on cherche le plus grand commun diviseur

d' entre Y_1 et a; ainsi $Y_1=d'.q$; puis le plus grand commun diviseur
d'' entre q et a; ainsi $q=d''.q'$; puis le plus grand commun diviseur
d''' entre q' et a; ainsi $q'=d'''.q''$; puis le plus grand commun diviseur
d^{IV} entre q'' et a; et ainsi de suite.

Je suppose, pour fixer les idées, que q'' soit premier avec a. On aura donc $Y_1=d'd''d'''.q''$; et ainsi $\alpha=d'd''d'''$, et $a_1=q''$.

Remarquons que d'' et d''' ne renferment pas d'autres facteurs premiers que ceux de d', puisqu'ils sont communs à Y_1 et à a.

Or, toute racine de l'équation $\gamma=0$ anéantit c et β, par conséquent b et α, et partant a : donc toute racine de $\gamma=0$ réduit B à un polynome en x du $(n-3)^{me}$ degré; donc à chacune de ces racines correspondent $(n-3)$ valeurs de x; donc le facteur γ devra entrer à la puissance $(n-3)$ dans l'équation finale en y du système $\left.\begin{matrix} Y_1=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\}$. On verra de même que toute racine de l'équation $c_1=0$ anéantit b et a, et réduit ainsi B à un polynome en x du degré $(n-2)$, et que par conséquent le facteur c_1 doit entrer dans l'équation finale à la puissance $(n-2)$. Les mêmes raisonnements feront voir que les facteurs b_1 et a_1 doivent y entrer aux puissances respectives $(n-1)$ et n, de sorte que cette équation est

$$a_1^n b_1^{n-1} c_1^{n-2} \gamma^{n-3} = 0.$$

361. Remarquons que, si les coefficients de x dans l'équation $B=0$ renfermaient tous, à l'exception du dernier u, tous les facteurs premiers de Y_1, le système $\left.\begin{matrix} Y_1=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\}$ serait incompatible : car la substitution de chaque racine de $Y_1=0$ dans B réduirait ce polynome à un nombre.

***362.** Pour obtenir les équations finales en y des systèmes $\left.\begin{matrix} X_1=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\}$ et $\left.\begin{matrix} A=0 \\ X'_1=0 \end{matrix}\right\}$, il n'y aurait qu'à éliminer x entre ces équations, de sorte que cette recherche se trouve implicitement comprise dans celle de l'équation finale en y du système $\left.\begin{matrix} A=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\}$.

363. Nous allons maintenant exposer la méthode qu'il convient de suivre pour résoudre les deux équations $\left.\begin{matrix} A=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\}$.

Supposons les deux polynomes A et B ordonnés par rapport à x, et que B ne soit pas d'un degré plus élevé en x que A. Divisons A par B, et admettons que l'on arrive à un reste R_1 d'un degré moindre en x que B, sans écrire au quotient des termes où y entre en dénominateur. Si l'on désigne ce quotient par Q, on aura

$$A = BQ + R_1.$$

Or, tout couple de valeurs de x et de y qui satisfait aux équations $\left.\begin{matrix} A=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\}$, anéantit R_1 : donc les solutions de ce système se trouvent parmi celles des équations plus simples $\left.\begin{matrix} B=0 \\ R_1=0 \end{matrix}\right\}$. Mais B et R_1 ne peuvent être nuls sans que A le soit aussi ; donc, réciproquement, les solutions du système $\left.\begin{matrix} B=0 \\ R_1=0 \end{matrix}\right\}$ se trouvent parmi celles du système proposé $\left.\begin{matrix} A=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\}$; donc les solutions du système $\left.\begin{matrix} A=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\}$ sont les mêmes que celles du système $\left.\begin{matrix} B=0 \\ R_1=0 \end{matrix}\right\}$. Donc, *on peut substituer au système de deux équations le système formé de l'une d'elles et de l'équation que l'on obtient en égalant à zéro le reste de la division de leurs premiers membres*. D'où il suit que, si l'on divise B par R_1, R_1 par le reste R_2 de cette seconde division, R_2 par le reste R_3 de la troisième, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un reste R_n indépendant de x, les solutions du système proposé seront les mêmes que celles du système

$$\left.\begin{matrix} R_{n-1}=0 \\ R_n \ \ =0 \end{matrix}\right\},$$

formé en égalant les deux derniers restes à zéro (on suppose toujours que les quotients successifs aient tous leurs termes entiers).

L'équation $R_n=0$, fonction de y seulement, fera connaître toutes les valeurs différentes de y, et les seules valeurs dont cette inconnue soit susceptible. Quand on l'aura résolue, on substituera ses racines successivement dans l'équation $R_{n-1}=0$, et l'on trouvera ainsi les valeurs correspondantes de x*.

* On trouve cependant quelquefois des facteurs égaux dans le reste R_n ; mais cela n'arrive que quand le même couple satisfait plusieurs fois aux équations $R_n=0$ et $R_{n-1}=0$; car, chaque racine de $R_n=0$ doit être conjuguée avec les valeurs correspondantes de x fournies par $R_{n-1}=0$. La réciproque est fausse ; car on conçoit que pour $y=\beta$, racine de $R_n=0$, le polynome R_{n-1} pourrait se réduire à une fonction de x de la forme $(x-\alpha)^n$.

564. *Si le reste* R_n *indépendant de* x *l'était* ***aussi de* y**, *c'est à-dire s'il était numérique, les équations* $A=0$ *et* $B=0$ ***seraient*** *évidemment incompatibles*, puisque l'équation $R_n=0$ serait absurde.

565. Exemple. *Résoudre les deux équations*

$$(y^2-y)x^4-(y^3-2y^2-y+1)x^3-(y^3+y^2-2y+1)x^2$$
$$+(y^2+y-2)x-y^3+2y-1=0,$$
$$(y^2-y)x^3+(y^2+y-1)x^2+y^2-2=0.$$

En appliquant la méthode du plus grand commun diviseur à leurs premiers membres, on trouvera pour les deux derniers restes $(y-1)x^2+yx-1$ et y^2-1 ; de sorte que l'équation qui donne toutes les valeurs *différentes* de y est $y^2-1=0$.

* Pour former l'équation finale du système

$$\left.\begin{array}{r}(y-1)x^2+yx-1=0\\ y^2-1=0\end{array}\right\} \qquad [1],$$

et, partant, celle du système proposé, j'observe que $y^2-1=(y-1)(y+1)$; or, $y-1$ est facteur commun à y^2-1 et au coefficient de x^2, et est premier avec le coefficient de x; $y+1$ est premier avec le coefficient de x^2 : donc $y-1$ entrera dans l'équation finale à la première puissance, et $y+1$ à la seconde (560); cette équation sera donc

$$(y-1)(y+1)^2=0.$$

Comme $y=1$ réduit la première des équations [1] à $x-1=0$, d'où $x=1$; que $y=-1$ réduit cette même équation à $-2x^2-x-1=0$, d'où $x=\frac{1\pm\sqrt{-7}}{2}$; on voit que les couples demandés sont :

$$\begin{array}{c|c|c|} y=1 & y=-1 & y=-1 \\ x=1 & x=\frac{1+\sqrt{-7}}{2} & x=\frac{1-\sqrt{-7}}{2} \end{array}$$

566. Les raisonnements sur lesquels nous avons établi la théorie de l'élimination au n° 563 supposent essentiellement

que, dans la recherche du plus grand commun diviseur des polynomes A et B, les divers quotients partiels soient des fonctions entières de y. Supposons, en effet, que la division de A par B ne puisse pas se faire sans qu'on soit obligé d'écrire au quotient des termes fractionnaires par rapport à y, et désignons ce quotient par $\frac{M}{N}$, N étant une fonction de y; on aura

$$A=\frac{MB}{N}+R_1.$$

Or, si l'on remplace dans cette équation x et y par des valeurs qui satisfassent aux équations $A=0$ et $B=0$, il pourra se faire que la valeur de y réduise en même temps N à zéro, de sorte que $\frac{MB}{N}$ devienne ainsi $\frac{0}{0}$, et puisse en conséquence avoir une valeur différente de zéro; donc R_1 peut ne pas s'évanouir, dans l'hypothèse actuelle. On n'est donc plus certain que toutes les solutions du système $\left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\}$ se trouvent parmi celles du système $\left.\begin{matrix}B=0\\R_1=0\end{matrix}\right\}$, et réciproquement : car la valeur de y qui, conjointement avec une certaine valeur de x, réduit les polynomes B et R_1 à zéro, peut aussi anéantir N, de sorte que le terme $\frac{MB}{N}$ devient alors $\frac{0}{0}$; et qu'ainsi A peut ne pas devenir nul.

On voit donc que si, en appliquant aux premiers membres des équations proposées la méthode du plus grand commun diviseur, les différents quotients n'étaient pas tous des fonctions entières de y, on ne serait pas certain que le système formé en égalant deux restes consécutifs à zéro eût les mêmes solutions que celui que l'on obtient en égalant à zéro le premier de ces restes et celui qui le précède. Par conséquent, l'équation que l'on trouve en égalant le reste indépendant de x à zéro, peut ne pas avoir pour racines toutes les valeurs différentes de y, qui sont propres à former des solutions des équations proposées. Il est donc indispensable d'appliquer aux premiers membres des

équations $\left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\}$ le procédé du plus grand commun diviseur, avec les modifications propres à rendre entiers tous les termes des quotients successifs. Mais ces modifications, qui n'altèrent pas le plus grand commun diviseur, n'altéreront-elles pas non plus le reste indépendant de x? Examinons cette question.

567. Soit Y le facteur par lequel il faut multiplier A, pour rendre la division de ce polynome par B possible en termes entiers; appelons Q le quotient, et R_1 le reste: nous aurons

$$YA = BQ + R_1.$$

Or, tout couple de valeurs de x et de y qui rendent nuls B et R_1, anéantit YA, et partant Y ou A : donc toutes les solutions du système $\left.\begin{matrix}B=0\\R_1=0\end{matrix}\right\}$ sont comprises parmi celles des deux systèmes $\left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\}$ et $\left.\begin{matrix}Y=0\\B=0\end{matrix}\right\}$. Mais on ne peut avoir $\left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\}$ ou $\left.\begin{matrix}Y=0\\B=0\end{matrix}\right\}$, sans avoir en même temps $R_1=0$: donc, réciproquement, toutes les solutions des systèmes $\left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\}$ et $\left.\begin{matrix}Y=0\\B=0\end{matrix}\right\}$ se trouvent parmi celles du système $\left.\begin{matrix}B=0\\R_1=0\end{matrix}\right\}$; donc les solutions du système $\left.\begin{matrix}B=0\\R_1=0\end{matrix}\right\}$ sont les mêmes que celles des deux systèmes $\left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\}$ et $\left.\begin{matrix}Y=0\\B=0\end{matrix}\right\}$, ce que nous conviendrons d'écrire ainsi :

$$\left.\begin{matrix}B=0\\R_1=0\end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}Y=0\\B=0\end{matrix}\right\} \qquad [2].$$

En résolvant donc les deux équations $\left.\begin{matrix}B=0\\R_1=0\end{matrix}\right\}$, on trouvera toutes les solutions du système proposé, et en outre celles du système étranger $\left.\begin{matrix}Y=0\\B=0\end{matrix}\right\}$. D'où l'on voit que le système des équations formées en égalant à zéro le reste indépendant de x et le diviseur correspondant sera vérifié par toutes les solutions du système proposé, mais qu'il admettra d'autres solutions que celles-là.

*308. Or, je dis que l'on pourra écarter ces solutions étrangères. Effectuons, en effet, la division de B par R_1; mais, conformément à la théorie du plus grand commun diviseur, on cherchera auparavant le plus grand commun diviseur entre les coefficients de x dans R_1. Soit F_1 ce diviseur, de sorte que $R_1 = F_1 . R'_1$: alors les solutions des deux équations $\left.\begin{matrix}B=0\\R_1=0\end{matrix}\right\}$ se composeront de celles des deux systèmes plus simples $\left.\begin{matrix}B=0\\R'_1=0\end{matrix}\right\}$ et $\left.\begin{matrix}B=0\\F_1=0\end{matrix}\right\}$ (337). Nous verrons donc, d'après l'équation [2], que

$$\left.\begin{matrix}B=0\\R'_1=0\end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}Y=0\\B=0\end{matrix}\right\} - \left.\begin{matrix}B=0\\F_1=0\end{matrix}\right\} \qquad [3].$$

Conformément à la méthode du plus grand commun diviseur, nous supprimerons le facteur F_1 dans le reste R_1, et nous diviserons B par le quotient R'_1. Soient Y_1 le facteur à introduire pour rendre cette division possible en termes entiers, Q_1 et R_2 le quotient et le reste : nous aurons

$$Y_1 B = R'_1 Q_1 + R_2,$$

et l'on prouvera, comme plus haut, que les solutions du système $\left.\begin{matrix}R'_1=0\\R_2=0\end{matrix}\right\}$ sont les mêmes que celles des deux systèmes $\left.\begin{matrix}B=0\\R'_1=0\end{matrix}\right\}$ et $\left.\begin{matrix}Y_1=0\\R'_1=0\end{matrix}\right\}$; qu'ainsi

$$\left.\begin{matrix}R'_1=0\\R_2=0\end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix}B=0\\R'_1=0\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}Y_1=0\\R'_1=0\end{matrix}\right\},$$

donc, en vertu du résultat [3],

$$\left.\begin{matrix}R'_1=0\\R_2=0\end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}Y=0\\B=0\end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix}Y_1=0\\R'_1=0\end{matrix}\right\} - \left.\begin{matrix}B=0\\F_1=0\end{matrix}\right\} \qquad [4].$$

Supposons que l'on découvre dans R_2 un facteur F_2 commun aux coefficients de tous ses termes, de sorte que $R_2 = F_2 . R'_2$: alors la résolution du système $\left.\begin{matrix}R'_1=0\\R_2=0\end{matrix}\right\}$ se décomposera dans

celle des deux systèmes $\left.\begin{matrix}R'_1=0\\R'_2=0\end{matrix}\right\}$ et $\left.\begin{matrix}R'_1=0\\F_2=0\end{matrix}\right\}$; donc, en vertu de l'équation [4], on verra que

$$\left.\begin{matrix}R'_1=0\\R'_2=0\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\}+\left.\begin{matrix}Y=0\\B=0\end{matrix}\right\}+\left.\begin{matrix}Y_1=0\\R'_1=0\end{matrix}\right\}-\left.\begin{matrix}B=0\\F_1=0\end{matrix}\right\}-\left.\begin{matrix}R'_1=0\\F_2=0\end{matrix}\right\}.$$

Il faudra actuellement diviser R'_1 par R'_2; mais, sans aller plus loin, on conçoit que si l'on continue d'appliquer le procédé du plus grand commun diviseur, en raisonnant toujours après chaque division comme précédemment, on arrivera à un reste R_p indépendant de x, et qu'on aura l'équation

$$\left.\begin{matrix}R'_{p-1}=0\\R_p\ \ =0\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\}+\left.\begin{matrix}Y=0\\B=0\end{matrix}\right\}+\left.\begin{matrix}Y_1=0\\R'_1=0\end{matrix}\right\}+\left.\begin{matrix}Y_2=0\\R'_2=0\end{matrix}\right\}+\ldots+\left.\begin{matrix}Y_{p-1}=0\\R'_{p-1}=0\end{matrix}\right\}$$
$$-\left.\begin{matrix}B=0\\F_1=0\end{matrix}\right\}-\left.\begin{matrix}R'_1=0\\F_2=0\end{matrix}\right\}-\left.\begin{matrix}R'_2=0\\F_3=0\end{matrix}\right\}-\ldots\ldots-\left.\begin{matrix}R'_{p-2}=0\\F_{p-1}=0\end{matrix}\right\};$$

donc, si l'on multiplie le dernier reste R_p par le produit F_1, F_2, $F_3 \ldots F_{p-1}$ des facteurs supprimés dans le cours du calcul, l'équation

$$R_pF_1F_2F_3\ldots F_{p-1}=0,$$

que, pour abréger, nous désignerons par $C=0$, aura pour racines toutes les valeurs différentes de y propres à former des solutions des équations proposées $\left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\}$, et en outre des systèmes étrangers

$$\left.\begin{matrix}Y=0\\B=0\end{matrix}\right\},\quad\left.\begin{matrix}Y_1=0\\R'_1=0\end{matrix}\right\},\quad\left.\begin{matrix}Y_2=0\\R'_2=0\end{matrix}\right\}\ldots\left.\begin{matrix}Y_{p-1}=0\\R'_{p-1}=0\end{matrix}\right\}:$$

donc, en divisant le premier membre C de cette équation par le produit des facteurs du premier degré correspondants aux valeurs de y qui peuvent former des solutions de ces systèmes étrangers, l'équation-quotient aura pour racines toutes les valeurs de y propres à former des solutions des équations proposées $\left.\begin{matrix}A=0\\B=0\end{matrix}\right\}$.

*360. Voyons donc comment on pourra déterminer le produit des facteurs du premier degré correspondants aux valeurs

étrangères de y. Considérons l'un quelconque des systèmes étrangers $\left.\begin{matrix} Y_k=0 \\ R'_k=0 \end{matrix}\right\}$. Le polynome R'_k est de la forme

$$R'_k = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} + \ldots + sx^2 + tx + u.$$

Cela posé, j'observe que les quantités Y_k, a, b, $c \ldots s$, t, u, n'ont point de facteur commun, et je décompose Y_k en deux facteurs, dont l'un, D, ne soit formé que de facteurs premiers communs à tous les coefficients b, $c \ldots s$, t, et dont l'autre, Q, soit premier avec tous ces coefficients* : ainsi $Y_k = DQ$, de sorte que le système $\left.\begin{matrix} Y_k=0 \\ R'_k=0 \end{matrix}\right\}$ se décompose dans les deux autres $\left.\begin{matrix} D=0 \\ R'_k=0 \end{matrix}\right\}$ et $\left.\begin{matrix} Q=0 \\ R'_k=0 \end{matrix}\right\}$. Or, la substitution dans R'_k de l'une quelconque des racines de $D=0$ réduira ce polynome à un nombre : donc les équations $\left.\begin{matrix} D=0 \\ R'_k=0 \end{matrix}\right\}$ sont *incompatibles*. Au contraire, en substituant une racine quelconque de $Q=0$ dans R'_k, une partie seulement des coefficients a, b, $c, \ldots s$, t, s'évanouira, de sorte que R'_k sera fonction de x : donc à chaque racine de $Q=0$ correspondent des valeurs de x propres à satisfaire au système $\left.\begin{matrix} Q=0 \\ R'_k=0 \end{matrix}\right\}$; donc $\left.\begin{matrix} Y_k=0 \\ R'_k=0 \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} Q=0 \\ R'_k=0 \end{matrix}\right\}$; donc en divisant l'équation

---

* Pour effectuer cette décomposition, on cherche d'abord le plus grand commun diviseur δ de tous les coefficients b, $c \ldots s$, t, puis le plus grand commun diviseur d_1 entre Y_k et δ; on divise ensuite Y_k par d_1, et l'on cherche le plus grand commun diviseur d_2 entre le quotient q_1 de cette division et δ; puis on divise q_1 par d_2, et l'on cherche le plus grand commun diviseur d_3 entre le quotient q_2 de cette division et δ; puis on divise q_2 par d_3, et l'on cherche le plus grand commun diviseur d_4 entre le quotient q_3 de cette division et δ, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un quotient qui soit premier avec δ. Supposons que q_3 soit ce quotient, de sorte que $d_4 = 1$; on aura la suite d'équations $Y_k = d_1 q_1$, $q_1 = d_2 q_2$, $q_2 = d_3 q_3$, d'où l'on tire $Y_k = d_1 d_2 d_3 . q_3$. Le produit $d_1 d_2 d_3$ n'est formé que de facteurs premiers communs à b, $c \ldots s$, t; mais aucun facteur premier de q_3 ne peut diviser à la fois ces mêmes coefficients : donc $D = d_1 d_2 d_3$, et $Q = q_3$.

Si les coefficients b, $c \ldots t$ étaient premiers entre eux, ou si leur plus grand commun diviseur l'était avec Y_k, alors Y_k serait lui-même le facteur que nous avons désigné par Q, et D serait l'unité.

$C=0$ par l'équation $Q=0$, on l'aura dégagée des valeurs de y qui forment des solutions du système étranger $\left.\begin{matrix} Y_k=0 \\ R'_k=0 \end{matrix}\right\}$.

En opérant comme nous venons de l'indiquer sur chacun des systèmes étrangers $\left.\begin{matrix} Y=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} Y_1=0 \\ R'_1=0 \end{matrix}\right\}$, etc., on parviendra à une équation dont les racines seront toutes les valeurs *différentes* de y propres à former des solutions des équations proposées.

*570. Remarquons que si le diviseur R'_{p-1} est du premier degré en x, le système $\left.\begin{matrix} Y_{p-1}=0 \\ R'_{p-1}=0 \end{matrix}\right\}$ est incompatible; car les coefficients des deux termes de R'_{p-1} sont premiers entre eux.

*571. Remarquons encore que *si, après avoir introduit un facteur* $(y-\beta)$, *pour rendre une division possible, on le supprime dans l'un des restes suivants, on n'aura plus à s'en occuper, si toutefois on a reconnu, par la méthode du n° 569, que ce facteur devait compliquer l'équation* $C=0$.

*572. Il résulte de ce qui précède, qu'après avoir divisé le reste R_p indépendant de x, par les facteurs étrangers qui ne se seront pas trouvés dans les facteurs supprimés $F_2, F_3, \ldots F_{p-1}$ (aucun d'eux ne peut diviser F_1), l'équation

$$R'_p . F_1 . F'_2 F'_3 \ldots F'_{p-1}{}^* = 0$$

aura pour racines toutes les valeurs différentes de y qui peuvent former des solutions des équations proposées; de sorte que la résolution des deux équations $\left.\begin{matrix} A=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\}$ sera ramenée à celle des systèmes

$$\left.\begin{matrix} R'_{p-1}=0 \\ R'_p \;=0 \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} B \;=0 \\ F_1=0 \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} R'_1=0 \\ F'_2=0 \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} R'_2=0 \\ F'_3=0 \end{matrix}\right\} \cdots \left.\begin{matrix} R'_{p-2}=0 \\ F'_{p-1}=0 \end{matrix}\right\} \quad [5],$$

ce qui ne saurait présenter de difficulté, puisque la seconde de chacun de ces systèmes d'équations ne renferme qu'une seule inconnue.

*573. Maintenant, si l'on veut avoir l'équation finale du sys-

* F'_n représente le quotient de F_n par le produit des facteurs étrangers qu'il renferme.

tème $\left.\begin{matrix} A=0 \\ B=0 \end{matrix}\right\}$, il n'y aura qu'à former (560) les équations finales des systèmes [5], et les multiplier entre elles. Nous renverrons, pour de plus grands détails, au mémoire que nous avons publié sur l'élimination *.

*574. *Résoudre les deux équations*

$$A=2x^4-2x^2-(y^4-2y^3-y^2+2y)=0,$$
$$B=2yx^3-(y^3-2y^2+y+2)x-(2y^4-10y^2+8)=0.$$

On trouvera successivement

$$Y=y,$$

$$R_1=(y^3-2y^2-y+2)x^2+(2y^4-10y^2+8)x-(y^5-2y^4-y^3+2y^2),$$

d'où $$F_1=y^3-2y^2-y+2,$$

et $$R'_1=x^2+(2y+4)x-y^2;$$

$$Y_1=1,\ R_2=(9y^3+34y^2+31y-2)x-(6y^4+8y^3-10y^2+8);$$

d'où $$F_2=y+2,$$

et $$R'_2=(9y^2+16y-1)x-(6y^3-4y^2-2y+4);$$

$$Y_2=(9y^2+16y-1)^2,\ R_3=63y^6-182y^4-240y^3+135y^2+240y.$$

Le facteur $Y=y$ étant premier avec le coefficient de la première puissance de x dans le premier diviseur, et ne divisant aucun des facteurs supprimés dans le cours du calcul, doit se trouver dans R_3. Quant au facteur Y_2 il ne saurait s'y rencontrer (570); donc

$$R'_3=63y^5-182y^3-240y^2+135y+240.$$

Le facteur F_1 étant premier avec le coefficient du premier terme du diviseur correspondant B, entrera dans l'équation finale au cube.

Le facteur F_2 est premier avec le coefficient du premier terme du diviseur correspondant R'_1 : donc il entrera au carré dans l'équation finale. Cette équation est en conséquence

$$(63y^5-182y^3-240y^2+135y+240)(y^3-2y^2-y+2)^3(y+2)^2=0.$$

* *Théorie de l'élimination* entre deux équations de degré quelconque à deux inconnues. Chez *Hachette*, libraire.

La résolution des équations proposées est ramenée à celle des trois systèmes partiels

$$\left.\begin{array}{r}63y^4-182y^3-240y^2+135y+240=0\\(9y^2+16y-1)x-6y^3+4y^2+2y-4=0\end{array}\right\},\quad\left.\begin{array}{r}y+2=0\\x^2+(2y+4)x-y^2=0\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{r}y^3-2y^2-y+2=0\\2yx^2-(y^3-2y^2+y+2)x-(2y^4-10y^2+8)=0\end{array}\right\}.$$

575. Les raisonnements par lesquels nous avons établi notre méthode d'élimination supposent nécessairement que les valeurs de x et de y soient des quantités finies, de sorte que si l'on a besoin d'avoir égard aux solutions dans lesquelles la valeur de l'une des inconnues doit être infinie, il faut les chercher directement. Or, la chose est facile, car il n'y aura qu'à diviser tous les termes de chacune des deux équations proposées par la plus haute puissance de x qu'elle renferme, et en faisant ensuite $x=\infty$, on obtiendra deux équations $f(y)=0$ et $F(y)=0$, qui devront avoir pour racines communes toutes les valeurs de y qui, conjointement avec $x=\infty$, vérifieront les équations proposées. On obtiendra donc ces valeurs de y en cherchant le plus grand commun diviseur des polynomes $f(y)$ et $F(y)$, et en résolvant ensuite l'équation formée en égalant ce plus grand commun diviseur à zéro.

On déterminera de la même manière les valeurs de x, qui, conjointement avec $y=\infty$, satisfont aux équations proposées.

576. Supposons actuellement que l'on ait à *résoudre trois équations de degré quelconque à trois inconnues* x, y, z. On éliminera successivement z entre l'une d'elles et chacune des deux autres; ce qui donnera deux équations $\varphi(x,y)=0$ et $\psi(x,y)=0$, qui auront pour solutions communes tous les couples de valeurs de x et de y qui, conjointement avec certaines valeurs de z, peuvent satisfaire aux équations proposées. Si donc α et β sont un de ces couples, on pourra remplacer x et y respectivement par α et par β dans leurs premiers membres, et en égalant à zéro le plus grand commun diviseur des polynomes résultants,

on trouvera les valeurs de z qui sont conjuguées avec ces valeurs α et β de x et de y.

On étendra facilement cette méthode à la résolution de m équations entre m inconnues.

§ II. DES ÉQUATIONS IRRATIONNELLES.

377. Lorsqu'une équation ne renferme que deux radicaux et que l'un d'eux est du deuxième degré, il est facile de faire évanouir ces radicaux et de rendre ainsi l'équation proposée rationnelle. Pour cela on *isolera* dans un membre le radical dont l'indice est le plus grand (**127**), et, en élevant ensuite les deux membres de l'équation résultante à la puissance marquée par cet indice, on obtiendra une nouvelle équation qui ne renfermera plus qu'un seul radical, car la n^{me} puissance d'un binome tel que $a+\sqrt{b}$ est de la forme $P+Q\sqrt{b}$. On traitera donc cette équation comme la proposée, et on obtiendra ainsi une équation rationnelle. Si on a, par exemple, l'équation

$$2\sqrt[5]{x-1}-\sqrt{x-1}-1=0,$$

on en tirera successivement

$$2\sqrt[5]{x-1}=1+\sqrt{x-1},$$

$$32(x-1)=1+5\sqrt{x-1}+10(x-1)+10(x-1)\sqrt{x-1}$$
$$+5(x-1)^2+(x-1)^2\sqrt{x-1};$$

$$32(x-1)=\sqrt{x-1}\,(x^2+8x-4)+5x^2-4,$$

$$5x^2-32x+28=-\sqrt{x-1}\,(x^2+8x-4),$$

et en élevant enfin au carré et transposant ensuite,

$$x^5-10x^4+360x^3-1424x^2+1872x-800=0.$$

378. On pourra encore, d'après ce procédé, rendre rationnelle une équation qui contiendrait deux radicaux, tels que le plus faible des deux indices fût 3. En effet, considérons d'abord l'équation

$$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}+C=0.$$

On en tirera

$$\sqrt[3]{B}+C=-\sqrt[3]{A},$$

puis, en élevant au cube les deux membres de cette équation, on trouvera

$$B+3C\sqrt[3]{B^2}+3C^2\sqrt[3]{B}+C^3=-A.$$

Je fais maintenant passer les termes rationnels dans le deuxième membre et je mets $3C\sqrt[3]{B}$ en facteur commun ; ce qui donnera

$$3C\sqrt[3]{B}(\sqrt[3]{B}+C)=-(A+B+C^3)\,;$$

mais $\sqrt[3]{B}+C=-\sqrt[3]{A}$; donc

$$3C\sqrt[3]{AB}=A+B+C^3\,;$$

ainsi il ne s'agit plus que d'élever les deux membres de cette équation au cube, pour la rendre rationnelle.

579. Soit actuellement l'équation

$$\sqrt[n]{A}+\sqrt[3]{B}+C=0\,:$$

j'isole le terme $\sqrt[n]{A}$ dans le deuxième membre, et j'élève ensuite à la puissance n les deux membres de l'équation résultante; j'obtiendrai ainsi une équation dont le premier membre ne renfermera pas d'autres radicaux que $\sqrt[3]{B}$ et $\sqrt[3]{B^2}$; car les exposants des puissances auxquelles on aura élevé $\sqrt[3]{B}$ seront de la forme $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$, et $(\sqrt[3]{B})^{3k}=B^k$, $(\sqrt[3]{B})^{3k+1}=B^k\sqrt[3]{B}$, et $(\sqrt[3]{B})^{3k+2}=B^k\sqrt[3]{B^2}$. Cette équation pourra donc être mise sous la forme

$$D+E\sqrt[3]{B}+F\sqrt[3]{B^2}=0.$$

On en tirera successivement

$$BE^3+3DE^2\sqrt[3]{B^2}+3D^2E\sqrt[3]{B}+D^3=-B^2F^3,$$

$$BE^3+D^3+B^2F^3-3BDEF=0.$$

580. Mais si l'équation proposée renfermait seulement trois radicaux, à moins qu'ils ne fussent tous du deuxième degré, la méthode précédente ne réussirait plus. Dans ce cas, on égalera

chaque radical à une inconnue, on élèvera ensuite les deux membres de chacune des équations ainsi formées à la puissance marquée par l'indice du radical unique qui s'y trouve, et on remplacera, dans la proposée, chaque radical par la lettre qui la représente. On formera de cette manière autant d'équations plus une que l'on a d'inconnues auxiliaires, et comme elles sont commensurables, on n'aura qu'à éliminer entre elles toutes ces inconnues auxiliaires pour obtenir une équation rationnelle en x seulement.

Soit, par exemple, l'équation

$$\sqrt[3]{2-x}-\sqrt{x-1}-1=0 \qquad [6].$$

Je pose

$$\sqrt[3]{2-x}=y, \quad \text{d'où} \quad y^3+x-2=0 \qquad [7];$$

$$\sqrt{x-1}=z, \quad \text{d'où} \quad z^2-x+1=0 \qquad [8];$$

et par conséquent

$$y-z-1=0 \qquad [9].$$

J'élimine y entre [7] et [9], ce qui me donne

$$z^3+3z^2+3z+x-1=0 \qquad [10];$$

puis j'applique à cette dernière et à l'équation [8] la méthode d'élimination par le plus grand commun diviseur et je trouve ainsi pour équation finale

$$(x-1)(x^2-12x+20)=0 \begin{cases} x=1, \\ x=2, \\ x=10. \end{cases}$$

Or, en substituant successivement ces valeurs de x dans l'équation proposée, on trouve que la seule valeur $x=1$ la vérifie. Ceci n'a rien de surprenant ; car, quelles que soient les valeurs algébriques des deux radicaux $\sqrt[3]{2-x}$ et $\sqrt{x-1}$ que l'on considère, on aura toujours entre y, z et x les équations [7], [8] et [9] ; de sorte que l'équation [10] doit donner non-seulement les valeurs de x qui vérifient la proposée, mais encore toutes celles qui conviennent à toutes les équations que l'on peut en déduire, en ayant égard aux diverses valeurs de chaque radical, puisque les équations [7] et [8], étant une conséquence

des définitions de la racine cubique et de la racine carrée, doivent donner, pour une même valeur de x, toutes les valeurs et les seules valeurs dont $\sqrt[3]{2-x}$ et $\sqrt{1-x}$ sont susceptibles.

On verra ainsi que $x=1$ vérifie l'équation [6]; que $x=2$ satisfait aux trois équations

$$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1=0,$$
$$\alpha\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1=0,$$
$$\alpha^2\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1=0,$$

dans lesquelles α et α^2 représentent les deux racines cubiques imaginaires de l'unité (355).

Enfin $x=10$ vérifie l'équation

$$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1=0.$$

Donc, si l'on cherche les valeurs de x qui satisfont à l'équation proposée, en ne considérant que les *déterminations arithmétiques* des radicaux qui y entrent, il faudra admettre, parmi les racines de l'équation rationnelle qu'on aura obtenue, celles seulement qui vérifieront cette proposée. Ainsi, dans notre exemple, les valeurs $x=2$ et $x=10$ devraient alors être rejetées, et si l'équation proposée était $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=1$, cette équation serait *impossible*; car il est évident que des deux termes du premier membre, l'un étant >1, leur *somme arithmétique* ne peut pas être égale à 1.

CHAPITRE XVII.

DE LA TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS.

---

581. *L'objet principal de la* TRANSFORMATION *proprement dite* DES ÉQUATIONS *est de déduire d'une équation donnée une deuxième équation dont les racines soient liées avec les siennes par une relation donnée.* Il y a deux cas principaux à examiner, selon que chaque racine de l'équation demandée dépend d'une seule racine de l'équation proposée ou de plusieurs racines de cette équation.

582. 1er CAS. PROBLÈME I. *Trouver une équation dont les racines soient liées avec celles de l'équation* $\varphi(x)=0$, *par la relation* $\psi(x, y)=0$.

Il est évident que si on élimine x entre les équations $\varphi(x)=0$ et $\psi(x, y)=0$, l'équation finale $F(y)=0$ que l'on obtiendra, aura pour racines toutes les valeurs de y qui, conjointement avec certaines valeurs de x, peuvent vérifier les équations proposées ; mais ces valeurs de x sont nécessairement toutes les racines de $\varphi(x)=0$; donc l'équation $F(y)=0$ résout le problème.

Si l'équation $\psi(x, y)=0$ est du premier degré, par rapport à x, l'élimination de cette variable se fera par substitution ; sinon on aura recours à la méthode d'élimination que nous avons exposée dans le chapitre précédent.

Nous allons appliquer ce que nous venons de dire à la résolution de quelques problèmes qui nous seront utiles dans la suite.

583. PROBLÈME II. *Trouver une équation dont les racines soient les produits de celles d'une équation donnée par un facteur connu* k.

Soient

$$\varphi(x)=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+Tx+U=0 \quad [1]$$

l'équation proposée, y une quelconque des racines de l'équa-

tion demandée : on aura entre les racines de ces deux équations la relation

$$y = kx, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{y}{k},$$

de sorte que l'équation cherchée sera

$$\varphi\left(\frac{y}{k}\right) = \frac{y^m}{k^m} + A\frac{y^{m-1}}{k^{m-1}} + B\frac{y^{m-2}}{k^{m-2}} + \ldots + T\frac{y}{k} + U = 0,$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$y^m + Aky^{m-1} + Bk^2y^{m-2} + \ldots + Tk^{m-1}y + Uk^m = 0.$$

La forme de cette équation est très-facile à retenir, car elle est *homogène* par rapport à y et à k, c'est-à-dire que *la somme des exposants de* y *et de* k, *dans chacun de ses termes, est égale à* m.

On peut vérifier très-simplement que les racines de l'équation $\varphi\left(\frac{y}{k}\right) = 0$ sont k fois plus grandes que celles de la proposée $\varphi(x) = 0$. En effet, si α est une racine de cette dernière, on aura l'identité $\varphi(\alpha) = 0$; mais le premier membre de la transformée se réduit précisément à $\varphi(\alpha)$, quand on y remplace y par $k\alpha$; donc $k\alpha$ est une racine de cette transformée.

584. PROBLÈME III. *Transformer une équation*

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Tx + U = 0,$$

qui a des coefficients fractionnaires, en une autre dont tous les coefficients soient entiers, celui du premier terme étant encore l'unité.

On conçoit que si, dans l'équation

$$y^m + Aky^{m-1} + Bk^2y^{m-2} + \ldots + Tk^{m-1}y + Uk^m = 0,$$

que nous venons d'obtenir, on fait k égal au plus simple multiple des dénominateurs des coefficients A, B, C,... U, la transformée n'aura pour coefficients que des quantités entières.

Observons toutefois que l'on pourra souvent donner à k une valeur plus simple que celle que nous venons d'indiquer. Comme il suffit, en effet, que k, k^2, k^3,... k^m renferment respectivement

les facteurs premiers des dénominateurs de A, B, C,... U, à des puissances au moins égales à celles où ils se trouvent dans ces dénominateurs, *on devra poser* k *égal au produit des facteurs premiers différents des dénominateurs de* A, B, C,... U, *et, en comparant les diverses puissances de cette valeur de* k *à ces dénominateurs, on verra si elle suffit pour rendre entiers tous les termes de la transformée, ou quel exposant il faut donner à chacun de ces facteurs premiers, pour que les diverses puissances de* k *soient divisibles par les dénominateurs correspondants.*

Soit, par exemple, l'équation

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{72}x + \frac{7}{48} = 0.$$

La transformée sera

$$y^3 - \frac{3k}{2}y^2 + \frac{5k^2}{72}y + \frac{7k^3}{48} = 0;$$

or, $72 = 2^3.3^2$, $48 = 2^4.3$; je vois donc que si l'on posait $k = 2.3$, k^2 et k^3 ne seraient pas divisibles par 72 et par 48, puisqu'il n'y aurait que deux facteurs 2 dans k^2, et trois dans k^3. Mais si je fais $k = 2^2.3$, tous les coefficients deviendront entiers, et l'équation demandée sera ainsi

$$y^3 - 18y^2 + 10y + 252 = 0.$$

On verra plus tard combien il est important de choisir pour k le plus petit nombre possible.

585. Problème IV. *Former une équation dont les racines soient une certaine puissance de celles d'une équation donnée.*

Soient $\varphi(x) = 0$ l'équation proposée et $y = x^{\frac{p}{q}}$ celle qui doit lier ses racines avec celles de l'équation demandée; on tirera de cette dernière $x^p - y^q = 0$, et il n'y aura qu'à éliminer x entre cette équation et $\varphi(x) = 0$ pour résoudre le problème.

Si p n'est pas plus grand que 3, on tirera de l'équation $x^p - y^q = 0$, $x = y^{\frac{q}{p}}$, et, en substituant cette valeur de x dans la proposée, on trouvera l'équation irrationnelle $\varphi\left(y^{\frac{q}{p}}\right) = 0$; mais il sera facile d'en faire évanouir les radicaux qu'elle renfermera (578).

586. Problème V. *Diminuer de* h *toutes les racines d'une équation donnée* $\varphi(x)=0$.

En représentant par y l'inconnue de l'équation demandée, on devra avoir $y=x-h$, d'où $x=y+h$; de sorte que l'équation cherchée sera $\varphi(y+h)=0$, ou, en développant d'après le théorème de *Taylor* (482).

$$\varphi(h)+\varphi'(h)y+\frac{\varphi''(h)}{1.2}y^2+\ldots+\frac{\varphi^m(h)}{1.2.3\ldots m}y^m=0 \quad [2].$$

Veut-on, par exemple, diminuer de deux unités chacune des racines de l'équation

$$\varphi(x)=x^3-6x^2+7x+3=0:$$

on formera les dérivées successives de son premier membre, ce qui donnera

$$\varphi'(x)=3x^2-12x+7,\quad \frac{\varphi''(x)}{1.2}=3x-6,\quad \frac{\varphi'''(x)}{1.2.3}=1;$$

on fera dans le premier membre de la proposée et dans ses dérivées $x=2$, et on trouvera

$$\varphi(2)=1,\quad \varphi'(2)=-5,\quad \frac{\varphi''(2)}{1.2}=0,\quad \frac{\varphi'''(2)}{1.2.3}=1;$$

par conséquent l'équation demandée est

$$y^3-5y+1=0.$$

587. Problème VI. *Faire évanouir un terme de rang déterminé dans une équation donnée* $\varphi(x)=0$.

Si on pose $x=y+h$, y étant une nouvelle inconnue et h une *indéterminée*, on obtiendra l'équation [2], ou, en renversant l'ordre de ses termes,

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{\varphi^m(h)}{1.2.3\ldots m}y^m+\dfrac{\varphi^{m-1}(h)}{1.2.3\ldots(m-1)}y^{m-1}+\dfrac{\varphi^{m-2}(h)}{1.2.3\ldots(m-2)}y^{m-2}+\ldots\\ +\varphi(h)=0\end{matrix}\right\}[3].$$

Tous les coefficients de cette équation étant des fonctions de h, à l'exception du premier qui est le coefficient même de la plus haute puissance de x, dans la proposée, on voit que pour faire

évanouir un terme de rang déterminé, il faut disposer de l'*indéterminée* h, de manière à rendre nul son coefficient, c'est-à-dire égaler ce coefficient à zéro. On aura ainsi une équation qui ne renfermera que la seule inconnue h et qui en fera par conséquent connaître la valeur; de sorte qu'en substituant, dans l'équation précédente, au lieu de h, le nombre ainsi trouvé, l'évanouissement du terme dont il s'agit s'effectuera.

388. Ainsi pour faire évanouir le deuxième terme, on posera $\frac{\varphi^{m-1}(h)}{1.2.3\ldots(m-1)}=0$, ou, ce qui revient au même, en supposant que $\varphi(x)=0$ représente l'équation [1],

$$mh+\mathrm{A}=0^{*},\quad \text{d'où}\quad h=-\frac{\mathrm{A}}{m},$$

de sorte que la valeur de x devient ainsi $x=y+\left(\frac{-\mathrm{A}}{m}\right)$; c'est-à-dire que *pour faire évanouir le deuxième terme d'une équation, il faut y remplacer* x *par une nouvelle inconnue augmentée du quotient obtenu en divisant le coefficient du deuxième terme, pris en signe contraire, par l'exposant du premier terme.*

C'est ce que l'on pouvait découvrir *a priori* et d'une manière très-simple. En effet, si l'on forme une équation dont les racines soient égales à celles de la proposée diminuées, chacune, de la m^{me} partie de leur somme (m étant l'exposant du degré de cette proposée), c'est-à-dire de la m^{me} partie du coefficient A

---

* On voit facilement que

$$\varphi'(x)=mx^{m-1}+(m-1)\mathrm{A}x^{m-2}+\ldots,$$

$$\frac{\varphi''(x)}{1.2}=\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\mathrm{A}x^{m-3}+\ldots,$$

$$\frac{\varphi'''(x)}{1.2.3}=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}\mathrm{A}x^{m-4}+\ldots;$$

et, par induction, que

$$\frac{\varphi^{m-1}(x)}{1.2.3\ldots(m-1)}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-m+2)}{1.2.3\ldots(m-1)}x^{m-m+1}$$
$$+\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-m+1)}{1.2\ldots(m-1)}\mathrm{A}=mx+\mathrm{A}.$$

du deuxième terme, pris en signe contraire, il est clair que la somme des racines de cette nouvelle équation sera nulle, et que par conséquent elle n'aura pas de deuxième terme (525). On posera donc $y = x - \left(-\frac{A}{m}\right)$, d'où $x = y + \left(\frac{-A}{m}\right)$, ce qui nous ramène à la règle précédente.

589. L'évanouissement des termes autres que le deuxième dépendra de la résolution d'équations d'un degré supérieur au premier, et ainsi ne pourra pas toujours s'effectuer, si l'on ne veut admettre que des valeurs réelles de h. Cependant on pourra faire disparaître un terme quelconque de rang pair, car son coefficient est de degré impair par rapport à h, et nous savons que toute équation de degré impair a au moins une racine *réelle* (546).

Quant au dernier terme, on ne peut jamais le faire disparaître, car ce dernier terme étant $\varphi(h)$, la détermination de la valeur de h dépendrait de la résolution de l'équation $\varphi(h) = 0$, c'est-à-dire de la résolution même de l'équation proposée.

C'est, au reste, ce que l'on pouvait prévoir ; car, pour que le dernier terme de la transformée soit nul, il faut que l'une de ses racines soit *zéro ;* mais comme elles sont égales à celles de la proposée diminuées de h, il faudra que h soit égale à l'une *quelconque* de ces racines, de sorte que l'équation qui déterminera h ne devant pas donner une des racines de cette proposée plutôt qu'une autre, elle devra les donner *toutes*, et sera par conséquent identique avec la proposée.

Ainsi, l'évanouissement du dernier terme d'une équation ne peut pas conduire à la résolution de cette équation, quoiqu'il permette d'en abaisser le degré.

590. Si l'on voulait faire évanouir deux termes d'une équation, il faudrait égaler à zéro les coefficients des termes correspondants dans l'équation [3] ; mais on aurait ainsi deux équations entre la seule inconnue h, et elles seraient par conséquent incompatibles, à moins qu'il n'existât une relation convenable entre certains coefficients de l'équation proposée.

Si, par exemple, on voulait faire disparaître les termes où y entre à la puissance n et à la puissance p, il faudrait poser

$$\varphi^n(h) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi^p(h) = 0.$$

Or, pour que ces deux équations soient vérifiées par une même valeur de h, il faut et il suffit que leurs premiers membres aient un facteur commun ; on cherchera donc leur plus grand commun diviseur, et on poursuivra le calcul jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un reste indépendant de h; on égalera ce reste à zéro, et on obtiendra ainsi la relation nécessaire et suffisante qui doit exister entre les coefficients de l'équation [1] pour que l'on puisse faire évanouir en même temps les termes où x entre à la puissance n et à la puissance p.

591. On pourrait croire qu'en faisant disparaître d'une équation successivement son deuxième, son troisième, son quatrième,. . terme, on pourrait la ramener à une équation binome, mais ce serait une erreur, parce qu'en voulant faire évanouir le troisième terme, on ferait reparaître le deuxième. Considérons, en effet, l'équation

$$x^m + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots + U = 0$$

qui manque de deuxième terme, et changeons-y x en $x+h$; il viendra, en ordonnant suivant les puissances décroissantes de x (on développera pour cela $(x+h)^m$, $(x+h)^{m-1}$,... par la formule du binome de *Newton*),

$$x^m + mhx^{m-1} + \left[\frac{m(m-1)}{1.2}h^2 + B\right]x^{m-2} + \text{etc.} = 0.$$

Or la valeur de h qui fera disparaître le troisième terme sera différente de zéro, de sorte que la puissance $(m-1)^{me}$ de x se trouvera dans l'équation résultante.

592. On ne parviendrait pas non plus à faire évanouir deux termes en posant $x = y + h + h'$, h et h' étant deux indéterminées, parce que les coefficients des diverses puissances de y dans la transformée seraient composés en $(h+h')$ comme ceux

de l'équation [3] le sont en h, de sorte que les équations formées en égalant deux coefficients à zéro ne renfermeraient encore qu'une seule inconnue représentée par $(h+h')$, au lieu de l'être par h. On ne peut donc pas déterminer séparément h et h' et faire ainsi évanouir deux termes.

Si l'on posait $x=ky+h$, h et k étant deux indéterminées, pourrait-on faire évanouir deux termes? Non, car cela reviendrait à faire d'abord $x=z+h$, et à poser ensuite $z=ky$: or, par la première transformation, on pourrait faire disparaître un terme, mais la deuxième ne saurait en faire évanouir aucun.

Un géomètre russe, nommé *Tschirnaüss*, avait eu l'idée de poser $x^2+hx+k=y$, et de cette manière il était parvenu à faire évanouir deux termes dans les équations du troisième et du quatrième degré, ce qui lui avait permis de ramener la première à une équation binome et la deuxième à une équation bicarrée. Mais, en appliquant cette méthode à l'équation du cinquième degré, il a trouvé que les équations desquelles dépend la détermination de h et de k sont d'un degré plus élevé que celle que l'on veut résoudre.

593. 2ᵉ Cas. Nous allons examiner le cas où chaque racine de l'équation cherchée est liée avec plusieurs racines de la proposée. Mais, dans la multitude des questions où cela peut avoir lieu, nous ne considérerons que les suivantes, qui sont en effet les plus remarquables.

594. Problème VII. *Former une équation qui ait pour racines toutes les différences qui existent entre chaque racine d'une équation donnée* $\varphi(x)=0$ *et toutes les autres; c'est ce qu'on appelle* l'équation aux différences *des racines de* $\varphi(x)=0$.

Soient x' et x'' deux racines quelconques de l'équation proposée, y une quelconque des racines de l'équation aux différences demandée; on aura

$$y=x'-x'' \qquad [4],$$

avec les deux équations de condition

$$\varphi(x')=0 \quad [5] \qquad \text{et} \qquad \varphi(x'')=0 \quad [6],$$

pour exprimer que x' et x'' sont deux racines de la proposée. Or, si on élimine ces quantités x' et x'' entre ces trois équations, on obtiendra une équation finale $F(y)=0$, qui aura pour racines toutes les valeurs de y qui, conjointement avec certaines valeurs de x' et de x'', peuvent satisfaire aux équations [4], [5] et [6], mais ces valeurs de x' et de x'' ne peuvent être que des racines de l'équation $\varphi(x)=0$; donc l'équation $F(y)=0$ aura pour racines toutes les différences que l'on peut obtenir, en combinant deux à deux, par voie de soustraction, toutes les racines de la proposée; et comme rien n'exprime que x'' soit différente de x', parmi ces différences se trouveront toutes celles qui existent entre chaque racine et elle-même, de sorte que l'équation $F(y)=0$ aura m racines nulles qui seront des *solutions étrangères* à la question. Il faudra donc, pour avoir l'équation cherchée, diviser $F(y)$ par y^m et égaler à zéro le quotient de cette division.

Pour éliminer x' et x'' entre les équations [4], [5] et [6], je substitue d'abord dans la deuxième la valeur de x' tirée de la première, ce qui donne $\varphi(x''+y)=0$, de sorte qu'il s'agit actuellement d'éliminer x'' entre

$$\varphi(x''+y)=0 \quad [7] \qquad \text{et} \qquad \varphi(x'')=0 \quad [6].$$

Mais j'observe que l'on peut, au système de ces deux équations, substituer le système formé de la deuxième et de l'équation obtenue en les retranchant membre à membre, c'est-à-dire de l'équation

$$\varphi(x''+y)-\varphi(x'')=0.$$

Or, cette dernière étant satisfaite par $y=0$, son premier membre est divisible par y, et il en résulte que le système des équations [6] et [7] se décompose dans les deux systèmes suivants (557) :

$$\left.\begin{matrix} y=0 \\ \varphi(x'')=0 \end{matrix}\right\} \quad \text{et} \quad \left.\begin{matrix} \dfrac{\varphi(x''+y)-\varphi(x'')}{y}=0 \\ \varphi(x'')=0 \end{matrix}\right\} [8],$$

de sorte que, si l'on représente par $f(y)=0$ l'équation finale du

deuxième système, comme celle du premier est $y^m=0$ (559), on aura

$$F(y)=y^m.f(y)=0\,;\quad \text{donc}\quad f(y)=0$$

est l'équation aux différences.

Mais il est évident qu'éliminer x'' entre les deux équations qui forment le système [8] revient à éliminer x entre les équations

$$\varphi(x)=0$$

et

$$\frac{\varphi(x+y)-\varphi(x)}{y}=\varphi'(x)+\frac{\varphi''(x)}{1.2}y+\frac{\varphi'''(x)}{1.2.3}y^2+\ldots+\frac{\varphi^m(x)}{1.2.3\ldots m}y^{m-1}=0\,:$$

Donc *pour former l'équation aux différences des racines d'une équation donnée, il faut changer dans cette équation* x *en* x+y, *développer le résultat suivant les puissances ascendantes de* y, *d'après le théorème de* Taylor, *supprimer le premier terme, puis diviser le reste par* y *et éliminer enfin* x *entre l'équation résultante et la proposée.*

Cette équation aux différences doit avoir évidemment autant de racines que l'on peut former d'arrangements deux à deux avec m lettres; donc elle sera du degré $m(m-1)$. Si de plus on observe que ces racines sont deux à deux égales et de signes contraires, car deux racines x' et x'' de la proposée produisent les différences $x'-x''$ et $x''-x'$, on verra qu'elle ne devra pas changer, lorsqu'on y remplacera y par $-y$, et qu'en conséquence elle ne pourra renfermer que des termes de degré pair. Si donc on pose $m(m-1)=2n$, l'équation aux différences sera de la forme

$$y^{2n}+Ay^{2n-2}+By^{2n-4}+\ldots+Ty^2+U=0 \qquad [9].$$

Remarquons qu'il n'y a pas des équations aux différences de tous les degrés; car de $m(m-1)=2n$, on tire $m=\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}$, et comme m doit être un nombre entier, il faut et il suffit que $1+8n$ soit un carré parfait. Ainsi n ne saurait être égal, ni à 2, ni à 4, ni à 5, etc.

L'équation [9] se ramène à une autre de degré sous-double, en posant $y^2 = z$, ce qui donne

$$z^n + Az^{n-1} + Bz^{n-2} + \ldots + Tz + U = 0 \quad [10].$$

Cette équation se nomme L'ÉQUATION AUX CARRÉS DES DIFFÉRENCES *des racines de la proposée*, parce que l'équation $y^2 = z$ exprime que les racines de l'équation [10] sont les carrés de celles de l'équation [9].

395. Cette équation aux carrés des différences des racines de l'équation $\varphi(x) = 0$ fournit, sur la nature des racines de celle-ci, des indications qui étaient fort importantes avant que M. *Sturm* eût publié le beau théorème que nous ferons connaître plus tard. En effet, si l'équation $\varphi(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, les carrés de leurs différences prises deux à deux seront réels et positifs, et par conséquent l'équation en z sera complète et n'aura que des variations (**331**). Réciproquement, si l'équation [10] est complète et n'a que des variations, la proposée aura toutes ses racines réelles. Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi ; cette proposée aura donc au moins deux racines imaginaires de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $\alpha - \beta\sqrt{-1}$; leur différence est $2\beta\sqrt{-1}$, et le carré de cette différence est égal à $-4\beta^2$; d'où l'on voit que, si l'équation $\varphi(x) = 0$ avait un couple de racines imaginaires, l'équation aux carrés des différences de ses racines aurait une racine réelle négative, ce qui ne se peut, puisqu'elle est complète et n'a que des variations (**332**, 1°). Donc, *pour qu'une équation ait toutes ses racines réelles, il faut et il suffit que l'équation aux carrés des différences de ses racines soit complète et n'ait que des variations.*

Il suit de là que l'on obtiendra les relations qui doivent exister entre les coefficients indéterminés d'une équation, pour que toutes ses racines soient réelles, en écrivant que les coefficients de l'équation aux carrés des différences de ses racines sont alternativement positifs et négatifs. On trouvera ainsi $\frac{m(m-1)}{2}$ conditions, mais il pourra se faire que plusieurs d'entre elles

rentrent les unes dans les autres, ainsi que nous en donnerons un exemple tout à l'heure (598).

596. *Lorsque l'équation aux carrés des différences n'a que des permanences, la proposée n'a que des racines imaginaires si elle est de degré pair, et elle a une seule racine réelle si elle est de degré impair;* car, si cette proposée avait deux racines réelles, l'équation [10] admettrait une racine réelle positive, ce qui ne peut pas s'accorder avec notre hypothèse (532, 2°).

Donc, en écrivant que tous les coefficients de l'équation [10] sont positifs, on aura des conditions *suffisantes*, pour que la proposée ait toutes ses racines imaginaires, si elle est de degré pair, ou pour qu'elle n'ait qu'une seule racine réelle, si l'exposant de son degré est impair.

597. *Si l'équation aux carrés des différences n'est pas complète, ou si elle a des permanences et des variations, on en conclut immédiatement qu'elle a des racines imaginaires*, mais on ne peut rien dire de *précis* sur leur nombre. Il résulte seulement de la *règle des signes de* Descartes que *la proposée n'a pas plus de couples de racines imaginaires qu'il n'y a de variations dans la transformée en $-z$ de l'équation aux carrés des différences :* car, si elle en avait davantage, comme à chacun de ces couples correspond une racine réelle négative de l'équation en z, il s'ensuivrait que cette équation [10] aurait plus de racines négatives qu'il n'y a de variations dans sa transformée en $-z$, ce qui ne se peut (533).

598. Exemple. *Former l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation* $\varphi(x)=x^3+px+q=0$ *et trouver ensuite les relations qui doivent exister entre ses coefficients pour que ses trois racines soient réelles.* Nous ferons les calculs suivants :

$$\varphi'(x)=3x^2+p,\quad \frac{\varphi''(x)}{1.2}=3x,\quad \frac{\varphi'''(x)}{1.2.3}=1,$$

$$\frac{\varphi(x+y)-\varphi(x)}{y}=3x^2+p+3xy+y^2=0.$$

Ainsi il faut éliminer x entre cette dernière équation et la proposée.

$x^3 \quad +px \quad +q$	$x-y$	$3x+(3y^3+3py-9q)$
$3x^3 \quad +3px+3q$	$3x^2+3yx+y^2$	$2y^2 \mid x+y^3$
$-3yx^2-y^2 \mid x$	$+p$	$+2p \mid +py$
$-p$	$2y^2 \mid 3x^2+6y^3 \mid x+2(y^3+p)^2$	$+3q$
$+3y^2x+y^3$	$+2p \mid +6py$	
$+py$	$-3y^3 \mid x$	
$2y^2 \mid x+y^3$	$-3py$	
$+2p \mid +py$	$-9q$	
$+3q$	$3y^3 \mid 2y^2 \mid x+4(y^2+p)^3$	
	$+3py \mid +2p$	
	$-9q$	

Le terme indépendant de x sera $-3(y^3+py-3q)(y^3+py+3q)$ $+4(y^2+p)^3$, et en effectuant les calculs, on trouvera que l'équation aux différences est

$$y^6+6py^4+9p^2y^2+(4p^3+27q^2)=0.$$

L'équation aux carrés des différences est par conséquent

$$z^3+6pz^2+9p^2z+(4p^3+27q^2)=0 \qquad [11].$$

Pour que cette équation n'ait que des variations, il faut que l'on ait

$$p<0 \quad \text{et} \quad 4p^3+27q^2<0,$$

et comme la première de ces conditions est comportée par la suivante, il s'ensuit que la seule condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $x^3+px+q=0$ ait ses trois racines réelles est $4p^3+27q^2<0$.

Si $4p^3+27q^2>0$, la transformée en $-z$ de l'équation [11] aura au moins une variation, et par conséquent la proposée aura deux racines imaginaires. Cette condition est donc *suffisante* pour qu'il en soit ainsi. Elle est de plus *nécessaire*, car si $4p^3+27q^2 \not> 0$, l'équation $x^3+px+q=0$ a ses trois racines réelles.

599. La méthode que nous avons donnée précédemment pour calculer l'équation aux différences s'applique à la formation de *l'équation aux sommes, aux produits et aux quotients deux à deux des racines d'une équation donnée* $\varphi(x)=0$. On verra, en répétant les raisonnements du n° **594**, que

l'équation aux sommes s'obtiendra par l'élimination de x *entre les deux équations*

$$\varphi(x)=0 \quad \text{et} \quad \frac{\varphi(y-x)-\varphi(x)}{y-2x}=0.$$

En effectuant cette élimination, on trouvera que le reste Y, qui précédera le reste indépendant de x, sera du deuxième degré, par rapport à cette inconnue. En effet, si $y=\beta$ est une racine de l'équation finale, il faudra qu'en la substituant dans l'équation formée en égalant le reste précédent à zéro, on en tire la valeur correspondante de x. Mais β étant la somme de deux racines de la proposée, cette équation ne doit pas donner l'une de ces racines plutôt que l'autre; donc elle les fera connaître toutes les deux; donc ce reste est du second degré, et par conséquent la véritable équation finale sera $Y^2=0$ (559). Donc l'équation qui aura pour racines les sommes *distinctes* des racines de $\varphi(x)=0$ est $Y=0$.

Dans le cas particulier, où l'équation $\varphi(x)=0$ est du troisième degré, on peut obtenir très-simplement l'équation aux sommes distinctes de ses racines prises deux à deux. Soient en effet

$$x^3-Ax^2+Bx-C=0 \qquad [12]$$

l'équation proposée, et y la somme de deux quelconques de ses racines, la troisième racine sera par conséquent $(A-y)$, de sorte qu'on doit avoir

$$(A-y)^3-A(A-y)^2+B(A-y)-C=0 \qquad [13];$$

mais, si cette équation a lieu, $(A-y)$ est une racine de la proposée, et comme A est la somme de ses trois racines, y est nécessairement la somme des deux autres. L'équation [13] est donc l'équation aux sommes distinctes des racines de l'équation [12].

600. On verra de même que *pour former l'équation aux produits deux à deux des racines de l'équation* $\varphi(x)=0$, *il faudra éliminer* x *entre*

$$\varphi(x)=0 \quad \text{et} \quad \frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)-\varphi(x)}{y-x^2}=0,$$

que l'équation en x et y qui, conjointement avec l'équation en y seule, remplacera ce système, sera du deuxième degré, et que si l'équation proposée est

$$\varphi(x) = x^3 - \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x - \mathrm{C} = 0,$$

l'équation aux produits distincts sera

$$\left(\frac{\mathrm{C}}{y}\right)^3 - \mathrm{A}\left(\frac{\mathrm{C}}{y}\right)^2 + \mathrm{B}\left(\frac{\mathrm{C}}{y}\right) - \mathrm{C} = 0, \text{ ou } y^3 - \mathrm{B}y^2 + \mathrm{AC}y - \mathrm{C}^2 = 0 \text{ [14]}.$$

Exemple. $\varphi(x) = x^3 - 6x + 7$. On trouvera que

$$\frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \varphi(x)}{y - x^2} = \frac{\frac{y^3}{x^3} - 6\frac{y}{x} + 7 - x^3 + 6x - 7}{y - x^2} = 0 = \frac{y^3 - 6x^2y - x^6 + 6x^4}{y - x^2}$$

ou bien, en effectuant la division,

$$\left.\begin{matrix} y^2 + x^2y + x^4 \\ \qquad\qquad - 6x^2 \end{matrix}\right\} = 0.$$

En éliminant x entre cette équation et la proposée, on trouvera

$$\begin{array}{r|l|l}
 & x & x + 7 \\ \cline{2-3}
x^4 + \left.\begin{matrix} y \\ -6 \end{matrix}\right| x^2 \qquad + y^2 & x^3 \quad - 6x \quad + 7 & yx^2 - 7x + y^2 \\
 & yx^3 \quad - 6y\,x + 7y & \\
+ 6x^2 - 7x \qquad & \quad + 7x^2 - y^2 x & \\ \cline{1-2}
y\,x^2 - 7x + y^2 & \quad 7yx^2 - \left.\begin{matrix} y^3 \\ -6y^2 \end{matrix}\right| x + 7y^2 & \\
 & \qquad + 49\;\; x - 7y^2 & \\ \cline{2-2}
 & (-y^3 - 6y^2 + 49)x &
\end{array}$$

On voit que le reste du premier degré en x est divisible par $(-y^3 - 6y^2 + 49)$: on supprime ce facteur, et on divise, en conséquence, le diviseur $yx^2 - 7x + y^2$ par x, ce qui donne y^2 pour reste. Mais comme on a introduit le facteur y, pour rendre possible la deuxième division, et que ce facteur est premier avec le coefficient du second terme du diviseur correspondant, ce facteur introduirait des solutions étrangères (369), de sorte qu'il faut le supprimer, dans le reste indépendant de x, ce qui réduit ce reste à l'unité. Les solutions du système

$$x^3 - 6x + 7 = 0 \quad \text{et} \quad y^2 + x^2y + x^4 - 6x^2 = 0,$$

seront donc celles mêmes du système

$$y^3+6y^2-49=0 \quad \text{et} \quad yx^2-7x+y^2=0.$$

Or, à chaque valeur de y correspondront ainsi deux valeurs de x, de sorte que *la véritable équation finale* de ce système est $(y^3+6y^2-49)^2=0$. Telle est donc l'équation qui a pour racines *tous* les produits deux à deux que l'on peut former en multipliant successivement chaque racine de la proposée $x^3-6x+7=0$ par toutes les autres. Mais comme ces produits sont égaux deux à deux, il en résulte que l'équation aux produits *distincts* est

$$\sqrt{(y^3+6y^2-49)^2}=0, \quad \text{ou} \quad y^3+6y^2-49=0,$$

comme on peut le vérifier facilement en faisant $A=0$, $B=-6$ et $C=-7$ dans l'équation [14].

601. Quant à l'équation aux quotients, on l'obtiendra en éliminant x entre les équations

$$\varphi(x)=0 \quad \text{et} \quad \frac{\varphi(xy)-\varphi(x)}{y-1}=0.$$

Elle sera du degré $m(m-1)$, mais comme ses racines seront réciproques (car, si $\frac{x'}{x''}$ est une de ses racines, $\frac{x''}{x'}$ en est une aussi), elle pourra s'*abaisser* à une équation de degré sous-double, c'est-à-dire du degré $\frac{m(m-1)}{2}$, ainsi que nous le verrons bientôt (chap. XIX, § 1).

CHAPITRE XVIII.

DES RACINES ÉGALES DES ÉQUATIONS.

602. *L'objet de la théorie des racines égales est de ramener la résolution d'une équation, qui a des racines égales, à la résolution de plusieurs équations partielles, dont toutes les racines soient inégales, et qui soient telles que chacune ait pour racines toutes celles de la proposée, dont le degré de multiplicité est le même, et indique, par son numéro d'ordre, quel est ce degré de multiplicité.*

Soit $\varphi(x)=0$ une équation qui a n racines égales à a, p racines égales à b, q racines égales à c, etc., de sorte que

$$\varphi(x)=(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q\dots(x-h)(x-k)=0 \quad [1].$$

Si l'on observe que les dérivées de $(x-a)^n$, $(x-b)^p$, $(x-c)^q$,... sont respectivement $n(x-a)^{n-1}$, $p(x-b)^{p-1}$, $q(x-c)^{q-1}$,... on verra (484) que

$$\begin{aligned}\varphi'(x)=\ & n(x-a)^{n-1}(x-b)^p\ (x-c)^q\ \dots(x-k)\\ &+p(x-a)^n\ (x-b)^{p-1}(x-c)^q\ \dots(x-k)\\ &+q(x-a)^n\ (x-b)^p\ (x-c)^{q-1}\dots(x-k)\\ &\ \vdots\\ &+\ (x-a)^n\ (x-b)^p\ (x-c)^q\ \dots(x-h),\end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même, que

$$\varphi'(x)=n\frac{\varphi(x)}{x-a}+p\,\frac{\varphi(x)}{x-b}+q\,\frac{\varphi(x)}{x-c}+\dots+\frac{\varphi(x)}{x-k} \quad [2].$$

Cette égalité nous montre que

$$(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}$$

est le plus grand commun diviseur de $\varphi(x)$ et de $\varphi'(x)$, car c'est le produit de *tous* les facteurs premiers communs à ces deux polynomes. En effet, aucun des facteurs *simples* de $\varphi(x)$, tel

que $(x-k)$ ne divise $\varphi'(x)$, puisqu'il divise tous les termes de cette dérivée à l'exception d'un seul $\frac{\varphi(x)}{x-k}$, et aucun de ses facteurs multiples ne peut entrer dans un diviseur de $\varphi'(x)$ avec un exposant aussi grand que celui qu'il a dans $\varphi(x)$, car $(x-a)^n$, par exemple, divise tous les termes de $\varphi'(x)$, sauf le terme $n\frac{\varphi(x)}{x-a}$. Donc

Quand une équation a des racines égales, son premier membre et sa dérivée ont un plus grand commun diviseur qui est le produit de tous les facteurs correspondants aux racines multiples de l'équation proposée, affectés chacun d'un exposant moindre d'une unité que celui qu'il a dans cette proposée; et si l'équation n'a pas de racines égales, son premier membre et sa dérivée sont premiers entre eux*, car n, p, q étant alors égaux à l'unité, le plus grand commun diviseur $(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}$ se réduit alors à l'unité.

---

* Ce théorème découle très-naturellement de la règle que nous avons donnée pour former l'équation aux différences. En effet, il est d'abord évident que si une équation a des racines égales, l'équation aux différences de ses racines aura des racines nulles, et qu'elle en aura autant que l'on peut former d'arrangements avec les racines égales de chaque espèce prises deux à deux (ainsi l'équation aux différences des racines de $(x-a)^4(x-b)^3(x-c)=0$ aura $4.3+3.2=18$ racines nulles). Réciproquement, si l'équation aux différences $f(y)=0$ a des racines nulles, la proposée $\varphi(x)=0$ en aura d'égales. Cela posé, l'équation $f(y)=0$ étant l'équation finale (526) qui provient de l'élimination de x entre les équations

$$\varphi(x)=0 \quad \text{et} \quad \varphi'(x)+\frac{\varphi''(x)}{1.2}y+\frac{\varphi'''(x)}{1.2.3}y^2+\ldots=0 \qquad [x],$$

on voit que si $\varphi(x)=0$ a des racines égales, $y=0$ est une valeur propre à satisfaire à ces deux équations. Puis donc que la seconde se réduit alors à $\varphi'(x)=0$, *il faut nécessairement que les équations $\varphi(x)=0$ et $\varphi'(x)=0$ aient une racine commune, et qu'ainsi leurs premiers membres aient un commun diviseur.* La réciproque est vraie; car, si $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$ ont un facteur commun $(x-\alpha)$, les équations $[x]$ seront vérifiées par $x=\alpha$ et $y=0$; donc $y=0$ sera une racine de l'équation finale $f(y)=0$, c'est-à-dire de l'équation aux différences; donc la proposée aura des racines égales.

Réciproquement, *s'il existe un commun diviseur entre le premier membre d'une équation et sa dérivée, cette équation aura des racines égales*, sans quoi ces deux polynomes seraient premiers entre eux; *et si le premier membre d'une équation est premier avec sa dérivée, cette équation n'a pas de racines égales*, sans quoi ces deux polynomes auraient un facteur commun.

C'est sur ce théorème qu'est fondée la méthode des racines égales.

603. On commencera par chercher le plus grand commun diviseur entre le premier membre de l'équation proposée et sa dérivée, et si l'on n'en trouve pas, on conclura que cette équation n'a pas de racines égales.

Supposons que l'on en trouve un : on sera sûr alors que l'équation a de pareilles racines. Représentons par X_1 le produit des facteurs correspondants aux racines inégales de la proposée, et en général par X_n le produit de ses facteurs de l'ordre n, mais élevés seulement à la première puissance* : on aura donc

$$\varphi(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 X_4^4 X_5^5,$$

en supposant qu'il n'y ait pas de racines dont le degré de multiplicité surpasse le cinquième. Cette hypothèse, comme on va le voir, n'ôtera à la méthode rien de sa généralité.

Le plus grand commun diviseur D_1 entre $\varphi(x)$ et sa dérivée $\varphi'(x)$ sera le produit de tous les facteurs multiples de $\varphi(x)$, affectés chacun d'un exposant moindre d'une unité que celui qu'il a dans $\varphi(x)$; donc

$$D_1 = X_2 X_3^2 X_4^3 X_5^4.$$

Si maintenant j'opère sur D_1 comme sur $\varphi(x)$; sur le plus grand commun diviseur D_2 que je trouverai ainsi, encore de la même manière, et ainsi de suite, je finirai par obtenir un plus grand commun diviseur qui sera le produit des facteurs du plus haut

* De telle sorte que si la proposée était $(x-a)(x-b)(x-c)^2(x-d)^4(x-e)^4=0$, on aurait $X_1=(x-a)(x-b)$, $X_2=x-c$, $X_3=1$, $X_4=(x-d)(x-e)$.

degré de multiplicité qui sont dans $\varphi(x)$, et j'en serai averti parce que le plus grand commun diviseur sera premier avec sa dérivée, de sorte que le calcul s'arrêtera là. Nous trouverons ainsi la suite d'équations

$$D_2 = X_3 X_4^2 X_5^3;$$
$$D_3 = X_4 X_5^2;$$
$$D_4 = X_5.$$

Cela fait, nous diviserons $\varphi(x)$ par D_1, D_1 par D_2, D_2 par D_3, et enfin D_3 par D_4, et en appelant Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 les quotients correspondants, nous aurons

$$Q_1 = X_1 X_2 X_3 X_4 X_5,$$
$$Q_2 = X_2 X_3 X_4 X_5,$$
$$Q_3 = X_3 X_4 X_5,$$
$$Q_4 = X_4 X_5,$$
$$D_4 = X_5.$$

En divisant enfin le deuxième membre de chacune de ces équations par celui de la suivante, et en égalant à zéro les quotients ainsi obtenus, on formera les équations

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0, \quad X_4 = 0, \quad D_4 = X_5 = 0.$$

Les racines de ces diverses équations sont toutes inégales ; chacune a pour racines toutes celles de l'équation $\varphi(x) = 0$, dont le degré de multiplicité est le même, et son numéro d'ordre est précisément égal à l'exposant de ce degré de multiplicité.

EXEMPLE. Soit $\varphi(x) = x^5 - 2x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 16x - 32 = 0$. On trouvera $D_1 = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$; $D_2 = x - 2$.
Puis

$$\frac{\varphi(x)}{D_1} = Q_1 = x^2 - 4; \quad \frac{D_1}{D_2} = Q_2 = x^2 - 4; \quad D_2 = x - 2;$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = X_1 = 1; \quad \frac{Q_2}{D_2} = X_2 = x + 2 = 0; \quad D_2 = X_3 = x - 2 = 0.$$

Ainsi l'équation proposée a deux racines égales à -2 et trois racines égales à 2.

604. Si l'on trouvait que le plus grand commun diviseur D_1

entre $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$ est du deuxième degré, on examinerait si ce plus grand commun diviseur est ou n'est pas un carré parfait. Dans le premier cas, on en conclurait que la racine *double* de l'équation $D_1=0$ entre *trois* fois dans la proposée, et en égalant à zéro le quotient de la division de $\varphi(x)$ par $(\sqrt{D_1})^3$, on formerait une équation dont les racines seraient toutes les racines simples de la proposée. Si D_1 n'est pas un carré parfait, chacune des racines de $D_1=0$ entrera deux fois dans la proposée, et en conséquence on divisera $\varphi(x)$ par D_1^2 et on égalera à zéro le quotient de cette division.

603. La méthode précédente exige des calculs qui deviennent très-longs, lorsque l'équation proposée est d'un degré un peu élevé, aussi est-il important de n'y avoir recours qu'autant que la chose est indispensable. Or, j'observe que *si une équation a une seule racine multiple d'un certain ordre et que ses coefficients soient rationnels, cette racine est commensurable*, car elle sera la racine unique d'une de nos équations partielles $X_1=0$, $X_2=0$, $X_3=0$,... lesquelles sont évidemment rationnelles.

Il suit de là 1° qu'*une équation du troisième degré dont toutes les racines sont incommensurables ne peut pas en avoir d'égales*, car elle ne saurait avoir qu'une seule racine *double* ou une seule racine *triple*.

2° Qu'*une équation du quatrième degré dont les racines sont incommensurables ne peut avoir pour racines multiples que deux racines doubles;* mais alors son premier membre est un carré parfait. On verra donc si cette condition est remplie : si elle l'est, l'équation s'abaissera à une équation du deuxième degré, qu'il sera facile de résoudre. Si son premier membre n'est pas un carré parfait, toutes ses racines sont inégales.

Exemple I. Soit l'équation $x^4-2x^3-x^2+2x+1=0$. J'extrais la racine carrée de son premier membre et je trouve que x^2-x-1 est sa racine *exacte*. Je résous donc l'équation $x^2-x-1=0$, et j'en conclus que ses racines $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ entrent chacune deux fois dans la proposée.

EXEMPLE II. Soit encore l'équation $x^4 - x^2 - 2x - 1 = 0$: son premier membre ne saurait être un carré parfait, car il manque du terme en x^3 et renferme la première puissance de x; de sorte que cette équation ne peut pas avoir de racines incommensurables égales.

3° *Une équation du cinquième degré, dont les racines sont incommensurables, ne peut pas en avoir d'égales*, car elle ne saurait admettre une seule racine d'un certain degré de multiplicité, et si elle avait deux racines *doubles*, elle en aurait une seule *simple*.

On voit donc que *l'on n'aura jamais à appliquer la* MÉTHODE DES RACINES ÉGALES *qu'à des équations d'un degré supérieur au cinquième;* car, on peut toujours, comme on le verra plus tard, déterminer facilement les racines commensurables égales ou inégales d'une équation donnée, et former ensuite une deuxième équation qui ait pour racines les seules racines incommensurables et imaginaires de l'équation proposée.

606. On propose quelquefois de *décomposer une équation* $\varphi(x) = 0$, *qui a des racines égales, en deux autres, dont l'une ne renferme que les racines simples de cette proposée et dont l'autre admette toutes ses racines multiples, prises chacune une fois seulement.* Ce problème est résolu au n° 603, puisque nous y avons formé les équations $X_1 = 0$ et $X_2X_3X_4X_5 = 0$; mais on peut obtenir ces deux équations plus rapidement. Pour y parvenir, on formera d'abord le polynome $Q_1 = X_1X_2X_3X_4 \ldots$; puis en cherchant le plus grand commun diviseur d_1 entre Q_1 et $D_1 = X_2X_3^2X_4^3 \ldots$ et en égalant d_1 à zéro, on obtiendra l'une des équations demandées $X_2X_3X_4 \ldots = 0$. Il ne s'agira plus, pour avoir l'autre, que d'égaler à zéro le quotient de la division de Q_1 par d_1, ce qui donnera $X_1 = 0$.

607. Le théorème sur lequel repose la *méthode des racines égales* donne le moyen de reconnaître si une racine connue a d'une équation $\varphi(x) = 0$ est une racine multiple de cette équation, et quel est son degré de multiplicité. Il suit, en effet, de ce théorème que le facteur $(x - a)$ devra entrer aux puissance

$(n-1)^{me}$, $(n-2)^{me}$, ... troisième, deuxième, première dans les dérivées respectives $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$,...$\varphi^{n-3}(x)$, $\varphi^{n-2}(x)$, $\varphi^{n-1}(x)$, et à la puissance zéro dans $\varphi^{n}(x)$, s'il se trouve à la n^{me} dans $\varphi(x)$. Par conséquent, toutes ces fonctions s'évanouiront, à l'exception de $\varphi^{n}(x)$, par l'hypothèse de $x=a$. D'où l'on voit que *pour trouver le degré de multiplicité de la racine* a, *il n'y a qu'à former les dérivées successives de l'équation proposée* $\varphi(x)=0$, *et l'indice de la première dérivée qui ne s'anéantira pas, en y faisant* $x=a$, *sera l'exposant du degré de multiplicité de cette racine.*

Exemple. *Combien l'équation* $\varphi(x)=x^5-6x^4+11x^3-2x^2-12x+8=0$ *a-t-elle de racines égales à* 2?

$$\varphi'(x)=5x^4-24x^3+33x^2-4x-12;\quad x=2 \text{ donne } \varphi'(2)=0;$$

$$\frac{\varphi''(x)}{1.2}=10x^3-36x^2+33x-2;\qquad \frac{\varphi''(2)}{1.2}=0;$$

$$\frac{\varphi'''(x)}{1.2.3}=10x^2-24x+11;\qquad \frac{\varphi'''(2)}{1.2.3}=3.$$

Il y a donc trois racines égales à 2.

608. Problème I. *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes qui doivent exister entre les coefficients indéterminés de l'équation* $\varphi(x)=0$, *pour que ses* m *racines soient toutes égales.*

On voit d'abord que toutes les racines de l'équation proposée devant être égales, son premier membre sera la m^{me} puissance du binome correspondant à cette racine multiple; mais alors la dérivée de ce premier membre sera égale à m fois la $(m-1)^{me}$ puissance de ce binome; donc il faut *que le premier membre de l'équation proposée soit divisible par sa dérivée.*

Cette condition est suffisante; car, si elle est remplie, $\varphi'(x)$ sera alors le plus grand commun diviseur D_1 de $\varphi(x)$ et de $\varphi'(x)$; mais le quotient de la division de $\varphi(x)$ par D_1 doit être le produit des facteurs du premier degré correspondants aux racines de chaque espèce; donc, puisqu'il est du premier degré, on doit en conclure que la proposée n'a qu'une seule espèce de racines, et qu'ainsi ses m racines sont égales.

En conséquence, on effectuera la division de $\varphi(x)$ par $\varphi'(x)$, et on s'arrêtera à un reste du degré $(m-2)$, lequel sera de la forme

$$A_1x^{m-2}+A_2x^{m-3}+A_3x^{m-4}+\ldots+A_{m-1},$$

Ce reste devant être nul quelle que soit x, on égalera chacun de ses coefficients à zéro, et on formera ainsi les $(m-1)$ équations de condition demandées,

$$A_1=0,\ A_2=0,\ A_3=0,\ldots A_{m-1}=0.$$

609. Exemple. *Appliquer cette règle à l'équation* $x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S=0$.

La dérivée du premier membre de cette équation étant $4x^3+3Px^2+2Qx+R$, on devra, pour éviter les quotients fractionnaires, multiplier le premier et le deuxième dividende partiel, chacun par 4, et on trouvera ainsi pour quotient et pour reste,

$$x+P \quad \text{et} \quad (8Q-3P^2)x^2+(6R-PQ)x+(16S-PR),$$

de sorte que les équations de condition sont

$$8Q-3P^2=0,\ 6R-PQ=0,\ 16S-PR=0.$$

Si l'on demande *quel est le facteur du premier degré correspondant à la racine quadruple de l'équation proposée*, on remarquera que si l'on avait divisé le premier membre de cette équation par $(x-a)^3$, a désignant cette racine, le quotient $(x-a)$ de cette division aurait été la réponse à la question. Or, en multipliant le premier dividende par 4, on a multiplié le quotient et le reste correspondants, chacun par 4; en multipliant ensuite le deuxième dividende partiel par 4, on a encore multiplié le deuxième terme du quotient par 4, de sorte que le quotient du premier membre de l'équation proposée par sa dérivée est $\frac{x}{4}+\frac{P}{16}$; mais la dérivée est égale à $4(x-a)^3$, donc le quotient du premier membre de l'équation proposée par $(x-a)^3$ est $\left(\frac{x}{4}+\frac{P}{16}\right)\times4=x+\frac{P}{4}$; donc le binome $(x-a)$ est égal à $x+\frac{P}{4}$.

610. Problème II. *Trouver les relations qui doivent exister*

entre les coefficients indéterminés d'une équation* $\varphi(x)=0$, *pour qu'elle ait* n *racines égales.

1re SOLUTION. Il résulte du principe établi précédemment (607) que pour que l'équation $\varphi(x)=0$ ait n racines égales, il faut et il suffit que cette équation et ses $(n-1)$ premières dérivées aient une racine commune, et que par conséquent les polynomes $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, ... $\varphi^{n-1}(x)$ aient un facteur commun du premier degré. On cherchera donc le plus grand commun diviseur des deux polynomes du plus faible degré $\varphi^{n-2}(x)$ et $\varphi^{n-1}(x)$ et on poursuivra l'opération jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un reste indépendant de x; on l'égalera à zéro, et on exprimera ensuite que le reste précédent, qui est du premier degré par rapport à x, divise tous les autres polynomes $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, ... $\varphi^{n-3}(x)$. On obtiendra ainsi $(n-1)$ équations de condition qui résoudront le problème.

S'il y a plus ou moins de $(n-1)$ coefficients indéterminés dans $\varphi(x)$, le problème sera indéterminé ou impossible.

Si l'on voulait que l'équation proposée eût k racines de l'ordre n, on exprimerait que le plus grand commun diviseur des polynomes $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$,... $\varphi^{(n-1)}(x)$ est du degré k, ce qui ne saurait présenter aucune difficulté. On obtiendrait alors $(n-1)k$ équations de condition.

611. EXEMPLE. *Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation* $x^3+px^2+qx+r=0$ *ait deux racines égales?*

On trouvera, en divisant le premier membre de cette équation par sa dérivée $3x^2+2px+q$, que le reste du premier degré est $(6q-2p^2)x+9r-pq$; de sorte que l'on aura la condition demandée, en remplaçant x par $\dfrac{9r-pq}{2(p^2-3q)}$ dans la dérivée (66). On trouvera ainsi

$$243r^2-162pqr+36p^3r-9p^2q^2+36q^3=0.$$

Si on suppose $p=0$, on retombe sur la condition connue (551)

$$4q^3+27r^2=0.$$

612. 2e SOLUTION Soit a la racine qui doit entrer n fois dans

l'équation proposée : le premier membre de cette équation devra être divisible par $(x-a)^n$; ainsi on effectuera cette division et on s'arrêtera à un reste du degré $(n-1)$, lequel sera de la forme

$$A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+A_3x^{n-3}+\ldots+A_n.$$

Ce reste devant être nul quelle que soit x, il faut que les coefficients de ses différents termes soient chacun égaux à zéro, de sorte que

$$A_1=0,\ A_2=0,A_3=0,\ldots\ A_n=0.$$

Or j'observe que, si les coefficients indéterminés de l'équation proposée étaient déterminés comme on le demande, ces n équations devraient être vérifiées, lorsqu'on y remplacerait a par sa valeur, de sorte que leurs premiers membres auraient un facteur commun. On cherchera donc le plus grand commun diviseur entre les deux polynomes du plus faible degré par rapport à a, on égalera le reste indépendant de a à zéro, et on exprimera ensuite que le reste précédent, qui est du premier degré, divise tous les autres polynomes, ce qui fera en tout $(n-1)$ équations de condition, *nécessaires* pour que la proposée ait n racines égales. Elles sont aussi *suffisantes* : car, si elles sont remplies, les équations

$$A_1=0,\ A_2=0,\ A_3=0,\ldots\ A_n=0$$

auront une racine commune a, et par conséquent le premier membre de l'équation proposée sera divisible par $(x-a)^n$, de sorte que cette équation aura n racines égales à a.

Appliquons cette méthode à l'équation

$$x^3+px^2+q=0.$$

En divisant le premier membre de cette équation par $x^2-2ax+a^2$, et en égalant les coefficients du reste du premier degré à zéro, on trouvera

$$a(3a+2p)=0,\ \text{d'où}\ \begin{cases}a=0\\3a+2p=0\end{cases},\quad \text{et}\ 2a^3+pa^2-q=0.$$

$a=0$ donne $q=0$; et, en effet, si $q=0$, la proposée a deux racines nulles.

$3a+2p=0$ donne $a=-\frac{2p}{3}$ et en substituant dans la seconde équation, il viendra

$$4p^3+27q=0,$$

qui est la condition demandée (552).

613. Scolie. Il semblerait que le théorème fondamental du n° **602** doit conduire à une solution du problème que nous venons de résoudre; car il résulte de ce théorème que, si l'équation $\varphi(x)=0$ a n racines égales, son premier membre et sa dérivée doivent avoir un commun diviseur du degré $(n-1)$, lequel sera une puissance parfaite de ce degré et réciproquement. En conséquence, on cherchera le plus grand commun diviseur entre $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$, on poursuivra l'opération jusqu'à ce qu'on soit parvenu à un reste du $(n-2)^{me}$ degré, et on égalera les coefficients de ce reste à zéro, ce qui donnera $(n-1)$ équations de condition. Il est évident qu'elles ne sont pas suffisantes, puisqu'elles expriment seulement que $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$ ont un commun diviseur du $(n-1)^{me}$ degré; ainsi elles conviennent également au cas où la proposée devrait avoir $(n-1)$ racines doubles; ou $(n-3)$ racines doubles et une triple; ou $(n-4)$ racines doubles et une quadruple; ou etc. Il faut donc encore exprimer que le dernier diviseur auquel on s'est arrêté est une puissance parfaite du degré $(n-1)$: on obtiendra ainsi $(n-2)$ nouvelles équations de condition (**608**), de sorte que l'on en trouvera en tout $n-1+n-2=2n-3$, ce qui ne s'accorde pas avec les deux solutions que nous avons données plus haut du problème dont il s'agit. En effet, les $(n-1)$ équations de condition établies en égalant à zéro le reste du $(n-2)^{me}$ degré expriment *uniquement* que le reste précédent est commun diviseur de $\varphi(x)$ et de $\varphi'(x)$, et qu'ainsi les racines de l'équation formée en égalant ce commun diviseur à zéro entrent chacune deux fois dans $\varphi(x)$, et comme rien n'indique qu'il y en ait d'égales, on voit qu'en les appelant $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}$, le premier membre $\varphi(x)$ revient à

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2(x-a_3)^2\ldots(x-a_{n-1})^2.X.$$

Or, si l'on pose $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1}$, $\varphi(x)$ deviendra $(x - a_1)^{2n-2}$. X, et on a ainsi exprimé que la proposée a, non pas n, mais $(2n-2)$ racines égales, ce qui, comme nous l'avons vu (610), exige $(2n-3)$ équations de condition.

614. Observons toutefois que cette méthode s'applique au cas où la proposée doit avoir deux racines égales, car en égalant à zéro le reste indépendant de x, que l'on trouve en cherchant le plus grand commun diviseur de $\varphi(x)$ et de $\varphi'(x)$, on exprime que le reste précédent, qui est du premier degré, divise ces deux polynomes, et qu'en conséquence ce facteur entre au second degré dans $\varphi(x)$. Donc

Pour qu'une équation ait deux racines égales, il faut et il suffit que son premier membre et sa dérivée aient un facteur commun du premier degré.

CHAPITRE XIX.

DES ÉQUATIONS SUSCEPTIBLES D'ABAISSEMENT.

---

615. Nous avons vu (605) que la résolution d'une équation qui renferme des racines égales, se ramène à celle d'une suite d'équations qui n'ont plus de racines égales, et qui sont d'un degré inférieur à celui de la proposée. Ce n'est pas là la seule classe d'équations qui soient *susceptibles d'abaissement*. Toutes les fois qu'il existe des relations particulières entre les racines d'une équation, sa résolution peut être ramenée à celle d'une ou de plusieurs équations d'un degré inférieur au sien.

La recherche des caractères auxquels on reconnaît qu'une équation est susceptible d'abaissement, et celle des moyens d'effectuer cet abaissement doivent ainsi faire partie de la théorie de la transformation des équations. Mais on sent que le nombre des questions qui se rapportent à cette recherche n'a pas de limite, de sorte que nous devons considérer seulement celles de ces questions qui sont les plus remarquables. C'est à ce titre que nous allons d'abord nous occuper des *équations réciproques*.

§ I. DES ÉQUATIONS RÉCIPROQUES.

616. *On appelle* ÉQUATION RÉCIPROQUE *celle dont les racines sont réciproques les unes des autres, c'est-à-dire sont telles qu'on les reproduit toutes en divisant l'unité successivement par chacune d'elles.*

617. PROBLÈME. *Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation soit réciproque.*

Nous examinerons d'abord le cas où la proposée est de degré pair. Soit

$$\varphi(x)=x^{2m}+\ldots+P_nx^{2m-n}+\ldots+P_mx^m+\ldots+P_{2m-n}x^n+\ldots+P_{2m}=0,$$

cette équation. Nous représentons en général par P_n le coefficient du terme qui en a n avant lui, et nous avons écrit outre les deux termes extrêmes, deux termes équidistants de ces extrêmes et celui du milieu. Si nous changeons, dans cette équation, x en $\frac{1}{x}$, il est clair qu'on obtiendra toutes les racines de la transformée $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=0$ en divisant l'unité par toutes celles de $\varphi(x)=0$; de sorte que si cette dernière est réciproque, ses racines seront les mêmes que celles de $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=0$, et par conséquent les premiers membres de ces équations seront identiques, quand on aura ramené la dernière à la forme ordinaire. Réciproquement, si les équations $\varphi(x)=0$ et $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=0$ sont identiques, la proposée sera réciproque, car elles auront les mêmes racines, et on reproduira ainsi toutes les racines de $\varphi(x)=0$ en divisant l'unité successivement par chacune d'elles. Donc *la condition nécessaire et suffisante pour que la proposée $\varphi(x)$ soit réciproque, c'est qu'elle puisse être identifiée avec $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=0$.*

Je change donc x en $\frac{1}{x}$, ce qui donne

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^{2m}}+\ldots+\frac{P_n}{x^{2m-n}}+\ldots+\frac{P_m}{x^m}+\ldots+\frac{P_{2m-n}}{x^n}+\ldots+P_{2m}=0,$$

ou, en chassant les dénominateurs, renversant l'ordre des termes et divisant par P_{2m},

$$x^{2m}+\ldots+\frac{P_{2m-n}}{P_{2m}}x^{2m-n}+\ldots+\frac{P_m}{P_{2m}}x^m+\ldots+\frac{P_n}{P_{2m}}x^n+\ldots+\frac{1}{P_{2m}}=0.$$

J'identifie cette équation avec la proposée, et je trouve

$$\frac{P_{2m-n}}{P_{2m}}=P_n,\quad \frac{P_m}{P_{2m}}=P_m,\quad \frac{P_n}{P_{2m}}=P_{2m-n},\quad \frac{1}{P_{2m}}=P_{2m}.$$

La dernière équation donne

$$P_{2m}=\pm 1,$$

et les autres deviennent alors

$$P_n \;=\pm P_{2m-n},$$
$$P_m \;=\pm P_m,$$
$$P_{2m-n}=\pm P_n.$$

On voit que si l'on prend les signes inférieurs, l'équation $P_m = - P_m$ exige que $P_m = 0$. Ainsi *pour qu'une équation de degré pair soit réciproque, il faut et il suffit que les coefficients des termes équidistants des extrêmes soient égaux et de mêmes signes, ou égaux et de signes contraires, pourvu que, dans ce dernier cas, le terme du milieu manque.*

On verra de la même manière, que, *pour qu'une équation de degré impair soit réciproque, il faut et il suffit que les coefficients des termes équidistants des extrêmes soient égaux et de mêmes signes, ou égaux et de signes contraires.* On partirait, pour le faire voir, de l'équation

$$x^{2m+1} + \ldots + P_n x^{2m-n+1} + \ldots + P_{2m-n} x^{n+1} + \ldots + P_{2m+1} = 0.$$

618. Nous allons maintenant nous occuper de la résolution d'une équation réciproque. Nous distinguerons quatre cas.

1er Cas. *L'équation est de degré pair et les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux et de mêmes signes.*

Soit

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x) = x^{2m} + P_1 x^{2m-1} + P_2 x^{2m-2} + \ldots + P_m x^m + \ldots \\ + P_2 x^2 + P_1 x + 1 = 0\end{aligned}\right\} \quad [1]$$

cette équation. Le produit de deux racines réciproques étant l'unité, on voit que si l'on connaissait leur somme il serait facile de les calculer (**248**). Désignons donc par y l'une quelconque des sommes que l'on obtient en ajoutant à chaque racine de la proposée sa réciproque; on aura

$$y = x + \frac{1}{x} \qquad [2],$$

et y ne sera susceptible que de m valeurs distinctes; de sorte que l'équation qui déterminera y sera seulement du degré m. Par conséquent *la résolution de la proposée sera ainsi ramenée à celle*

d'une équation de degré sous-double *; car lorsqu'on aura trouvé toutes les valeurs de y, il suffira de les substituer successivement dans l'équation [2] et de résoudre les équations résultantes qui ne seront que du deuxième degré, pour obtenir toutes les racines de l'équation [1].

Pour former l'équation en y, il n'y a qu'à éliminer cette inconnue entre les équations [1] et [2]; ce qui se fera en ramenant d'abord l'équation [2] à la forme

$$x^2 - xy + 1 = 0 \qquad [3],$$

et en appliquant ensuite aux premiers membres des équations [1] et [3] la méthode du plus grand commun diviseur. Mais la forme particulière de l'équation [1] permet d'effectuer l'élimination de y beaucoup plus simplement. Divisons, en effet, tous les termes de l'équation [1] par x^m et groupons les termes équidistants des extrêmes : il viendra

$$\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+\mathrm{P}_1\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+\mathrm{P}_2\left(x^{m-2}+\frac{1}{x^{m-2}}\right)+\ldots+\mathrm{P}_m=0 [4],$$

de sorte que si l'on peut exprimer en général $x^n+\frac{1}{x^n}$ en fonction rationnelle de y, l'élimination de cette inconnue s'effectuera immédiatement. Or, on a évidemment

$$\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)+\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right);$$

d'où

$$x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)y-\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right).$$

---

* On pourrait dire encore que la fonction $x+\frac{1}{x}$ ne changeant pas lorsque l'on y change x en $\frac{1}{x}$, si l'on cherche une équation dont les racines soient liées à celles de la proposée par la relation $y=x+\frac{1}{x}$, cette équation ne pourra avoir que m racines *distinctes*, de sorte que la résolution de la proposée sera ramenée à celle de deux équations, l'une du degré m et l'autre du second degré, qui est l'équation [2].

Ainsi, *pour former une quelconque des fonctions qui entrent dans le premier membre de l'équation* [4], *il faut multiplier la précédente par* y *et retrancher du produit la fonction anté-précédente.* Or, on a

$$x^0+\frac{1}{x^0}=2,$$

$$x+\frac{1}{x}=y;$$

donc

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2,$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y,$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=y^4-4y^2+2,$$

etc.

En substituant ces valeurs dans l'équation [4], l'élimination de x se trouvera effectuée, et on voit se réaliser ce que nous avions prévu, savoir que l'équation finale en y sera du m^{me} degré. On résoudra donc cette équation finale, et ensuite on substituera successivement chacune de ses racines dans la formule

$$x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}$$

tirée de l'équation [3], ce qui fera connaître toutes les racines de la proposée.

619. Remarquons que l'équation [1] peut avoir plusieurs racines égales à $+1$ ou à -1, car le caractère de cette équation est qu'elle est vérifiée par chacun des quotients que l'on trouve en divisant l'unité par chacune de ses racines. En conséquence, on commencera par essayer si $+1$ et -1 la vérifient, et on cherchera ensuite combien de fois chacun de ces nombres se trouve parmi ses racines (607); puis on divisera son premier membre par le produit des facteurs du premier degré correspondants à toutes ces racines $+1$ et -1, et on appliquera ensuite à l'équation-quotient la méthode que nous venons d'exposer.

620. Exemple. *Résoudre l'équation*

$$\varphi(x)=x^{10}-2x^9-4x^8+6x^7+3x^6-8x^5+3x^4+6x^3-4x^2-2x+1=0.$$

La substitution de $+1$ et de -1 dans cette équation montre que ces nombres la vérifient. Pour connaître le degré de multiplicité de ces deux racines, je forme les dérivées successives du premier membre de la proposée, et je trouve

$$\varphi'(x) = 10x^9-18x^8-32x^7+42x^6+18x^5-40x^4+12x^3+18x^2-8x-2,$$

$$\varphi'(1)=0, \qquad \varphi'(-1)=0;$$

$$\frac{\varphi''(x)}{1.2} = 45x^8-72x^7-112x^6+126x^5+45x^4-80x^3+18x^2+18x-4;$$

$$\frac{\varphi''(1)}{1.2}=-16, \quad \frac{\varphi''(-1)}{1.2}=0;$$

$$\frac{\varphi'''(x)}{1.2.3}=120x^7-168x^6-224x^5+210x^4+60x^3-80x^2+12x+6;$$

$$\frac{\varphi'''(-1)}{1.2.3}=0.$$

$$\frac{\varphi_{\text{IV}}(x)}{1.2.3.4}=210x^6-252x^5-280x^4+210x^3+45x^2-40x+3;$$

$$\frac{\varphi_{\text{IV}}(-1)}{1.2.3.4}=+60.$$

Ainsi il y a deux racines égales à $+1$ et quatre égales à -1.

En conséquence, je divise le premier membre de la proposée par $(x-1)^2(x+1)^4=x^6+2x^5-x^4-4x^3-x^2+2x+1$, et en égalant à zéro le quotient de cette division, je forme l'équation

$$x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0,$$

d'où je tire successivement

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0,$$

$$y^2-4y+3=0\begin{cases} y=3, & x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}; \\ y=1, & x=\dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2}. \end{cases}$$

621. 2ᵉ Cas. ***L'équation est de degré pair, et les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux et de signes contraires, mais le terme du milieu manque.***

Si l'on fait $x=1$ dans cette équation, il est clair qu'elle sera vérifiée, puisque tous ses termes se réduiront à leurs coefficients. Elle le sera encore par $x=-1$; en effet, deux termes équidistants des extrêmes sont tous deux de degré pair, ou tous deux de degré impair; de sorte que, quand on y fera $x=-1$, ils se réduiront à leurs coefficients pris avec leurs signes ou avec des signes contraires; mais ces coefficients ont des signes différents, donc nos deux termes s'entre-détruiront; donc $x=-1$ est une racine de la proposée, et par conséquent le premier membre de cette équation est divisible par (x^2-1). On effectuera la division de ce premier membre par (x^2-1), et, en égalant le quotient à zéro, on formera une équation qui aura pour racines toutes celles de la proposée, sauf les deux racines $+1$ et -1. Cette équation sera donc réciproque; elle sera de degré pair, et son dernier terme, qui est le quotient du dernier terme -1 de la proposée par le dernier terme -1 du diviseur (58) sera $+1$; donc elle sera de la forme de l'équation [1] et se résoudra en conséquence de la même manière. Sa résolution se ramènera ainsi à celle d'une équation du degré $\frac{2m-2}{2}=m-1$.

622. 3e Cas. *L'équation est de degré impair et les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux et de mêmes signes.*

On verra facilement que -1 est racine de cette équation, car deux termes équidistants des extrêmes sont l'un de degré pair et l'autre de degré impair; de sorte que pour $x=-1$, l'un de ces termes se réduira à son coefficient, et l'autre à son coefficient changé de signe. Donc ces deux termes s'entre-détruiront. On divisera donc le premier membre de l'équation proposée par $(x+1)$, et en égalant le quotient à zéro, on formera une équation réciproque, de degré pair, et dont le dernier terme sera $\frac{+1}{+1}=+1$; donc elle sera de la forme [1]. Si $(2m+1)$ est l'exposant du degré de l'équation proposée, sa résolution dépendra de celle d'une équation du degré $\frac{2m}{2}=m$.

623. 4° Cas. *L'équation est de degré impair et les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux et de signes contraires.*

On verra facilement que $+1$ est racine de cette équation, et qu'en divisant son premier membre par $(x-1)$, on retombera sur une équation de la forme [1].

§ II. DE QUELQUES PROBLÈMES QUI CONDUISENT A DES ÉQUATIONS SUSCEPTIBLES D'ABAISSEMENT.

624. Problème I. *Étant données deux équations* $\varphi(x)=0$ *et* $\psi(x)=0$, *trouver les relations qui doivent exister entre leurs coefficients indéterminés, pour qu'elles aient* n *racines communes; puis en supposant ces conditions remplies, calculer ces racines.*

Si les deux équations $\varphi(x)=0$ et $\psi(x)=0$ ont n racines communes, le premier membre de chacune sera divisible par le produit des facteurs du premier degré correspondants à ces racines; de sorte que ces premiers membres devront avoir un plus grand commun diviseur du n^{me} degré. En conséquence, on cherchera ce plus grand commun diviseur, et on s'arrêtera à un reste du degré $(n-1)$. Ce reste, qui sera de la forme

$$A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+A_3x^{n-3}+\ldots+A_n,$$

devra être nul, indépendamment d'aucune valeur particulière donnée à x : donc il faudra que les coefficients des diverses puissances de x soient nuls (350*), ce qui donnera les n équations de condition

$$A_1=0,\quad A_2=0,\quad A_3=0,\ldots A_n=0,$$

auxquelles devront satisfaire les coefficients indéterminés des équations proposées, pour qu'elles aient n racines communes. Le problème sera donc déterminé, indéterminé ou impossible, suivant que le nombre de ces coefficients sera égal à n, $>n$ ou $<n$.

Si l'on suppose ces conditions remplies et qu'on veuille déter-

miner les racines communes aux deux équations $\varphi(x)=0$ et $\psi(x)=0$, on cherchera le plus grand commun diviseur de leurs premiers membres, et en résolvant l'équation formée en l'égalant à zéro, on obtiendra les racines communes à ces équations.

Si maintenant on divise $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ par le plus grand commun diviseur trouvé D, et qu'on égale les quotients à zéro, on obtiendra deux équations $\frac{\varphi(x)}{D}=0$ et $\frac{\psi(x)}{D}=0$ qui auront pour racines les autres racines des équations proposées, de sorte que leur résolution dépendra ainsi de celles d'équations de degré moindre.

625. Problème II. *Étant donnée une équation du degré* m *à coefficients indéterminés, trouver les relations qui doivent exister entre ces coefficients, pour que deux racines de la proposée satisfassent à l'équation à deux inconnues* $py+qz=r$, *et déterminer ces racines, lorsque les conditions dont il s'agit sont remplies.*

Soient a et b deux racines de l'équation $\varphi(x)=0$ qui vérifient l'équation $py+qz=r$: on aura donc

$$\varphi(a)=0,\quad \varphi(b)=0,\quad pa+qb=r.$$

On tire de cette dernière $b=\frac{r-pa}{q}$ et par conséquent $\varphi\left(\frac{r-pa}{q}\right)=0$; d'où l'on voit que les deux équations

$$\varphi(x)=0 \quad \text{et} \quad \varphi\left(\frac{r-px}{q}\right)=0$$

ont la racine commune a, et qu'ainsi leurs premiers membres ont un commun diviseur. En conséquence, on cherchera le plus grand commun diviseur des polynomes $\varphi(x)$ et $\varphi\left(\frac{r-px}{q}\right)$, on poursuivra l'opération jusqu'à ce qu'on soit arrivé à un reste indépendant de x, et, en égalant ce reste à zéro, on obtiendra la relation demandée.

Si la proposée doit avoir n couples de racines qui vérifient

l'équation $py+qz=r$, le plus grand commun diviseur dont il s'agit devra être du n^{me} degré, de sorte qu'on arrêtera le calcul nécessaire pour le déterminer au reste du $(n-1)^{me}$ degré, lequel sera de la forme

$$A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+A_3x^{n-3}+\ldots+A_n,$$

d'où l'on conclura les n équations de condition (350*)

$$A_1=0,\ A_2=0,\ A_3=0,\ldots A_n=0.$$

Si l'on suppose ces conditions satisfaites, on trouvera nécessairement un plus grand commun diviseur D entre les polynomes $\varphi(x)$ et $\varphi\left(\frac{r-px}{q}\right)$, et, en l'égalant à zéro, on formera une équation dont la résolution fera connaître les racines de $\varphi(x)=0$ qui doivent être mises à la place de y dans l'équation $py+qz=r$; de sorte que pour avoir leurs conjuguées, il n'y aura qu'à remplacer y par ces valeurs trouvées de x dans la formule $z=\frac{r-py}{q}$.

On voit donc que si le plus grand commun diviseur D est d'un degré supérieur au premier, il y aura *en général* autant de couples de racines de l'équation $\varphi(x)=0$, qui satisferont à l'équation $py+qz=r$, qu'il est marqué par le degré de ce plus grand commun diviseur.

Toutefois, cette conséquence serait inexacte si la proposée avait une racine c telle que $\frac{r-pc}{q}$ fût égale à c, ou, ce qui revient au même, si elle avait une racine $c=\frac{r}{p+q}$. En effet, cette racine vérifie l'équation $\varphi\left(\frac{r-px}{q}\right)=0$ puisque, d'après notre hypothèse, faire $x=c$ dans cette équation, c'est faire $x=c$ dans la proposée. Donc c est racine de $D=0$, de sorte que cette équation détermine non-seulement les racines de $\varphi(x)=0$ qui, conjointement avec une autre racine de la proposée, satisfont à $py+qz=r$, mais encore celle des racines de la proposée qui est égale à $\frac{r}{p+q}$,

si cette équation en a une pareille, et elle la donne autant de fois que cette racine entre dans la proposée.

Ainsi, avant de s'occuper de la recherche des racines de $\varphi(x)=0$ qui satisfont à $py+qz=r$, on commencera par examiner si $\frac{r}{p+q}$ est une racine de cette équation, et on devra la débarrasser de toutes les racines égales à $\frac{r}{p+q}$ qu'elle pourra contenir, ce qui ne saurait présenter de difficulté.

626. Si $p=q$, les deux équations $\varphi(x)=0$ et $\varphi\left(\frac{r-px}{q}\right)=0$ seront également satisfaites par $x=a$ et par $x=b$, de sorte que ces quantités seront racines de $D=0$; et en effet a ne représentant pas une des deux racines qui vérifient $p(y+z)=r$ plutôt que l'autre, l'équation qui détermine a devra aussi déterminer b. Donc *l'équation* $D=0$ *nous donnera tous les couples de racines de* $\varphi(x)=0$ *dont la somme est* $\frac{r}{p}$; mais elle devra avoir encore pour racines toutes celles de la proposée qui sont égales à $\frac{r}{2p}$.

627. Si aucune des racines de $\varphi(x)=0$ n'est égale à $\frac{r}{2p}$, et que ces racines puissent être accouplées de telle sorte que la somme des deux racines de chaque groupe soit égale à $\frac{r}{p}$, on voit que l'équation $D=0$ aura les mêmes racines que la proposée, et qu'ainsi notre méthode deviendra illusoire. Mais alors on observera que si l'on choisit une inconnue auxiliaire qui soit une *fonction symétrique* quelconque des deux racines conjuguées a et b (636), comme $t=ab$, ou $t=a^2+b^2$, etc., cette inconnue aura autant de valeurs qu'il y a de racines dans la proposée; mais comme elles sont égales deux à deux, l'équation en t s'abaissera à une équation de degré sous-double, en extrayant la racine carrée de ses deux membres. Cette équation s'abaissera encore à une autre de degré sous-double, si l'on pose $t=a-b$, car alors les valeurs de t seront deux à deux égales et de signes contraires.

Toutefois, dans le cas actuel, il vaudra encore mieux transformer l'équation proposée en une autre dont les racines soient égales aux siennes diminuées de $\frac{r}{2p}$ (ce qui revient (588) à *faire évanouir le deuxième terme de la proposée*; car les deux racines conjuguées a et b, dont la somme est $\frac{r}{p}$, deviendront $a-\frac{r}{2p}$ et $b-\frac{r}{2p}$, de sorte que leur somme sera alors égale à zéro. De cette manière l'équation transformée aura ses racines deux à deux égales et de signes contraires; donc elle sera réductible à une équation de degré sous-double.

628. PROBLÈME III. *L'équation* $x^4+2x^3-21x^2-22x+40=0$ *a ses racines en proportion par différence : calculer ces racines.*

1re SOLUTION. La somme des quatre racines étant -2, on voit que la somme des deux moyens et celle des deux extrêmes de la proportion qu'elles forment est égale à -1; donc nos quatre racines font deux groupes, tels que la somme des racines contenues dans chacun est égale à -1; nous transformerons donc notre équation en une autre dont les racines soient égales aux siennes diminuées de $-\frac{1}{2}$ (627); ainsi nous poserons $y=x+\frac{1}{2}$, d'où $x=y-\frac{1}{2}$, et nous trouverons

$$y^4-\frac{45}{2}y^2+\frac{729}{16}=0,\quad \text{d'où}\quad y=\pm\frac{9}{2},\quad y=\pm\frac{3}{2},$$

et par suite $x=4$, $x=-5$, $x=1$, $x=-2$.

2e SOLUTION. On peut résoudre ce problème encore plus simplement de la manière suivante.

La somme des deux moyens de la proportion formée par les racines étant -1, on voit que si l'on appelle y leur produit, on obtiendra ces racines en résolvant l'équation $x^2+x+y=0$, de sorte que le premier membre de cette équation devra diviser celui de la proposée. On effectuera donc cette division, et on s'arrêtera à un reste du premier degré par rapport à x, lequel sera de la forme $Mx+N$. Or, si la valeur de y était connue, on la substituerait dans ce reste, et il devrait s'anéantir indépen-

damment de x; donc cette valeur de y est une racine commune aux deux équations $M=0$ et $N=0$. En conséquence, on cherchera le plus grand commun diviseur des polynomes M et N, et en l'égalant à zéro, on obtiendra la valeur cherchée de y. Mais comme y ne représente pas le produit des moyens plutôt que celui des extrêmes, puisque la somme des extrêmes est -1 comme celle des moyens, le plus grand commun diviseur sera du second degré.

En effectuant ces calculs, on trouvera que le reste qui suit celui du deuxième degré en x est $y^2+22y+40$, de sorte qu'en l'égalant à zéro, on trouvera $y=-2$ et $y=-20$. On substituera donc ces valeurs successivement dans la formule $x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4y}}{2}$ tirée de l'équation $x^2+x+y=0$, et il viendra ainsi $x=1$, $x=-2$, $x=4$, $x=-5$.

629. PROBLÈME IV. *Trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients indéterminés d'une équation $\varphi(x)=0$, pour qu'elle ait deux racines égales et de signes contraires.*

Ici $r=0$ et $q=+p$, de sorte que pour résoudre le problème, il faudra chercher le plus grand commun diviseur entre les premiers membres des équations

$$\varphi(x)=0 \quad \text{et} \quad \varphi(-x)=0\text{*},$$

et exprimer que le reste du premier degré par rapport à x est identiquement nul (530*). Mais j'observe qu'au système de ces deux équations on peut substituer le système formé de leur somme et de leur différence : or, la somme de leurs premiers membres est le double de la somme des termes de degré pair

* Pour traiter cette question directement, et c'est ce qu'il faut toujours faire dans un examen, on dira : si je transforme l'équation proposée en une autre, dont les racines soient égales et de signes contraires aux siennes, j'obtiendrai une équation $\varphi(-x)=0$, qui aura deux racines communes avec la proposée $\varphi(x)=0$, de sorte que leurs premiers membres devront avoir un commun diviseur du second degré ; il faudra donc chercher ce plus grand commun diviseur, et exprimer que, etc.

dans la proposée ; leur différence est le double de la somme des termes de degré impair de cette même équation, laquelle somme pourra être divisée par x ; en conséquence, au lieu de chercher le plus grand commun diviseur entre $\varphi(x)$ et $\varphi(-x)$, on le cherchera entre la somme des termes de degré pair de l'équation $\varphi(x)=0$ et la somme de ses termes de degré impair, divisée par x, de sorte que les restes que l'on obtiendra ainsi ne renfermeront que des termes de degré pair ; par conséquent le reste qui correspondra au diviseur du deuxième degré sera indépendant de x, et, en l'égalant à zéro, on aura la relation demandée.

630. **Problème V.** *Trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients indéterminés de l'équation* $\varphi(x)=0$ *pour que deux de ses racines soient dans le rapport de* 1 *à* q.

Il suffira de supposer $r=0$ et $p=-1$ dans la solution du problème II, ce qui conduira à chercher le plus grand commun diviseur des deux polynomes $\varphi(x)$ et $\varphi\left(\frac{x}{q}\right)$ et à égaler à zéro le reste indépendant de x *.

Si l'on veut qu'il y ait n ***couples de racines dont le rapport soit*** q, on observera que le plus grand commun diviseur des polynomes $\varphi(x)$ et $\varphi\left(\frac{x}{q}\right)$ devra être alors du n^{me} degré, et qu'ainsi il faudra égaler à zéro les coefficients des diverses puissances de x dans le reste correspondant

$$A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_n,$$

ce qui donnera les n équations de condition

$$A_1=0,\ A_2=0,\ldots A_n=0.$$

Mais si le rapport q n'est pas donné, ce qui arrivera ***si l'on***

* Pour traiter cette question *à priori*, nous dirons : si nous transformons l'équation proposée en une autre, dont les racines soient q fois plus grandes que les siennes, nous obtiendrons une équation $\varphi\left(\frac{x}{q}\right)=0$, qui aura une racine commune avec $\varphi(x)=0$; de sorte que leurs premiers membres auront un commun diviseur du premier degré, etc.

demande seulement que $2n$ *racines de* $\varphi(x)$ *forment une suite de rapports égaux*, on observera que les n équations précédentes devront être vérifiées par une même valeur de q, de sorte que leurs premiers membres doivent avoir un commun diviseur. On cherchera donc le plus grand commun diviseur entre deux des polynomes A_1, A_2, ... A_n, et on s'arrêtera à un reste indépendant de q, que l'on égalera à zéro; puis on exprimera que le reste du premier degré que l'on aura ainsi trouvé, divise les premiers membres de toutes les autres équations, et l'on obtiendra ainsi $(n-1)$ équations de condition qui résoudront la question. Elles résultent, comme on voit, de l'élimination de q, entre les n équations $A_1=0$, $A_2=0$, ... $A_n=0$.

631. PROBLÈME VI. *Les quatre racines de l'équation* $x^4-Ax^3+Bx^2-Cx+D=0$ *forment une proportion par quotient : trouver ces racines.*

On pourrait déduire la solution de ce problème de ce que nous venons de dire, mais la méthode suivante y conduit plus rapidement.

Soient a, b, c, d les quatre racines demandées telles que $ad=bc$. Je remarque que l'on a $+C=abc+abd+acd+bcd$ $=ad(b+c)+bc(a+d)=ad(a+b+c+d)=+Aad$, d'où $ad=\frac{C}{A}$. On connaît donc ainsi le produit des deux extrêmes, de sorte que si l'on peut trouver leur somme, il sera facile de les déterminer. Soit y cette somme, nos deux extrêmes seront ainsi les racines de l'équation $x^2-yx+\frac{C}{A}=0$, dont le premier membre devra par conséquent diviser celui de la proposée. On effectuera donc la division de $x^4-Ax^3+Bx^2-Cx+D$ par $x^2-yx+\frac{C}{A}$, etc. (**628**, 2ᵉ *solution*).

EXEMPLE. $x^4+x^3-7x^2+2x+4=0$. On trouvera $M=y^3+y^2-11y=0$ et $N=-2y^2-2y+22=0$; par suite $y=\frac{-1\pm3\sqrt{5}}{2}$, $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x=-(1-\sqrt{5})$, $x=-(1+\sqrt{5})$, $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

632. Problème VII. *Trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients indéterminés de l'equation* $\varphi(x)=0$ *pour que ses racines forment une progression par quotient.*

Soit q la raison de cette progression : si l'on transforme l'équation $\varphi(x)=0$ en une autre dont les racines soient q fois plus grandes, nous obtiendrons une transformée $\varphi\left(\frac{x}{q}\right)=0$ qui aura $(m-1)$ racines communes avec la proposée, de sorte que les polynomes $\varphi(x)$ et $\varphi\left(\frac{x}{q}\right)$ auront un commun diviseur du degré $(m-1)$; on cherchera donc ce plus grand commun diviseur, et en égalant à zéro les coefficients de x dans le reste du degré $(m-2)$, on obtiendra $(m-1)$ équations qui résoudront le problème, si q est connue. Mais si cette raison n'est pas donnée, il faudra, comme on l'a vu (630), éliminer q entre ces $(m-1)$ équations, ce qui réduira à $(m-2)$ le nombre des conditions demandées.

633. Problème VIII. *Résoudre une équation*

$$\varphi(x)=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots+Tx+U=0$$

dont les racines forment une progression géométrique.

Nous distinguerons deux cas, suivant que la raison sera ou ne sera pas donnée.

1er Cas. Soit q la raison : les m racines de la proposée pourront être représentées par

$$a,\ aq,\ aq^2,\ldots aq^{m-1},$$

de sorte que l'on aura $-A=\frac{a(q^m-1)}{q-1}$, d'où $a=-\frac{A(q-1)}{q^m-1}$.
On connaîtra de cette manière une des racines extrêmes, et par suite toutes les autres.

2e Cas. Appelons encore q la raison inconnue de la progression : nous avons vu que les deux équations $\varphi(x)=0$ et $\varphi\left(\frac{x}{q}\right)=0$ devaient avoir les m racines communes $aq,\ aq^2,\ldots aq^{m-1}$;

on cherchera donc le plus grand commun diviseur de leurs premiers membres et on écrira que le reste du $(m-2)^{me}$ degré

$$A_1 x^{m-2} + A_2 x^{m-3} + \ldots + A_{m-1}$$

est identiquement nul, ce qui donnera les $(m-1)$ équations de condition

$$A_1 = 0,\ A_2 = 0, \ldots A_{m-1} = 0,$$

qui devront avoir, pour racine commune, la raison q de la progression. Mais comme il n'y a pas de motif pour regarder cette progression comme étant croissante plutôt que décroissante, elles auront aussi la racine commune $\frac{1}{q}$. Par conséquent leurs premiers membres auront un commun diviseur du second degré, lequel sera le coefficient A_1 de x^{m-2}, dans le premier terme du reste; car ce coefficient est du deuxième degré par rapport à q, comme nous le verrons tout à l'heure. On l'égalera donc à zéro, ce qui fournira une équation d'où l'on tirera la valeur de q, et on rentrera ainsi dans le premier cas; mais il sera plus simple de remplacer q par sa valeur dans l'équation formée en égalant à zéro le quotient de la division de $\varphi(x)$ par le reste du $(m-1)^{me}$ degré, car on aura ainsi très-simplement une des racines extrêmes.

J'ai dit que A_1 était un polynome du deuxième degré par rapport à q : en effet, l'équation $\varphi\left(\frac{x}{q}\right) = 0$ revenant à

$$x^m + Aqx^{m-1} + Bq^2x^{m-2} + Cq^3x^{m-3} + \ldots + Uq^m = 0,$$

on pourra substituer au système de cette équation et de la proposée, un système formé de cette proposée, et de l'équation

$$Ax^{m-1} + B(q+1)x^{m-2} + C(q^2+q+1)x^{m-3} + \ldots = 0$$

obtenue en divisant par $(q-1)$ la différence de leurs premiers membres. Le premier membre de cette dernière équation doit donc diviser $\varphi(x)$, ou, pour éviter les quotients fractionnaires, $A^2\varphi(x)$. En effectuant cette division, on trouvera pour quotient

$Ax + \{A^2 - B(q+1)\}$ et pour coefficient du premier terme du reste correspondant

$$A_1 = (B^2 - AC)q^2 + (2B^2 - A^2B - AC)q + B^2 - AC.$$

Ainsi, la résolution de l'équation proposée se trouve ramenée à celle des deux équations

$$(B^2 - AC)q^2 + (2B^2 - A^2B - AC)q + B^2 - AC = 0$$

et
$$Ax + A^2 - B(q+1) = 0.$$

Soit, par exemple, l'équation

$$\varphi(x) = x^4 - 15x^3 + 70x^2 - 120x + 64 = 0,$$

on aura

$$\varphi\left(\frac{x}{q}\right) = x^4 - 15qx^3 + 70q^2x^2 - 120q^3x + 64q^4 = 0,$$

$$\frac{\varphi\left(\frac{x}{q}\right) - \varphi(x)}{q-1} = 15x^3 - 70(q+1)x^2 + 120(q^2+q+1)x - \ldots = 0.$$

Le quotient de la division de $\varphi(x)$ par le premier membre de cette dernière équation est $x + 14q - 31$, et le reste a pour coefficient de son premier terme $310(2q^2 - 5q + 2)$.

En égalant ce reste à zéro, on trouvera $q = 2$ et $q = \frac{1}{2}$. Mais comme, pour effectuer la division, on aura multiplié le premier dividende par 15 et le second par 3, c'est l'équation $x + \dfrac{14q - 31}{3} = 0$ qui donnera la première racine. En faisant $q = 2$, on trouve $x = 1$ et ainsi les racines sont 1, 2, 4, 8.

634. Problème IX. *Étant donnée une équation algébrique*

$$\varphi(x) = x^m + P_1x^{m-1} + P_2x^{m-2} + \ldots + P_m = 0$$

dont les racines forment une progression par différence, résoudre cette équation.

En appliquant à cette équation une méthode analogue à celle que nous venons d'exposer, on parviendrait à la résoudre; mais nous préférerons le procédé suivant qui est aussi simple, et qui a d'ailleurs l'avantage d'offrir une application intéressante de la

méthode des coefficients indéterminés dont on fait un si fréquent usage dans l'analyse transcendante (388).

Si a est la première racine de notre équation et que r désigne la raison, on aura immédiatement (365)

$$-P_1=\frac{\{2a+(m-1)r\}m}{2} \qquad [5].$$

D'un autre côté, il est évident que, si du carré du coefficient du deuxième terme de l'équation proposée on retranche le double de celui du troisième, le reste $P_1^2-2P_2$ sera égal à la somme des carrés des racines. Cherchons donc comment cette somme est composée en a et en r, car nous obtiendrons de cette manière une seconde équation entre ces deux inconnues.

J'observe d'abord que la formule [5] nous montre que la somme des premières puissances des racines de la proposée est une fonction du second degré du nombre m de ces racines, de la forme Am^2+Bm ; il est donc naturel de penser que la somme S_2 de leurs secondes puissances est de la forme Am^3+Bm^2+Cm, de sorte que

$$S_2=Am^3+Bm^2+Cm,$$

A, B, C étant des *coefficients indéterminés* dont il s'agit de trouver les valeurs. Or, si l'on ajoute un terme de plus $a+mr$ à la progression, il faudra que la somme des carrés des termes de cette nouvelle progression, se déduise de la précédente en y changeant m en $(m+1)$; donc on aura

$$S_2+(a+mr)^2=A(m+1)^3+B(m+1)^2+C(m+1).$$

Je retranche de cette équation la précédente, et je trouve, toutes réductions faites,

$$a^2+2arm+r^2m^2=A(3m^2+3m+1)+B(2m+1)+C,$$

équation qui doit être vraie, quelle que soit la valeur que l'on assigne à m : donc les coefficients des mêmes puissances de m dans les deux membres doivent être égaux, donc

$$3A=r^2, \quad 3A+2B=2ar, \quad A+B+C=a^2,$$

d'où

$$A=\frac{r^2}{3},\quad B=\frac{2ar-r^2}{2},\quad C=\frac{6a^2-6ar+r^2}{6},$$

et par conséquent

$$S_2=\frac{2r^2m^3+(6ar-3r^2)m^2+(6a^2-6ar+r^2)m}{6}\qquad [6].$$

Or, si dans cette formule on suppose $m=2$, elle donne $S_2=r^2+2ar+2a^2=a^2+(a+r)^2$: donc elle est vraie pour $m=2$; mais il résulte de la méthode même qui nous y a conduits que si elle est vraie pour une certaine valeur de m, elle l'est pour la valeur suivante de cette quantité, donc cette formule est générale *.

La seconde équation du problème sera ainsi

$$P_1^2-2P_2=\frac{(2m^3-3m^2+m)r^2+(6am^2-6am)r+6a^2m}{6},$$

ou bien

$$a^2+(m-1)ar+\frac{2m^2-3m+1}{6}r^2=\frac{P_1^2-2P_2}{m}.$$

Retranchons de cette équation le carré de l'équation [5] mise sous la forme

$$a+\frac{m-1}{2}r=-\frac{P_1}{m},$$

* Cette méthode est générale, et pourra être employée avec succès pour calculer la somme de telles puissances semblables que l'on voudra des termes d'une progression par différence. Si l'on cherche, par exemple, la somme S_3 des cubes des m premiers termes de la progression $\div a.(a+r).(a+2r)\ldots$, on trouvera

$$S_3=\frac{r^3m^4+(4ar^2-4r^3)m^3+(6a^2r-6ar^2+r^3)m^2+(4a^3-6a^2r+2ar^2)m}{4}.$$

En faisant $a=r=1$ dans cette formule et dans la précédente, il viendra

$$S_2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{2.3}\quad\text{et}\quad S_3=\frac{m^2(m+1)^2}{4}.$$

Au moyen de ces formules, on calculera la somme des carrés et la somme des cubes des m premiers nombres entiers. (Voir précédemment au n° 367 et plus loin aux applications du calcul inverse des différences.)

il viendra

$$\frac{m^2-1}{2^2.3}r^2=\frac{P_1^2(m-1)-2P_2m}{m^2},$$

d'où

$$r=\pm\frac{2}{m}\sqrt{3.\frac{P_1^2(m-1)-2mP_2}{m^2-1}},$$

et par conséquent

$$a=-\frac{P_1}{m}\mp\frac{m-1}{m}\sqrt{3.\frac{P_1^2(m-1)-2mP_2}{m-1}}.$$

635. Dans les applications, si l'on n'a pas ces deux formules présentes à l'esprit, on formera directement la somme des carrés des racines de la proposée. Prenons pour exemple l'équation

$$x^5+5x^4-10x^3-50x^2+9x+45=0.$$

On aura d'abord, en faisant la somme des racines a, $a+r$, $a+2r$, $a+3r$, $a+4r$,

$$5a+10r=-5, \quad \text{ou} \quad a+2r=-1.$$

En faisant ensuite la somme de leurs carrés

$$\begin{array}{l} a^2, \\ a^2+2ar+r^2, \\ a^2+4ar+4r^2, \\ a^2+6ar+9r^2, \\ a^2+8ar+16r^2, \end{array}$$

on trouvera pour deuxième équation

$$5a^2+20ar+30r^2=25+20=45,$$

ou

$$a^2+4ar+6r^2=9.$$

Je retranche de cette équation le carré de la première $a+2r=-1$, ce qui donne

$$2r^2=8, \quad \text{d'où} \quad r=\pm 2 \quad \text{et} \quad a=-5 \quad \text{ou} \quad a=+3.$$

Ainsi les racines sont -5, -3, -1, $+1$, $+3$.

CHAPITRE XX.

DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

---

636. *On appelle* FONCTION SYMÉTRIQUE *de plusieurs quantités une fonction de ces quantités qui ne change pas lorsqu'on y permute deux quelconques d'entre elles.* Ainsi les coefficients d'une équation sont des fonctions symétriques de ses racines.

637. Pour former une fonction symétrique quelconque de plusieurs quantités a, b, c, d,... on fait la somme de tous les arrangements 1 à 1, ou 2 à 2, ou 3 à 3, ou 4 à 4,... de ces quantités, puis on donne le même exposant à toutes les lettres qui y occupent le même rang. Pour représenter une pareille fonction, on fait précéder un de ses termes de la lettre T. Ainsi $\mathrm{T}(a^\alpha)$ ou mieux S_α, $\mathrm{T}(a^\alpha b^\beta)$, $\mathrm{T}(a^\alpha b^\beta c^\gamma)$,... représentent des fonctions symétriques dont les termes sont de la forme a^α, ou $a^\alpha b^\beta$, ou $a^\alpha b^\beta c^\gamma$, ou etc., et on prononce somme a^α, ou somme $a^\alpha b^\beta$, ou somme $a^\alpha b^\beta c^\gamma$. Si donc on considère les quatre lettres a, b, c, d, on aura

$$\mathrm{S}_\alpha = a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha + d^\alpha$$

$$\mathrm{T}(a^\alpha b^\beta) = a^\alpha b^\beta + b^\alpha a^\beta + a^\alpha c^\beta + c^\alpha a^\beta + a^\alpha d^\beta + d^\alpha a^\beta + b^\alpha c^\beta + c^\alpha b^\beta + b^\alpha d^\beta + d^\alpha b^\beta + c^\alpha d^\beta + d^\alpha c^\beta.$$

638. THÉORÈME. *Toute fonction symétrique et rationnelle des racines d'une équation*

$$\varphi(x) = x^m + \mathrm{P}_1 x^{m-1} + \mathrm{P}_2 x^{m-2} + \ldots + \mathrm{P}_{m-1} x + \mathrm{P}_m = 0$$

est égale à une fonction rationnelle des coefficients de cette équation.

Pour démontrer ce théorème, on prouvera d'abord qu'il est vrai pour toute somme de puissances semblables des racines de l'équation, et on fera voir ensuite qu'il a encore lieu, si chaque terme de la fonction symétrique, dont il s'agit, se compose de plusieurs de ces racines.

1re PARTIE. Nous avons vu (601) que la dérivée du premier

membre d'une équation était égale à la somme des quotients qu'on obtient, en divisant ce premier membre par chacun de ses facteurs du premier degré, c'est-à-dire qu'on a

$$\varphi'(x) = \frac{\varphi(x)}{x-a} + \frac{\varphi(x)}{x-b} + \ldots + \frac{\varphi(x)}{x-k},$$

en désignant par a, b,... k les m racines de la proposée. En effectuant les divisions indiquées dans le deuxième membre, on obtiendra une expression de $\varphi'(x)$ en fonction des racines a, b,... k, et comme on en a une deuxième en fonction des coefficients de la proposée (**481**), on conçoit qu'en identifiant ces deux expressions de $\varphi'(x)$, on pourra arriver à des relations entre les sommes de puissances semblables des racines de $\varphi(x)=0$ et les coefficients de cette équation. Or

$$\frac{\varphi(x)}{x-a} = x^{m-1} + \begin{array}{l|} a \\ +P_1 \\ \\ \\ \end{array}\, x^{m-2} + \begin{array}{l|} a^2 \\ +P_1 a \\ +P_2 \\ \\ \end{array}\, x^{m-3} + \begin{array}{l|} a^3 \\ +P_1 a^2 \\ +P_2 a \\ +P_3 \end{array}\, x^{m-4} + \ldots + \begin{array}{l} a^{m-1}. \\ +P_1 a^{m-2} \\ +P_2 a^{m-3} \\ \vdots \\ +P_{m-1} \end{array}$$

En remplaçant dans cette égalité, a, successivement par b, c,... k, et en ajoutant tous les résultats, on trouvera

$$\varphi'(x) = mx^{m-1} + \begin{array}{l|} S_1 \\ +mP_1 \\ \\ \\ \end{array}\, x^{m-2} + \begin{array}{l|} S_2 \\ +P_1 S_1 \\ +mP_2 \\ \\ \end{array}\, x^{m-3} + \begin{array}{l|} S_3 \\ +P_1 S_2 \\ +P_2 S_1 \\ +mP_3 \end{array}\, x^{m-4} + \ldots + \begin{array}{l} S_{m-1}; \\ +P_1 S_{m-2} \\ +P_2 S_{m-3} \\ +P_3 S_{m-4} \\ \vdots \\ +mP_{m-1} \end{array}$$

mais, d'un autre côté,

$$\varphi'(x) = mx^{m-1} + (m-1)P_1 x^{m-2} + (m-2)P_2 x^{m-3} + \ldots + P_{m-1};$$

donc, en identifiant ces deux expressions de $\varphi'(x)$, transposant et réduisant, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} S_1 + P_1 = 0, \\ S_2 + P_1 S_1 + 2P_2 = 0, \\ S_3 + P_1 S_2 + P_2 S_1 + 3P_3 = 0, \\ \vdots \\ S_{m-1} + P_1 S_{m-2} + P_2 S_{m-3} + \ldots + (m-1)P_{m-1} = 0 \end{array}\right\} [1]$$

La première de ces équations détermine S_1; en substituant la valeur de cette quantité dans la deuxième, on aura S_2, et ainsi de suite, de sorte que notre théorème se trouve établi pour toute somme des puissances semblables des racines de $\varphi(x)=0$, dont l'exposant est un nombre entier et positif moindre que m. Pour l'étendre aux autres cas, nous multiplierons les deux membres de l'équation proposée par x^n, ce qui donnera

$$x^{m+n}+P_1x^{m+n-1}+P_2x^{m+n-2}+\ldots+P_mx^n=0.$$

Comme cette équation admet encore $a, b, c, \ldots k$ pour racines, on aura les identités

$$\begin{aligned}
&a^{m+n}+P_1a^{m+n-1}+P_2a^{m+n-2}+\ldots+P_ma^n=0,\\
&b^{m+n}+P_1b^{m+n-1}+P_2b^{m+n-2}+\ldots+P_mb^n=0,\\
&\vdots\\
&k^{m+n}+P_1k^{m+n-1}+P_2k^{m+n-2}+\ldots+P_mk^n=0,
\end{aligned}$$

et, en les additionnant, on trouvera

$$S_{m+n}+P_1S_{m+n-1}+P_2S_{m+n-2}+\ldots+P_mS_n=0 \quad [2].$$

Si on fait successivement, dans cette formule, $n=0$, $n=1$, $n=2$, etc., il viendra

$$\begin{aligned}
&S_m\ +P_1S_{m-1}+P_2S_{m-2}+\ldots+mP_m=0,\\
&S_{m+1}+P_1S_m\ +P_2S_{m-1}+\ldots+P_mS_1=0,\\
&S_{m+2}+P_1S_{m+1}+P_2S_m\ +\ldots+P_mS_2=0,\\
&\text{etc., etc.}
\end{aligned}$$

et la loi qui régit ces formules est celle même qui a lieu dans les équations [1].

Si dans cette même formule [2], on fait successivement $n=-1$, $n=-2$, $n=-3,\ldots$, il viendra

$$\begin{aligned}
&S_{m-1}+P_1S_{m-2}+P_2S_{m-3}+\ldots+P_{m-1}S_0\ +P_mS_{-1}=0,\\
&S_{m-2}+P_1S_{m-3}+P_2S_{m-4}+\ldots+P_{m-1}S_{-1}+P_mS_{-2}=0,\\
&S_{m-3}+P_1S_{m-4}+P_2S_{m-5}+\ldots+P_{m-1}S_{-2}+P_mS_{-3}=0,\\
&\text{etc., etc.}
\end{aligned}$$

On tirera de la première de ces nouvelles équations la valeur de S_{-1}, on la substituera dans la deuxième, et on en déduira la

valeur de S_{-3}, et ainsi de suite, de sorte que notre théorème s'étend actuellement au cas où les exposants sont négatifs.

639. Toutefois, si l'on a besoin de calculer une somme de puissances semblables et négatives des racines de la proposée, on pourra le faire, de la manière suivante, plus facilement que par les dernières formules que nous venons d'obtenir. Je pose $x=\frac{1}{y}$, et, après avoir chassé les dénominateurs, renversé l'ordre des termes et divisé par P_m, j'obtiens la transformée

$$y^m+\frac{P_{m-1}}{P_m}y^{m-1}+\frac{P_{m-2}}{P_m}y^{m-2}+\ldots+\frac{P_1}{P_m}y+\frac{1}{P_m}=0.$$

Cette équation ayant ses racines réciproques de celles de la proposée, il est clair que la somme des n^{mes} puissances de ses racines sera la somme des $-n^{mes}$ puissances de celles de la proposée, de sorte que si l'on applique les formules [1] à notre transformée, et que l'on chasse le dénominateur P_m, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l} P_mS_{-1}+P_{m-1}=0,\\ P_mS_{-2}+P_{m-1}S_{-1}+2P_{m-2}=0,\\ P_mS_{-3}+P_{m-1}S_{-2}+P_{m-2}S_{-1}+3P_{m-3}=0,\\ \text{etc., etc.}\end{array}\right\}\quad[3].$$

640. Exemple. *Calculer la somme des 4mes et la somme des -4mes puissances des racines de l'équation*

$$x^3-3x^2-4x+12=0.$$

On trouvera

$$\left.\begin{array}{l} S_1-3=0,\\ S_2-3S_1-8=0,\\ S_3-3S_2-4S_1+36=0,\\ S_4-3S_3-4S_2+12S_1=0;\end{array}\right\}\text{ d'où }\left\{\begin{array}{l} S_1=3,\\ S_2=17,\\ S_3=27,\\ S_4=113.\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} 12S_{-1}-4=0,\\ 12S_{-2}-4S_{-1}-6=0,\\ 12S_{-3}-4S_{-2}-3S_{-1}+3=0,\\ 12S_{-4}-4S_{-3}-3S_{-2}+S_{-1}=0;\end{array}\right\}\text{ d'où }\left\{\begin{array}{l} S_{-1}=\frac{1}{3},\\ S_{-2}=\frac{11}{18},\\ S_{-3}=\frac{4}{27},\\ S_{-4}=\frac{89}{648}.\end{array}\right.$$

641. 2ᵉ Partie. Considérons maintenant le cas où chaque terme de la fonction doit être composé de plusieurs racines, et cherchons en conséquence à évaluer $T(a^\alpha b^\beta)$, $T(a^\alpha b^\beta c^\gamma)$,... en fonction rationnelle des sommes de puissances semblables des racines de la proposée, car alors elles pourront l'être en fonction rationnelle des coefficients de cette équation, à l'aide des formules [1]. On a

$$S_\alpha = a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha + \ldots,$$
$$S_\beta = a^\beta + b^\beta + c^\beta + \ldots$$

Je multiplie ces deux égalités membre à membre, et j'observe que le produit des deuxièmes membres sera nécessairement une fonction symétrique des racines a, b, c,... k; en conséquence, dès qu'on aura reconnu que ce produit renferme un certain terme, on en conclura immédiatement qu'il contient la fonction symétrique dont ce terme fait partie. Or, en multipliant la valeur de S_α par celle de S_β, il pourra se faire que la lettre du terme multiplicateur soit la même que celle du terme multiplicande, ou qu'elle soit différente : le premier cas aura lieu quand on multipliera, par exemple, a^α par a^β, ce qui donne $a^{\alpha+\beta}$, et le second, lorsqu'on fera le produit de a^α par b^β, ce qui donne $a^\alpha b^\beta$; donc

$$S_\alpha S_\beta = S_{\alpha+\beta} + T(a^\alpha b^\beta),$$

équation d'où l'on tire

$$T(a^\alpha b^\beta) = S_\alpha S_\beta - S_{\alpha+\beta} \qquad [4].$$

Si l'on suppose $\alpha = \beta$, le deuxième membre de cette formule se réduit à $S_\alpha^2 - S_{2\alpha}$; mais le premier membre, au lieu de devenir $T(a^\alpha b^\alpha)$, comme on pourrait le croire, se réduit à $2T(a^\alpha b^\alpha)$. En effet la fonction $T(a^\alpha b^\beta)$, ne devant pas changer quand on y permute deux quelconques des lettres qui y entrent, renferme les termes $a^\alpha b^\beta$ et $b^\alpha a^\beta$, $a^\alpha c^\beta$ et $c^\alpha a^\beta$,... : or ces termes deviennent égaux deux à deux lorsqu'on fait $\beta = \alpha$; donc leur somme, c'est-à-dire $T(a^\alpha b^\beta)$, devient $2T(a^\alpha b^\alpha)$; donc

$$T(a^\alpha b^\alpha) = \tfrac{1}{2}\{S_\alpha^2 - S_{2\alpha}\} \qquad [5].$$

Multiplions maintenant membre à membre les égalités

$$T(a^\alpha b^\beta) = a^\alpha b^\beta + a^\alpha c^\beta + \ldots,$$
$$S_\gamma = a^\gamma + b^\gamma + c^\gamma + \ldots.$$

Il pourra se présenter trois cas dans cette multiplication : ou la lettre du terme multiplicateur sera la même que la première du terme multiplicande, ou elle sera la même que la seconde, ou elle sera différente de toutes deux. Le premier cas se présentera en multipliant, par exemple, $a^\alpha b^\beta$ par a^γ, ce qui donnera $a^{\alpha+\gamma} b^\beta$; le deuxième, en faisant le produit de $a^\alpha b^\beta$ par b^γ, ce qui donnera $a^\alpha b^{\beta+\gamma}$, et on se trouvera dans le troisième, en multipliant $a^\alpha b^\beta$ par c^γ, ce qui fait $a^\alpha b^\beta c^\gamma$; donc on aura

$$T(a^\alpha b^\beta) S_\gamma = T(a^{\alpha+\gamma} b^\beta) + T(a^\alpha b^{\beta+\gamma}) + T(a^\alpha b^\beta c^\gamma),$$

équation d'où l'on tire, en remplaçant les fonctions $T(a^\alpha b^\beta)$, $T(a^{\alpha+\gamma} b^\beta)$, $T(a^\alpha b^{\beta+\gamma})$ par leurs valeurs calculées au moyen de la formule [4],

$$T(a^\alpha b^\beta c^\gamma) = S_\alpha S_\beta S_\gamma - S_{\alpha+\beta} S_\gamma - S_{\alpha+\gamma} S_\beta - S_\alpha S_{\beta+\gamma} + 2S_{\alpha+\beta+\gamma} \quad [6].$$

Si l'on suppose $\beta = \alpha$, le premier membre se réduira à $2T(a^\alpha b^\alpha c^\gamma)$, parce que la fonction $T(a^\alpha b^\beta c^\gamma)$ ne changeant pas lorsque l'on y permute deux quelconques des lettres qui y entrent, ses termes deviendront égaux deux à deux par l'hypothèse de $\beta = \alpha$; donc

$$T(a^\alpha b^\alpha c^\gamma) = \tfrac{1}{2}\{S_\alpha^2 S_\gamma - S_{2\alpha} S_\gamma - 2S_{\alpha+\gamma} S_\alpha + 2S_{2\alpha+\gamma}\} \quad [7].$$

Si $\gamma = \beta = \alpha$, la fonction $T(a^\alpha b^\beta c^\gamma)$ se réduira à six fois $T(a^\alpha b^\alpha c^\alpha)$, parce que cette fonction ne changeant pas lorsqu'on y permute trois quelconques des lettres qui y entrent, et trois lettres fournissant six permutations, tous ses termes deviendront égaux 6 à 6 par l'hypothèse de $\gamma = \beta = \alpha$; donc

$$T(a^\alpha b^\alpha c^\alpha) = \tfrac{1}{6}\{S_\alpha^3 - 3S_\alpha S_{2\alpha} + 2S_{3\alpha}\} \quad [8].$$

En multipliant de même membre à membre les deux égalités $T(a^\alpha b^\beta c^\gamma) = a^\alpha b^\beta c^\gamma + \ldots$ et $S_\delta = a^\delta + b^\delta + c^\delta + d^\delta + \ldots$, on parviendrait de même à exprimer d'abord $T(a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta)$ en fonc-

tion de $T(a^\alpha b^\beta c^\gamma)$, $T(a^{\alpha+\delta} b^\beta c^\gamma)$, $T(a^\alpha b^{\beta+\delta} c^\gamma)$, $T(a^\alpha b^\beta c^{\gamma+\delta})$, puis en fonction des sommes de puissances semblables des racines de la proposée, au moyen de la formule [6], et ainsi de suite. Notre théorème est donc complétement démontré.

642. La théorie des fonctions symétriques s'applique immédiatement à la formation d'une équation dont les racines doivent être des fonctions *rationnelles* de celles d'une équation donnée, et deux méthodes peuvent être employées pour y parvenir. Supposons que l'on propose de *transformer une équation* $\varphi(x) = 0$ *en une autre dont les racines soient liées avec les siennes par la relation* $y = f(x', x'')$, x' et x'' représentant deux racines quelconques de la proposée et $f(x', x'')$ une *fonction rationnelle* et connue de ces racines.

1re Méthode. J'appelle $a, b, c, d, \ldots$ les m racines de la proposée, et, si je remplace x' et x'' successivement par chacune de ces quantités, les résultats

$$f(a, b), f(a, c), \ldots f(b, a), f(b, c), \ldots f(c, d), f(c, e) \ldots$$

représenteront toutes les racines de l'équation cherchée, qui reviendra ainsi à

$$\{y - f(a, b)\}\{y - f(a, c)\} \ldots \{y - f(b, a)\}\{y - f(b, c)\} \ldots = 0.$$

Or, il est évident que le premier membre de cette équation ne change pas si l'on y permute deux quelconques des quantités a, b, c..., de sorte que si, après avoir effectué les calculs, on ordonne le produit suivant les puissances décroissantes de y, le coefficient de chacune de ces puissances sera une fonction symétrique et rationnelle des racines de la proposée $\varphi(x) = 0$; il suffira donc de calculer ces coefficients en fonction rationnelle de ceux de cette équation, au moyen des formules que nous avons données ci-dessus, et le problème sera résolu.

2e Méthode. On commencera par déterminer le degré de l'équation demandée, ce qui est facile, en cherchant combien la fonction $f(x', x'')$ admet de valeurs, lorsqu'on y remplace

successivement x' et x'' par toutes les racines de $\varphi(x)=0$. Soit n ce degré : l'équation en y sera de la forme

$$y^n + P'_1 y^{n-1} + P'_2 y^{n-2} + \ldots + P'_n = 0,$$

P'_1, P'_2,... P'_n étant des coefficients indéterminés dont il s'agit de trouver les valeurs. Or, on a, entre ces coefficients et les sommes des puissances semblables des racines de $\varphi(x)=0$, les relations

$$S'_1 + P'_1 = 0,$$
$$S'_2 + P'_1 S'_1 + 2P'_2 = 0,$$
$$S'_3 + P'_1 S'_2 + P'_2 S'_1 + 3P'_3 = 0,$$
etc.,

en désignant en général par S'_n la somme des n^{mes} puissances des racines de l'équation cherchée; d'où l'on voit que si l'on peut calculer S'_1, S'_2, S'_3,... S'_n en fonction rationnelle des coefficients de l'équation $\varphi(x)=0$, le problème sera résolu. Mais ces quantités S'_1, S'_2, S'_3,... S'_n sont des fonctions symétriques et rationnelles des racines de la proposée ; donc elles seront exprimables en fonctions rationnelles de ses coefficients.

645. Cette méthode conduit en général à des calculs beaucoup plus simples que la première. Nous allons en faire l'application à la *formation de l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation*

$$\varphi(x) = x^m + P_1 x^{m-1} + P_2 x^{m-2} + \ldots + P_m = 0.$$

L'équation demandée sera du degré $\frac{m(m-1)}{2}$, de sorte que si, pour abréger, nous représentons ce nombre par n, elle sera de la forme

$$z^n + P'_1 z^{n-1} + P'_2 z^{n-2} + \ldots + P'_n = 0,$$

et il s'agira, d'après ce qui précède, de calculer en général S'_n en fonction rationnelle des coefficients de $\varphi(x)=0$.

Pour y parvenir, je représente par $F(x)$ la fonction

$$(x-a)^{2n} + (x-b)^{2n} + (x-c)^{2n} + \ldots + (x-k)^{2n},$$

$a, b, c \ldots k$ désignant les racines de l'équation proposée. Or, si on suppose $x = a$, on aura

$$F(a) = (a-b)^{2\alpha} + (a-c)^{2\alpha} + \ldots + (a-k)^{2\alpha},$$

c'est-à-dire la somme des $\alpha^{\text{ièmes}}$ puissances des carrés des différences qui existent entre la racine a et toutes les autres; de même $F(b)$ sera la somme des α^{mes} puissances des carrés des différences qui ont lieu entre la racine b et toutes les autres, et ainsi de suite; donc la somme des résultats que l'on obtiendra en remplaçant successivement x par $a, b, c \ldots k$ dans $F(x)$, sera le double de S'_α; je dis le double, parce que $(a-b)^{2\alpha} = (b-a)^{2\alpha}$, $(a-c)^{2\alpha} = (c-a)^{2\alpha}$, etc., et qu'ainsi chacune des quantités $(a-b)^{2\alpha}$, $(a-c)^{2\alpha}, \ldots$ se trouve répétée *deux* fois dans la somme dont il s'agit.

Il faut donc d'abord former $F(x)$. Or, on a

$$(x-a)^{2\alpha} = x^{2\alpha} - C_1 a x^{2\alpha-1} + C_2 a^2 x^{2\alpha-2} - \ldots \pm C_\alpha a^\alpha x^\alpha \ldots + C_2 a^{2\alpha-2} x^2 \\ - C_1 a^{2\alpha-1} x + a^{2\alpha},$$

en désignant, pour abréger, par C_n le nombre des combinaisons dont sont susceptibles 2α quantités prises n à n. Si, dans cette formule, on remplace successivement a par b, par $c \ldots$ et par k, et que l'on additionne tous les résultats, en mettant chaque puissance de x en facteur commun, il viendra

$$F(x) = m x^{2\alpha} - C_1 S_1 x^{2\alpha-1} + C_2 S_2 x^{2\alpha-2} - \ldots \pm C_\alpha S_\alpha x^\alpha \ldots + C_2 S_{2\alpha-2} x^2 \\ - C_1 S_{2\alpha-1} x + S_{2\alpha}.$$

Je remplace enfin x successivement par $a, b, c \ldots k$, j'ajoute les résultats et je trouve

$$2S'_\alpha = m S_{2\alpha} - C_1 S_1 S_{2\alpha-1} + C_2 S_2 S_{2\alpha-2} - \ldots \pm C_\alpha S_\alpha^2 \ldots + C_2 S_{2\alpha-2} S_2 \\ - C_1 S_{2\alpha-1} S_1 + m S_{2\alpha}.$$

Ici les termes équidistants des extrêmes sont égaux, de sorte qu'on en déduit

$$S'_\alpha = m S_{2\alpha} - C_1 S_1 S_{2\alpha-1} + C_2 S_2 S_{2\alpha-2} - \ldots \pm \tfrac{1}{2} C_\alpha S_\alpha^2,$$

qui est la formule cherchée.

Si on observe que $m = S_0$, on en conclura la règle pratique

suivante : *pour obtenir* S'_n, *faites le développement de* $(S-S)^{2n}$ *d'après la règle de* Newton (333), *en ayant soin de donner à chaque* S *un indice au lieu d'un exposant, de vous arrêter au terme où ces indices seront égaux et de diviser ce terme par* 2.

D'après cela, si l'équation proposée est

$$x^3+P_1x^2+P_2x+P_3=0,$$

auquel cas l'équation aux carrés des différences est de la forme

$$z^3+P'_1z^2+P'_2z+P'_3=0,$$

on construira les formules

$$\left.\begin{array}{l} S'_1=3S_2-S_1^2, \qquad S'_2=3S_4-4S_1S_3+3S_2^2, \\ S'_3=3S_6-6S_1S_5+15S_2S_4-10S_3^2 \end{array}\right\} \quad [9].$$

On a d'ailleurs

$$\left.\begin{array}{ll} S_1+P_1=0, & S_2+P_1S_1+2P_2=0, \\ S_3+P_1S_2+P_2S_1+3P_3=0, & S_4+P_1S_3+P_2S_2+P_3S_1=0 \\ S_5+P_1S_4+P_2S_3+P_3S_2=0, & S_6+P_1S_5+P_2S_4+P_3S_3=0 \end{array}\right\} [10];$$

et en outre

$$\left.\begin{array}{l} S'_1+P'_1=0, \quad S'_2+P'_1S'_1+2P'_2=0 \\ S'_3+P'_1S'_2+P'_2S'_1+3P'_3=0, \end{array}\right\} \quad [11].$$

On trouvera au moyen des formules [10] les valeurs de $S_1, S_2, \ldots S_6$; puis S'_1, S'_2, S'_3, à l'aide des formules [9], et enfin on tirera les valeurs de P'_1, P'_2, P'_3 des formules [11].

On peut faire subir à ces formules une simplification très-notable, en commençant par transformer l'équation proposée en une autre qui n'ait plus de deuxième terme, et en cherchant l'équation aux carrés des différences de cette transformée; car cette équation aux carrés des différences sera la même que celle qui est relative à la proposée (388); de cette manière P_1 sera nul, et les formules deviendront

$$\begin{array}{lll} S_1=0, & & \\ S_2=-2P_2, & S'_1=3S_2, & P'_1=-S'_1, \\ S_3=-3P_3, & & \\ S_4=-P_2S_2, & S'_2=3S_4+3S_2^2, & P'_2=-\dfrac{S'_2+P'_1S'_1}{2}, \\ S_5=-P_2S_3-P_3S_2, & & \\ S_6=-P_2S_4-P_3S_3, & S'_3=6S_6+15S_2S_4-10S_3^2; & P'_3=-\dfrac{S'_3+P'_1S'_2+P'_2S'_1}{3}. \end{array}$$

Prenons pour exemple l'équation $x^3+3x^2-4x+1=0$. Je fais évanouir le deuxième terme, ce qui la réduit à $x^3-7x+7=0$. Je cherche donc l'équation aux carrés des différences des racines de cette équation, et, pour cela, je pose $P_1=0$, $P_2=-7$, $P_3=+7$. Je trouve de cette manière

$$S_1=0,\ S_2=14,\ S_3=-21,\ S_4=98,\ S_5=-245,\ S_6=833,$$
$$S'_1=42,\qquad S'_2=882,\qquad S'_3=18669,$$
$$P'_1=-42,\qquad P'_2=441,\qquad P'_3=-49.$$

Ainsi l'équation aux carrés des différences des racines de $x^3+3x^2-4x+1=0$ est

$$z^3-42z^2+441z-49=0.$$

644. On pourra obtenir, par la même méthode et par des calculs plus simples que ceux qu'exige le procédé indiqué aux n°s **599**, **600** et **601**, les équations aux sommes, aux produits et aux quotients des racines d'une équation donnée.

Pour l'équation aux sommes, on trouvera, en partant de

$$F(x)=(x+a)^\alpha+(x+b)^\alpha+\ldots+(x+k)^\alpha,$$

que

$$2^{\alpha-1}S_\alpha+S'_\alpha=(S+S)^\alpha,$$

en écrivant des indices au lieu d'exposants, arrêtant le développement du deuxième membre au dernier des termes de la première moitié de ce développement si α est impair, et à la moitié du terme du milieu, si α est pair.

Pour l'équation aux produits, on aura

$$S'^\alpha=T(a^\alpha b^\alpha)=\tfrac{1}{2}(S^2_\alpha-S_{2\alpha}),$$

et pour l'équation aux quotients

$$S'_\alpha=T(a^\alpha b^{-\alpha})=S_\alpha S_{-\alpha}-m.$$

645. La théorie des fonctions symétriques fournit un nouveau moyen de trouver la *véritable équation finale* résultant de l'élimination d'une inconnue entre deux équations de degré quelconque à deux inconnues.

Soient en effet,

$$x^m + P_1x^{m-1} + \ldots + P_m = 0 = A,$$
$$x^n + Q_1x^{n-1} + \ldots + Q_n = 0 = B,$$

deux équations à deux inconnues, l'une du degré m et l'autre du degré n : ainsi, chaque coefficient est une fonction de y dont le degré est au plus égal à son indice. Supposons que l'on ait résolu la première équation par rapport à x, et désignons par a_1, a_2, a_3, ... a_m ses m racines. Cette équation reviendra à

$$A = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_m) = 0;$$

de sorte que l'on peut substituer au système des équations proposées les m systèmes

$$\left.\begin{matrix} x - a_1 = 0 \\ B = 0 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x - a_2 = 0 \\ B = 0 \end{matrix}\right\}, \ldots \quad \left.\begin{matrix} x - a_m = 0 \\ B = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Or, si l'on tire de la première des équations de chacun de ces systèmes la valeur de x et qu'on la substitue dans la deuxième, on obtiendra l'équation finale en y de ce système, et par conséquent, en multipliant ces équations finales membre à membre, on formera celle du système proposé. Cette équation est donc

$$\left.\begin{matrix} (a_1^n + Q_1a_1^{n-1} + \ldots + Q_n)(a_2^n + Q_1a_2^{n-1} + \ldots + Q_n)\ldots \\ \ldots(a_m^n + Q_1a_m^{n-1} + \ldots + Q_n) = 0 \end{matrix}\right\} \quad [12].$$

Or, quoique a_1, a_2, ... a_m soient des fonctions inconnues de y, il est cependant possible de former cette équation, car son premier membre est une fonction symétrique et rationnelle des racines a_1, a_2, ... a_m, et par conséquent on pourra l'exprimer en fonction rationnelle des coefficients de $A = 0$.

646. Exemple. *Éliminer* x *entre les équations*

$$x^3 - 7x + 6 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - yx + (y^2 - 7) = 0.$$

J'appelle a et b les racines de la seconde, et j'aurai en conséquence pour équation finale

$$(a^3 - 7a + 6)(b^3 - 7b + 6) = 0,$$

ou, en effectuant la multiplication indiquée,

$$a^2b^2-7(ab^3+ba^3)+6(a^3+b^3)+49ab-42(a+b)+36=0.$$

On reconnaît que le premier membre de cette équation n'est composé que de fonctions symétriques des racines de la deuxième. On trouvera facilement que

$$ab=y^2-7,\quad a+b=y,\quad ab^3+ba^3=-y^4+21y^2-98,$$
$$a^3+b^3=-2y^3+21y,$$

donc l'équation demandée est

$$y^6-14y^4-12y^3+49y^2+84y+36=0=(y^3-7y-6)^2.$$

L'élimination que nous venons de faire est précisément le calcul que l'on doit exécuter pour obtenir, par la méthode du n° 599, l'équation aux sommes des racines de $x^3-7x+6=0$, et vérifie ce que nous avons alors avancé, en disant que le premier membre de cette équation devait être un carré parfait.

647. Les calculs qu'exige cette méthode d'élimination sont tellement longs que l'on n'en fait guère usage dans la pratique, mais aussi elle a l'avantage de conduire très-simplement à une limite du degré de l'équation finale.

Considérons, en effet, le terme général de l'équation [12] : ce terme peut être représenté par

$$Q_\alpha a_1^{n-\alpha} Q_\beta a_2^{n-\beta} \ldots Q_\mu a_m^{n-\mu} = Q_\alpha Q_\beta \ldots Q_\mu a_1^{n-\alpha} a_2^{n-\beta} \ldots a_m^{n-\mu}.$$

Mais comme l'équation [12] est symétrique, elle doit renfermer tous les termes que l'on déduit de celui-ci, par l'échange des quantités $a_1, a_2, \ldots a_m$ les unes dans les autres, c'est-à-dire

$$Q_\alpha Q_\beta \ldots Q_\mu T(a_1^{n-\alpha} a_2^{n-\beta} \ldots a_m^{n-\mu}) \qquad [13]:$$

évaluons donc la limite du degré de cette fonction. D'abord le produit $Q_\alpha Q_\beta \ldots Q_\mu$ est au plus du degré $\alpha+\beta+\ldots+\mu$; d'un autre côté, en se reportant aux formules qui donnent les valeurs de $T(a^\alpha b^\beta)$, $T(a^\alpha b^\beta c^\gamma)\ldots$, on voit que la somme des indices de S, dans chaque terme, est égale à la somme des exposants

qu'ont les lettres a, b, c,... dans chaque terme de ces fonctions, et comme il résulte des formules [1] que l'indice de S est précisément égal au plus fort indice des coefficients de la proposée, qui entrent dans son expression, on voit que $T(a_1^{n-\alpha} a_2^{n-\beta} \ldots a^{n-\mu})$ est au plus du degré

$$(n-\alpha)+(n-\beta)+\ldots+(n-\mu)=mn-(\alpha+\beta+\ldots+\mu);$$

donc la fonction [13] et par conséquent l'équation finale est au plus du degré mn. De là ce beau théorème :

L'équation finale qu'on obtient en éliminant une inconnue entre deux équations de degré quelconque à deux inconnues n'est pas d'un degré plus élevé que le produit de leurs degrés.

Elle sera précisément de ce degré si les deux équations sont les plus générales de leur degré ; mais, si l'on considère des équations particulières, il pourra s'abaisser.

CHAPITRE XXI.

DES DIFFÉRENCES FINIES.

---

§ I. FORMULES GÉNÉRALES.

648. Considérons une suite de quantités

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots u_n$$

qui se succèdent suivant une loi quelconque. Si l'on retranche chacune de ces quantités de celle qui la suit immédiatement, on formera une nouvelle suite

$$u_1 - u_0,\quad u_2 - u_1,\quad u_3 - u_2,\ \ldots\ u_n - u_{n-1},$$

dont les termes se nomment les *différences premières* des termes de la suite proposée.

Ces *différences premieres* se désignent par la lettre Δ placée devant la quantité que l'on soustrait, ainsi :

$$\begin{aligned} \Delta u_0 &= u_1 - u_0 \\ \Delta u_1 &= u_2 - u_1 \\ \Delta u_2 &= u_3 - u_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta u_{n-1} &= u_n - u_{n-1}. \end{aligned}$$

Si l'on forme de la même manière les différences des quantités

$$\Delta u_0,\quad \Delta u_1,\quad \Delta u_2,\ \ldots\ \Delta u_{n-1}$$

on obtiendra la suite

$$\Delta u_1 - \Delta u_0,\quad \Delta u_2 - \Delta u_1,\ \ldots\ \Delta u_{n-1} - \Delta u_{n-2},$$

c'est-à-dire les *différences secondes* des quantités proposées. On les désigne par Δ^2 ; ainsi $\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0$, etc. En continuant de la même manière, on formera les *différences troisièmes* des quantités u_0, u_1, u_2, etc., c'est-à-dire $\Delta^3 u_0 = \Delta^2 u_0 - \Delta^2 u_1$, etc. ; et ainsi de suite.

On pourra donc former le tableau suivant :

u_0	$u_1 - u_0 = \Delta u_0$	$\Delta u_1 - \Delta u_0 = \Delta^2 u_0$	$\Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_0 = \Delta^3 u_0$	etc.
u_1	$u_2 - u_1 = \Delta u_1$	$\Delta u_2 - \Delta u_1 = \Delta^2 u_1$	$\Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1 = \Delta^3 u_1$	⋮
u_2	$u_3 - u_2 = \Delta u_2$	$\Delta u_3 - \Delta u_2 = \Delta^2 u_2$	⋮	
u_3	$u_4 - u_3 = \Delta u_3$	⋮		
u_4	⋮			
⋮				
u_{n-3}	$u_{n-2} - u_{n-3} = \Delta u_{n-3}$	$\Delta u_{n-2} - \Delta u_{n-3} = \Delta^2 u_{n-3}$	$\Delta^2 u_{n-2} - \Delta^2 u_{n-3} = \Delta^3 u_{n-3}$	
u_{n-2}	$u_{n-1} - u_{n-2} = \Delta u_{n-2}$	$\Delta u_{n-1} - \Delta u_{n-2} = \Delta^2 u_{n-2}$		
u_{n-1}	$u_n - u_{n-1} = \Delta u_{n-1}$			
u_n				

Deux termes ne donnent lieu qu'à une différence première, et il n'y a pas lieu de considérer leur différence seconde ; trois termes donnent lieu à deux différences premières et à une différence seconde ; en général, n termes donnent lieu à $n-1$ différences premières, à $n-2$ différences secondes... à *une* différence $(n-1)^{me}$.

649. On peut obtenir facilement l'*expression d'une différence d'un ordre quelconque en fonction de toutes les quantités de la suite primitive dont elle dépend.* On a d'abord

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0, \quad \Delta u_1 = u_2 - u_1 ;$$

donc

$$\Delta^2 u_0 = (u_2 - u_1) - (u_1 - u_0) = u_2 - 2u_1 + u_0.$$

On a de même

$$\Delta^2 u_1 = u_3 - 2u_2 + u_1,$$

donc

$$\Delta^3 u_0 = (u_3 - 2u_2 + u_1) - (u_2 - 2u_1 + u_0) = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0.$$

Les coefficients numériques des expressions de $\Delta^2 u_0$ et $\Delta^3 u_0$ sont les mêmes que ceux du carré et du cube d'un binome dont le second terme est négatif; il y a lieu de penser, en se laissant guider par l'induction, que cette loi se continue et que l'on a en général

$$\Delta^n u_0 = u_n - n u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} u_{n-3} + \ldots \quad [1].$$

Pour démontrer cette formule, nous allons faire voir que si

elle est vraie pour l'expression de $\Delta^{n-1}u_0$ elle le sera pour l'expression de $\Delta^n u_0$. Supposons donc que l'on ait

$$\Delta^{n-1}u_0 = u_{n-1} - (n-1)u_{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}u_{n-3} - \ldots$$

on aura pareillement :

$$\Delta^{n-1}u_1 = u_n - (n-1)u_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}u_{n-2} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}u_{n-3} + \ldots$$

on en conclura

$$\Delta^n u_0 = \Delta^{n-1}u_1 - \Delta^{n-1}u_0$$

$$= u_n - \left.\begin{matrix}(n-1)\\ -1\end{matrix}\right| u_{n-1} + \left.\begin{matrix}\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\\ +(n-1)\end{matrix}\right| u_{n-2} - \left.\begin{matrix}\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\\ -\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\end{matrix}\right| u_{n-3} + \ldots$$

ou en réduisant :

$$\Delta^n u_0 = u_n - nu_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}u_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u_{n-3} + \ldots$$

c'est-à-dire la formule [1]. Or, la loi a été reconnue vraie pour l'expression de $\Delta^3 u_0$, donc elle le sera pour $\Delta^4 u_0$; l'étant pour $\Delta^4 u_0$, elle le sera aussi pour $\Delta^5 u_0$, et ainsi de suite ; donc elle est générale. On peut écrire la formule [1] de cette manière symbolique :

$$\Delta^n u_0 = (u-1)^n \qquad [2],$$

sous la condition qu'en développant la puissance indiquée on devra changer les exposants de u en indices.

650. Réciproquement, on peut obtenir *l'expression de l'une quelconque des quantités de la suite primitive, en fonction du premier terme de cette suite et de ses différences successives.* On a d'abord :

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0, \quad \text{et} \quad \Delta u_1 = \Delta u_0 + \Delta^2 u_0$$

donc,

$$u_2 = u_1 + \Delta u_1 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0.$$

On a de même :

$$\Delta u_2 = \Delta u_1 + \Delta^2 u_1 = \Delta u_0 + 2\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0$$

et par suite :

$$u_3 = u_2 + \Delta u_2 = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0.$$

On remarque que les coefficients numériques des expressions de u_2 et de u_3 sont encore ceux du carré et du cube d'un binome, dont le second terme est positif ; et l'on démontre facilement que cette loi est générale. En effet, admettons qu'elle soit vraie pour u_{n-1}, on aura :

$$u_{n-1} = u_0 + (n-1)\Delta u_0 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \ldots$$

$$\Delta u_{n-1} = \Delta u_0 + (n-1)\Delta^2 u_0 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\Delta^3 u_0 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\Delta^4 u_0 + \ldots$$

et par suite :

$$u_n = u_{n-1} + \Delta u_{n-1},$$

$$= u_0 + \left.\begin{matrix}(n-1) \\ + \;\; 1\end{matrix}\right|\Delta u_0 + \left.\begin{matrix}\frac{(n-1)(n-2)}{1.2} \\ + \;\; n-1\end{matrix}\right|\Delta^2 u_0 + \left.\begin{matrix}\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} \\ + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\end{matrix}\right|\Delta^3 u_0 + \ldots$$

ou, en réduisant :

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \ldots \quad [3]$$

c'est-à-dire que la loi sera vraie pour u_n. Or, nous l'avons vérifiée pour u_3, donc elle est vraie pour u_4 ; l'étant pour u_4, elle le sera pour u_5, et ainsi de suite ; donc elle est générale. On la représente par la formule symbolique :

$$u_n = (1 + \Delta)^n u_0 \quad [4],$$

en observant qu'après le développement de la puissance les exposants doivent être seulement considérés comme indiquant l'ordre des différences.

§ II. DIFFÉRENCES DES FONCTIONS ENTIÈRES.

651. Supposons actuellement que les quantités u_0, u_1, u_2.... soient les valeurs successives que prend la fonction *entière et rationnelle* de x,

$$u = \varphi(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Sx^2 + Tx + U,$$

lorsque l'on donne à la variable x les valeurs respectives $x_0, x_1, x_2 \ldots$ supposées en progression arithmétique, c'est-à-dire telles que

$$x_1 = x_0 + h$$
$$x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$$
$$x_3 = x_2 + h = x_0 + 3h$$
$$\ldots \text{ etc.,}$$

en désignant par h la différence constante de deux valeurs consécutives de x. Si l'on appelle x l'une quelconque des valeurs $x_1, x_2, x_3, \ldots$ et u la valeur correspondante de la fonction, on aura (**482**),

$$\Delta u = \varphi(x+h) - \varphi(x) = \varphi'(x)h + \varphi''(x)\frac{h^2}{1.2} + \ldots;$$

d'où l'on conclut que la différence première d'un terme quelconque u de la série $u_0, u_1, u_2, \ldots$ est un polynome du degré $(m-1)$ en x [puisque $\varphi'(x)$ est du degré $(m-1)$, $\varphi''(x)$ du degré $(m-2)$, etc.], dont chaque terme renferme le facteur h; et le premier terme de ce polynome, celui qui contient x à la plus haute puissance, est d'ailleurs évidemment le premier terme de $\varphi'(x)h$, c'est-à-dire $mAx^{m-1}h$. Donc, en ordonnant par rapport à x et mettant en évidence le facteur h, il viendra pour Δu une expression de la forme

$$\Delta u = mAhx^{m-1} + B_1hx^{m-2} + \ldots + S_1hx + T_1h$$
$$= h.\psi(x),$$

$\psi(x)$ étant du degré $(m-1)$ en x.

Considérons maintenant la série des quantités $\Delta u_0, \Delta u_1, \Delta u_2, \ldots$, qui sont toutes, d'après ce qui précède, des polynomes du degré $(m-1)$ multipliés par h. La différence première d'une quelconque de ces quantités, c'est-à-dire la différence seconde d'une quelconque des quantités $u_0, u_1, u_2, \ldots$, sera :

$$\Delta^2 u = h.\psi(x+h) - h.\psi(x) = h.[\psi(x+h) - \psi(x)],$$

et l'on verra facilement, comme ci-dessus, que $\psi(x+h) - \psi(x)$

sera un polynome du degré $(m-2)$ dont tous les termes renfermeront le facteur h, et dont le premier terme sera le premier terme de $\psi(x).h$, c'est-à-dire $m(m-1)\mathrm{A}x^{m-2}.h$; donc, $\Delta^2 u$ sera un polynome du degré $(m-2)$, dont tous les termes renfermeront le facteur h^2, et de la forme :

$$\Delta^2 u = m(m-1)\mathrm{A}h^2x^{m-2} + \mathrm{B}_2h^2x^{m-3} + \ldots$$

On verra de même que les degrés des différences successives $\Delta^3 u$, $\Delta^4 u$, etc., iront toujours en décroissant d'une unité de chaque différence à la suivante; par conséquent la différence de l'ordre m, ou $\Delta^m u$, ne dépendra pas de x, et elle sera :

$$\Delta^m u = m(m-1)(m-2)\ldots .2.1\,\mathrm{A}h^m,$$

ou bien

$$\Delta^m u = 1.2.3\ldots m.\mathrm{A}.h^m \qquad [5];$$

cette différence étant constante, toutes celles des ordres suivants seront nulles.

Ainsi, *si dans une fonction entière et rationnelle du degré* m, *on substitue une suite de nombres en progression arithmétique, les différences* m^{mes} *des résultats ainsi obtenus sont constantes.*

652. Cette propriété des fonctions entières permet d'obtenir facilement la suite des valeurs que prend une pareille fonction pour des valeurs équidistantes de la variable, lorsque l'on a déjà calculé directement un nombre de ces valeurs égal au degré de la fonction.

Exemple I. Soit la fonction du troisième degré :

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1,$$

et proposons-nous de former les valeurs que prend ce polynome pour les valeurs entières de x.

Il suffira de calculer d'abord directement les valeurs qu'il prendra pour *trois* valeurs consécutives quelconques données à la variable.

Si nous faisons pour plus de simplicité $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, on trouvera pour les valeurs correspondantes de y,

$y_0 = +7$, $y_1 = +1$, $y_2 = +1$; on en déduira successivement :

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = -6;\ \ \Delta y_1 = y_2 - y_1 = 0,$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = +6.$$

On a d'ailleurs, d'après ce qui précède, formule [5],

$$\Delta^3 y_0 = 1.2.3 \times 2 = 12.$$

On pourra disposer ces résultats de la manière suivante :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
−1	+7	−6	+6	12
0	+1	0		
+1	+1			

On remplira ensuite les différentes colonnes en allant de droite à gauche, et en observant que chaque terme de l'une d'elles (la première colonne exceptée) est égal à celui qui est au-dessus de lui dans la même colonne augmenté du terme correspondant à ce dernier dans la colonne placée à sa droite. On pourra ainsi prolonger les colonnes dans les deux sens, et former le tableau suivant :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
−5	−149	+ 90	−42	12
−4	− 59	+ 48	−30	12
−3	− 11	+ 18	−18	12
−2	+ 7	0	− 6	12
−1	+ 7	− 6	+ 6	12
0	+ 1	0	+18	12
+1	+ 1	+ 18	+30	12
+2	+ 19	+ 48	+42	12
+3	+ 67	+ 90	+54	
+4	+157	+144		
+5	+301			

Pour obtenir les nombres au-dessous des filets, on continue d'abord la colonne des différences secondes $+18$, $+30$, $+42$, etc., dont chacune est égale à la précédente augmentée de la différence constante 12; on forme ensuite chacune des différences premières en ajoutant à celle qui précède la différence seconde placée dans la même ligne que celle-ci, et ainsi de suite. Pour obtenir les nombres placés au-dessus des filets, on formera d'abord les différences secondes $-6, -18, -30$, etc., dont chacune se déduit de celle immédiatement inférieure en en retranchant la différence constante 12; on obtiendra ensuite chacune des différences premières en retranchant de celle déjà écrite au-dessous la différence seconde placée dans la même ligne que celle que l'on veut former, etc.

Exemple II. *Former la somme des troisième et quatrième puissances de tous les nombres impairs positifs.*

On calculera directement *quatre* valeurs de la fonction $y = x^4 + x^3$, correspondantes aux valeurs de la variable $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$, et on déduira successivement Δy_0, Δy_1, Δy_2, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^2 y_1$, $\Delta^3 y_0$; on aura d'ailleurs $\Delta^4 y_0 = 1.2.3.4.2^4 = 384$, en faisant $m = 4$, $A = 1$, $h = 2$ dans la formule [5]. On obtiendra facilement le tableau suivant :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1	2	106	536	816	384
3	108	642	1352	1200	384
5	750	1994	2552	1584	384
7	2744	4546	4136	1968	384
9	7290	8682	6104	2352	
11	15972	14786	8456		
13	30758	23242			
15	54000				
etc.	etc.				

653. La formule générale [1] devient, en remplaçant u par $\varphi(x)$:

$$\Delta^m u = \varphi(x+mh) - \frac{m}{1}\varphi[x+(m-1)h] + \frac{m(m-1)}{1.2}\varphi[x+(m-2)h] - \dots$$

Dans le cas où $\varphi(x)$ est un polynome algébrique, le premier membre se réduisant à une quantité indépendante de x, il faudra qu'il en soit de même du second ; on pourra donc égaler à zéro tous les coefficients des diverses puissances de x, et obtenir ainsi des relations qui fourniront divers théorèmes d'algèbre. Supposons, par exemple, $\varphi(x) = x^m$; il viendra :

$$\Delta^m(x^m) = (x+mh)^m - \frac{m}{1}[x+(m-1)h]^m + \frac{m(m-1)}{1.2}[x+(m-2)h]^m - \dots;$$

d'où l'on tire, en faisant $x=0$ et $h=1$,

$$1.2.3 \dots (m-1)m = m^m - \frac{m}{1}(m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^m - \dots,$$

égalité qui peut servir à démontrer le théorème d'arithmétique connu sous le nom de *Théorème de* Wilson. (*Arithm.*, **368.**)

§ III. CONSTRUCTION DES TABLES NUMÉRIQUES.

654. Nous venons d'appliquer avec une grande facilité la considération des différences au calcul des valeurs d'une fonction entière. On peut en étendre l'usage au calcul des valeurs successives d'une fonction quelconque. Si l'on considère en effet une série de valeurs d'une fonction quelconque formées suivant une certaine loi et suffisamment rapprochées, on remarque en général que leurs différences successives tendent de plus en plus à devenir égales, à mesure que leur ordre s'élève ; on pourra donc, en négligeant des quantités fort petites, regarder comme constantes dans un certain intervalle les différences d'un certain ordre, et procéder alors comme s'il s'agissait d'une fonction entière, pour construire le tableau qui donnera dans cet intervalle la suite des valeurs de la fonction considérée.

Nous allons faire l'application de ce qui précède à la construction des *Tables de logarithmes* et des *Tables trigonométriques*.

635. Considérons d'abord la fonction $y = \log x$, et formons ses différences successives. On trouvera :

$$\Delta y = \log(x+h) - \log x = \log\left(\frac{x+h}{x}\right) = \log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$
$$= \log e\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \ldots\right) \text{ (501).}$$

$$\Delta^2 y = \log(x+2h) - 2\log(x+h) + \log x \text{ (649)}$$
$$= [\log(x+2h) - \log x] - 2[\log(x+h) - \log x] = \log\left(1+\frac{2h}{x}\right) - 2\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$
$$= -\log e\left(\frac{h^2}{x^2} - \frac{2h^3}{x^3} + \ldots\right).$$

$$\Delta^3 y = \log(x+3h) - 3\log(x+2h) + 3\log(x+h) - \log x$$
$$= [\log(x+3h) - \log x] - 3[\log(x+2h) - \log x] + 3[\log(x+h) - \log x]$$
$$= \log\left(1+\frac{3h}{x}\right) - 3\log\left(1+\frac{2h}{x}\right) + 3\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$
$$= \log e\left(\frac{2h^3}{x^3} - \ldots\right),$$

etc.

On voit que si l'on prend, par exemple, $x \geqq 10000$ et $h = 1$, les différences successives décroîtront très-rapidement. On trouvera dans ce cas, en forçant l'unité sur le quinzième chiffre décimal, que

$$\Delta y < 0,000\,043\,427\,276\,864,$$
$$\Delta^2 y < 0,000\,000\,004\,342\,077,$$
$$\Delta^3 y < 0,000\,000\,000\,000\,869.$$

Si donc on veut calculer une table de logarithmes avec *huit décimales*, on pourra négliger pendant longtemps les différences du troisième ordre, et procéder comme si la différence deuxième était constante. Il est facile d'ailleurs d'apprécier l'erreur qu'occasionne sur la valeur d'un terme de rang quelconque n la suppression des différences d'un ordre donné, en faisant usage de la formule [3] :

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \ldots$$

636. Ainsi, pour calculer avec *huit décimales* les logarith-

mes des nombres successifs à partir de 10000, on partira des valeurs suivantes :

$$y = \log x = 4, \quad h = 1,$$
$$\Delta y = 0,000\,043\,427\,27,$$
$$\Delta^2 y = 0,000\,000\,004\,34.$$

(On prend les valeurs de Δy et $\Delta^2 y$ avec quelques décimales de plus que l'on ne veut en conserver dans les valeurs de y, afin d'éviter l'accumulation des erreurs.)

x	$y = \log x$	Δy	$\Delta^2 y$
10000	4,000 000 000 00	0,000 043 427 27	0,000 000 004 34
10001	4,000 043 427 27	0,000 043 431 61	0,000 000 004 34
10002	4,000 086 858 88	0,000 043 435 95	0,000 000 004 34
10003	4,000 130 294 83	0,000 043 440 29	0,000 000 004 34
10004	4,000 173 735 12	0,000 043 444 63	
10005	4,000 217 179 75		
etc.	etc.		

On ne gardera que huit décimales dans toutes les valeurs de y. On aura d'ailleurs soin de vérifier les résultats obtenus au moyen de logarithmes calculés directement à certains intervalles. En adoptant les valeurs ci-dessus de Δy et Δy^2, on verra facilement que l'erreur commise sur le logarithme de 10040, par exemple, surpasse à peine une unité du huitième ordre décimal *. On pourra donc prolonger le tableau

* On a en effet (formule [5]), pour $n = 40$:

$$\log 10040 = \log(y = 10000) + 40 \cdot \Delta y + \frac{40.39}{1.2}\Delta^2 y + \frac{40.39.38}{1.2.3}\Delta^3 y + \ldots$$
$$= \log 10000 + 40\Delta y + 780.\Delta^2 y + 9880\,\Delta^3 y + \ldots$$

L'erreur commise sur Δy est $< 0,000\,000\,000\,006\,864$
$\Delta^2 y$ $< 0,000\,000\,000\,002\,077$
$\Delta^3 y$ $< 0,000\,000\,000\,000\,869$;

ci-dessus jusqu'au logarithme de 10040, mais on n'ira pas plus loin; arrivé à ce nombre, on calculera *directement* son logarithme, ainsi que les différences première et seconde correspondantes, et on formera par leur moyen les logarithmes des nombres consécutifs 10041, 10042, etc., dans un nouvel intervalle, et ainsi de suite.

637. Considérons actuellement la fonction $y=\sin x$. On trouvera successivement :

$$\begin{aligned}
\Delta \sin x &= \quad \sin(x+h) - \quad \sin x = \quad 2\sin\tfrac{1}{2}h\cos(x+\tfrac{1}{2}h),\\
\Delta^2 \sin x &= \Delta \sin(x+h) - \Delta \sin x = -(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2\sin(x+h),\\
\Delta^3 \sin x &= \Delta^2 \sin(x+h) - \Delta^2 \sin x = -(2\sin\tfrac{1}{2}h)^3\sin(x+\tfrac{3}{2}h),\\
\Delta^4 \sin x &= \Delta^3 \sin(x+h) - \Delta^3 \sin x = \quad (2\sin\tfrac{1}{2}h)^4\sin(x+2h),
\end{aligned}$$

etc.

Ces différences diminuent très-rapidement si l'arc h est très-petit.

Si l'on observe d'ailleurs que

$$\Delta^2 \sin x = [\sin(x+2h) - \sin(x+h)] - [\sin(x+h) - \sin x],$$

on aura, en égalant cette expression à celle trouvée ci-dessus pour $\Delta^2 \sin x$, et transposant le second terme dans le second membre :

$$\begin{aligned}
\sin(x+2h) - \sin(x+h) &= \sin(x+h) - \sin x\\
&\quad -(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2\sin(x+h);
\end{aligned}$$

et, en faisant $x=(m-1)h$, il viendra :

$$\begin{aligned}
\sin(m+1)h - \sin mh &= \sin mh - \sin(m-1)h\\
&\quad -(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2\sin mh.
\end{aligned}$$

---

par conséquent, l'erreur commise sur le logarithme de 10040 sera plus petite que

$$\left.\begin{array}{r} 40 \times 0,000\,000\,000\,006\,864\\ +\ \ 780 \times 0,000\,000\,000\,002\,077\\ +\ 9880 \times 0,000\,000\,000\,000\,869 \end{array}\right\} < 0,000\,000\,011.$$

(Nous négligeons l'erreur résultant de la suppression des termes en $\Delta^4 y$, etc., laquelle est extrêmement petite par rapport à celles des termes précédents.)

C'est la formule de *Thomas Simpson*, pour le calcul des tables de sinus.

658. Si l'on connaissait les valeurs *exactes* des différences $\Delta^2 \sin x$ pour les diverses valeurs de x et celle de $\Delta \sin x$ pour $x = 0$, on en déduirait les valeurs *exactes* des sinus de tous les arcs croissant à partir de zéro par intervalles égaux à h; en effet, connaissant exactement la suite des termes $\Delta^2 \sin 0$, $\Delta^2 \sin h$, $\Delta^2 \sin 2h$, etc., et $\Delta \sin 0$, on calculerait d'abord les différences premières successives $\Delta \sin h = \Delta \sin 0 + \Delta^2 \sin 0$, $\Delta \sin 2h = \Delta \sin h + \Delta^2 \sin h$, etc.; puis, au moyen de celles-ci, la suite $\sin h = \Delta \sin 0$, $\sin 2h = \sin h + \Delta \sin h$, etc.

Ainsi, les erreurs commises sur les valeurs calculées successivement de la suite des sinus, $\sin h$, $\sin 2h$, $\sin 3h$, etc., seront seulement occasionnées par les erreurs dont seront affectées les différences secondes $\Delta^2 \sin x$, et la différence première $\Delta \sin x$ pour $x = 0$.

Soit e l'erreur du premier terme $\Delta^2 \sin 0$ ou $-(2 \sin \frac{1}{2} h)^2 \sin h$ de la suite des différences secondes $\Delta^2 \sin 0$, $\Delta^2 \sin h$, $\Delta^2 \sin 2h$, etc.; et supposons d'abord que ce premier terme soit seul fautif. Cette erreur produira une erreur égale sur chacun des termes de la suite des différences premières $\Delta \sin 0$, $\Delta \sin h$, $\Delta \sin 2h$, etc., *à partir du second* $\Delta \sin h$, puisque l'on a

$$\begin{array}{ll} \Delta \sin \ h = \Delta \sin 0 + \Delta^2 \sin 0 & \text{erreur} = e, \\ \Delta \sin 2h = \Delta \sin h + \Delta^2 \sin h & \text{erreur} = e, \\ \text{etc.}; & \end{array}$$

et ces erreurs des différences premières produiront à leur tour des erreurs croissantes e, $2e$, $3e$, etc., sur les termes de la suite des sinus *à partir du troisième* $\sin 2h$, puisque l'on a

$$\begin{array}{ll} \sin 2h = \sin \ h + \Delta \sin \ h & \text{erreur} = \ e, \\ \sin 3h = \sin 2h + \Delta \sin 2h & \text{erreur} = 2e, \\ \text{etc.} & \end{array}$$

Si nous supposons maintenant que le second terme $\Delta^2 \sin h$ de la suite des différences secondes soit aussi fautif de la

même quantité e, il est clair qu'il en résultera une nouvelle erreur égale encore à e sur les différences premières à partir de $\Delta \sin 2h$, de sorte que les termes $\Delta \sin 2h$, $\Delta \sin 3h$, $\Delta \sin 4h$, etc., seront tous affectés d'une erreur totale égale à $2e$; et, à leur tour, les termes de la suite des sinus, à partir du quatrième $\sin 3h$, se trouveront affectés respectivement des nouvelles erreurs e, $2e$, $3e$, etc.; de sorte que

$$\begin{array}{lll} \sin 3h & \text{sera fautif de} & 2e + e, \\ \sin 4h & \text{sera fautif de} & 3e + 2e, \\ \text{etc.} & & \end{array}$$

On en conclut facilement qu'en supposant toutes les différences secondes $\Delta^2 \sin 0$, $\Delta^2 \sin h$, $\Delta^2 \sin 2h$, etc., fautives de la même quantité e, l'erreur totale produite sur $\sin mh$ par les erreurs des différences secondes sera la somme des erreurs partielles

$$\begin{array}{lll} (m-1)e, & \text{erreur due au terme} & \Delta^2 \sin 0, \\ (m-2)e, & \text{erreur due au terme} & \Delta^2 \sin h, \\ \vdots & & \\ 2e, & \text{erreur due au terme} & \Delta^2 \sin (m-3)h, \\ e, & \text{erreur due au terme} & \Delta^2 \sin (m-2)h, \end{array}$$

c'est-à-dire :

$$e[1 + 2 + \ldots + (m-2) + (m-1)] = \frac{m(m-1)}{2} e.$$

Quant à l'erreur résultant de l'erreur commise sur le premier terme $\Delta \sin 0$ de la suite des différences premières, il est évident qu'elle ne fera que s'ajouter à elle-même en passant d'un terme quelconque de la suite des sinus au suivant, de sorte qu'elle sera multipliée par m lorsqu'on arrivera au terme $\sin mh$.

659. Ceci posé, supposons que l'on veuille calculer la suite des sinus de 10″ en 10″ à partir de 0 jusqu'à $30^\circ = 108000''$. L'expression générale d'un terme de la suite des différences secondes est $-(2 \sin \frac{1}{2} h)^2 \cdot \sin mh$, dans laquelle on fera $h = 10''$, et on devra donner à m toutes les valeurs 1, 2, 3,...10800.

Or, on peut obtenir les différences secondes avec seize décimales exactes, on aura donc $e < \frac{1}{10^{16}}$; donc, en supposant que toutes les erreurs atteignent leur limite supérieure et qu'elles soient toutes dans le même sens, l'erreur qu'elles occasionneront sur le dernier terme sin 30° de la suite des sinus, sera inférieure à $\frac{10800 . 10799}{2} \cdot \frac{1}{10^{16}} = 0,000\,000\,005\,831\,46$.

En second lieu, l'erreur commise sur le premier terme $\Delta \sin 0 = \sin 10''$, sera assez faible pour qu'étant multipliée par 10800, elle produise sur le dernier sinus une erreur moindre que 0, 000 000 001 08. L'erreur totale due à ces deux causes sera donc moindre qu'une unité du huitième ordre décimal; de sorte que l'on aura au moins huit décimales exactes dans toute la suite des résultats.

§ IV. CALCUL INVERSE DES DIFFÉRENCES.

660. La question que l'on se propose a pour objet de *trouver une fonction* F(x) *telle que sa différence soit égale à une fonction donnée* f(x).

On désigne cette fonction par $\Sigma f(x)$. Ainsi, l'égalité

$$\Sigma f(x) = F(x)$$

signifie que

$$\Delta F(x) = f(x),$$

ou que

$$F(x+h) - F(x) = f(x).$$

661. Ayant trouvé une fonction particulière $F(x)$ telle que $\Delta F(x) = f(x)$, on peut se demander s'il n'existe pas une solution plus générale. Supposons qu'il en existe effectivement une, et soit $\varphi(x)$ ce qu'il faut ajouter à $F(x)$ pour obtenir cette solution générale. On devra donc avoir

$$\Delta[F(x) + \varphi(x)] \quad \text{ou} \quad \Delta F(x) + \Delta\varphi(x) = f(x);$$

mais, par hypothèse, $\Delta F(x) = f(x)$; donc

$$\Delta\varphi(x) = 0, \quad \text{ou}, \quad \varphi(x+h) - \varphi(x) = 0,$$

c'est-à-dire que la fonction $\varphi(x)$ sera une fonction périodique, ayant h pour période; elle sera par exemple de la forme

$$\psi\left(\sin\frac{2\pi x}{h}\right),\ \psi\left(\cos\frac{2\pi x}{h}\right),$$

astreinte seulement à la condition de reprendre pour $x=x_0+nh$ la même valeur que pour $x=x_0$, et restant d'ailleurs arbitraire dans l'étendue de chaque intervalle égal à h. Il est évident que si x ne devait recevoir d'autres valeurs que les multiples successifs de h, la fonction $\varphi(x)$ serait alors une simple constante.

662. Un polynôme algébrique étant donné, on peut toujours trouver une fonction dont ce polynome soit la différence.

Soit en effet

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots\ldots+Tx+U$$

le polynome donné. Nous avons vu (**651**) que la différence d'un polynome algébrique était un polynome algébrique de degré moindre d'une unité; nous pouvons donc inversement représenter la fonction cherchée par le polynome du degré $(m+1)$

$$A'x^{m+1}+B'x^m+C'x^{m-1}+\ldots\ldots+T'x+U',$$

$A', B', C', \ldots\ldots T', U'$ étant des coefficients indéterminés. Pour trouver leurs valeurs, on formera la différence du polynome $A'x^{m+1}+B'x^m+\ldots\ldots$, et on exprimera qu'elle est égale au polynome donné, ce qui conduira à égaler à zéro les coefficients des mêmes puissances de x. On trouvera ainsi sans peine les équations :

$$A=\frac{m+1}{1}A'h;$$

$$B=\frac{(m+1)m}{1\,.\,2}A'h^2+\frac{m}{1}B'h,$$

$$C=\frac{(m+1)m(m-1)}{1\,.\,2\,.\,3}A'h^3+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}B'h^2+\frac{m-1}{1}C'h,$$

etc.;

d'où l'on tirera :

$$A' = \frac{A}{(m+1)h},$$
$$B' = \frac{B}{mh} - \frac{A}{2},$$
$$C' = \frac{C}{(m-1)h} - \frac{B}{2} + \frac{mAh}{2.2.3},$$
etc.

Supposons, par exemple, que le polynome donné soit x^m; en faisant $A=1$, $B=0$, $C=0$, etc., il viendra

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \frac{x^m}{2} + \frac{mhx^{m-1}}{2.2.3} - \text{etc.}$$

En faisant successivement dans cette formule $m=0, 1, 2, 3$, etc., on obtiendra $\Sigma 1$, Σx, Σx^2, etc. Si l'on suppose par exemple $h=1$, on aura :

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma 1 &= \frac{x}{1} + \text{constante} \\
\Sigma x &= \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \text{constante} \\
\Sigma x^2 &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} + \text{constante} \\
\Sigma x^3 &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \text{constante} \\
\Sigma x^4 &= \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30} + \text{constante} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\} \quad [6].$$

Ces formules vont nous servir à calculer la somme des termes de différentes séries.

663. Considérons la série :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_x,$$

dans laquelle on passe d'un terme au suivant en donnant successivement à x des valeurs entières croissantes d'une unité. Posons

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_x = V_x.$$

Nous pouvons regarder V_x comme le terme de rang x dans la série

$$u_1+(u_1+u_2)+(u_1+u_2+u_3)+\ldots\ldots$$
$$+(u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots+u_x)+\ldots\ldots$$

et le terme V_{x+1} de rang $x+1$ de cette série, sera

$$u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots+u_x+u_{x+1}=V_{x+1};$$

d'où l'on tire :

$$V_{x+1}-V_x \quad \text{ou} \quad \Delta V_x=u_{x+1},$$

équation qui conduit à celle-ci :

$$\Sigma u_{x+1}=V_x+C,$$

C étant ici une simple constante (661), puisque $h=1$ et que les valeurs données à x sont entières.

Or, V_x est une somme, celle des termes $(u_1+u_2+u_3+\ldots+u_x)$, que je représente par $S(u_x)$, donc Σu_{x+1} sera aussi une véritable somme. L'équation devient

$$S(u_x)=\Sigma u_{x+1}+C.$$

664. Si nous considérons, par exemple, les séries :

$$\begin{array}{l} 1\ +2\ +3\ +\ldots\ldots+x \\ 1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+x^2 \\ 1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots+x^3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ 1^m+2^m+3^m+\ldots\ldots+x^m, \end{array}$$

et que l'on veuille calculer pour chacune la somme de ses termes, on aura :

$$\begin{array}{l} S(x)\ =\Sigma(x+1)\ +C \\ S(x^2)=\Sigma(x+1)^2+C \\ S(x^3)=\Sigma(x+1)^3+C \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ S(x^m)=\Sigma(x+1)^m+C. \end{array}$$

On calculera $\Sigma(x+1)$, $\Sigma(x+1)^2\ldots\ldots$ $\Sigma(x+1)^m$ en changeant

x en $(x+1)$ dans les formules que nous avons trouvées précédemment (662) pour Σx, $\Sigma x^2 \ldots\ \Sigma x^m$; quant à la constante, on la déterminera en observant que tous les seconds membres doivent se réduire à 1 pour $x=1$, d'où l'on conclura $C=0$. On trouvera ainsi :

$$S(x)=\frac{(x+1)^2}{2}-\frac{x+1}{2}=\frac{x(x+1)}{2}$$

$$S(x^2)=\frac{(x+1)^3}{3}-\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{x+1}{6}=\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}.$$

etc.

Ce sont les formules que nous avons déjà trouvées (367), et que nous avons appliquées à la *sommation des piles de boulets*. Nous pouvons du reste y arriver d'une autre manière, qui a l'avantage de fournir immédiatement les seconds membres décomposés en facteurs.

665. Soit en effet le produit

$$U=x(x+h)(x+2h)\ldots(x+nh).$$

On trouve facilement que

$$\Delta U=(n+1)h[(x+h)(x+2h)\ldots(x+nh)];$$

donc

$$U=\Sigma\{(n+1)h[(x+h)(x+2h)\ldots(x+nh)]\},$$

ou, en remplaçant U par sa valeur, et observant que $(n+1)h$ étant une constante peut être mis en dehors du signe Σ :

$$\Sigma[(x+h)(x+2h)\ldots(x+nh)]=\frac{1}{(n+1)h}[x(x+h)(x+2h)\ldots(x+nh)].$$

Si l'on fait $h=1$, il viendra

$$\Sigma[(x+1)(x+2)\ldots(x+n)]=\frac{1}{n+1}[x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)]\ldots \quad [7];$$

formule au moyen de laquelle on déterminera successivement $\Sigma(x+1)=\frac{x(x+1)}{2}$, $\Sigma[(x+1)(x+2)]$ etc., en faisant $n=1,2,$ etc.

Pour obtenir Σx, $\Sigma[x(x+1)]$, $\Sigma[x(x+1)(x+2)]$, etc., il suf-

Nous pouvons regarder V_x comme le terme de rang x dans la série

$$u_1+(u_1+u_2)+(u_1+u_2+u_3)+\ldots\ldots$$
$$+(u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots+u_x)+\ldots\ldots$$

et le terme V_{x+1} de rang $x+1$ de cette série, sera

$$u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots+u_x+u_{x+1}=V_{x+1};$$

d'où l'on tire :

$$V_{x+1}-V_x \quad \text{ou} \quad \Delta V_x=u_{x+1},$$

équation qui conduit à celle-ci :

$$\Sigma u_{x+1}=V_x+C,$$

C étant ici une simple constante (**661**), puisque $h=1$ et que les valeurs données à x sont entières.

Or, V_x est une somme, celle des termes $(u_1+u_2+u_3+\ldots+u_x)$, que je représente par $S(u_x)$, donc Σu_{x+1} sera aussi une véritable somme. L'équation devient

$$S(u_x)=\Sigma u_{x+1}+C.$$

664. Si nous considérons, par exemple, les séries :

$$\begin{array}{l} 1\ +2\ +3\ +\ldots\ldots+x \\ 1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+x^2 \\ 1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots+x^3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ 1^m+2^m+3^m+\ldots\ldots+x^m, \end{array}$$

et que l'on veuille calculer pour chacune la somme de ses termes, on aura :

$$\begin{array}{l} S(x)\ =\Sigma(x+1)\ +C \\ S(x^2)=\Sigma(x+1)^2+C \\ S(x^3)=\Sigma(x+1)^3+C \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ S(x^m)=\Sigma(x+1)^m+C. \end{array}$$

On calculera $\Sigma(x+1)$, $\Sigma(x+1)^2\ldots.$ $\Sigma(x+1)^m$ en changeant

x en $(x+1)$ dans les formules que nous avons trouvées précédemment (**662**) pour Σx, $\Sigma x^2 \ldots$ Σx^m; quant à la constante, on la déterminera en observant que tous les seconds membres doivent se réduire à 1 pour $x=1$, d'où l'on conclura $C=0$. On trouvera ainsi :

$$S(x) = \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{x+1}{2} = \frac{x(x+1)}{2}$$

$$S(x^2) = \frac{(x+1)^3}{3} - \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{x+1}{6} = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}.$$

etc.

Ce sont les formules que nous avons déjà trouvées (**367**), et que nous avons appliquées à la *sommation des piles de boulets*. Nous pouvons du reste y arriver d'une autre manière, qui a l'avantage de fournir immédiatement les seconds membres décomposés en facteurs.

665. Soit en effet le produit

$$U = x(x+h)(x+2h)\ldots(x+nh).$$

On trouve facilement que

$$\Delta U = (n+1)h[(x+h)(x+2h)\ldots(x+nh)];$$

donc

$$U = \Sigma\{(n+1)h[(x+h)(x+2h)\ldots(x+nh)]\},$$

ou, en remplaçant U par sa valeur, et observant que $(n+1)h$ étant une constante peut être mis en dehors du signe Σ :

$$\Sigma[(x+h)(x+2h)\ldots(x+nh)] = \frac{1}{(n+1)h}[x(x+h)(x+2h)\ldots(x+nh)].$$

Si l'on fait $h=1$, il viendra

$$\Sigma[(x+1)(x+2)\ldots(x+n)] = \frac{1}{n+1}[x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)] \quad [7];$$

formule au moyen de laquelle on déterminera successivement $\Sigma(x+1) = \frac{x(x+1)}{2}$, $\Sigma[(x+1)(x+2)]$ etc., en faisant $n=1,2,$ etc.

Pour obtenir Σx, $\Sigma[x(x+1)]$, $\Sigma[x(x+1)(x+2)]$, etc., il suf-

fira évidemment de changer dans la formule précédente x en $x-1$. On trouvera ainsi :

$$\Sigma x = \tfrac{1}{2}(x-1)x$$

$$\Sigma[x(x+1)] = \tfrac{1}{3}(x-1)\,x\,(x+1)$$

$$\Sigma[x(x+1)(x+2)] = \tfrac{1}{4}(x-1)\,x\,(x+1)(x+2),$$

etc.

666. Il est maintenant facile de déterminer $\Sigma(x+1)^2$, $\Sigma(x+1)^3$, etc.

On a en effet

$$\Sigma(x+1)^2 = \Sigma[x(x+1)+(x+1)] = \Sigma x(x+1) + \Sigma(x+1)$$

$$\Sigma(x+1)^3 = \Sigma[x(x+1)^2+(x+1)^2] = \Sigma x(x+1)^2 + \Sigma(x+1)^2$$

$$= \Sigma x(x+1)(x+2-1) + \Sigma(x+1)^2$$

$$= \Sigma x(x+1)(x+2) - \Sigma x(x+1) + \Sigma(x+1)^2,$$

etc.

On continuera ainsi de suite, en transformant chacune des expressions $\Sigma(x+1)^4$, $\Sigma(x+1)^5$, etc., en expressions composées de termes connus. On trouvera ainsi :

$$\left.\begin{aligned}\Sigma(x+1)^1 &= \frac{x(x+1)}{2} = S(x)\\ \Sigma(x+1)^2 &= \frac{x(x+1)(2x+1)}{6} = S(x^2)\\ \Sigma(x+1)^3 &= \frac{x^2(x+1)^2}{4} = S(x^3) = [S(x)]^2\end{aligned}\right\}\quad [8].$$

Nous n'avons pas ajouté de constante, puisqu'elle doit être évidemment nulle.

On remarquera d'ailleurs la dernière formule $S(x^3)=[S(x)]^2$; elle exprime l'égalité suivante :

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+x^3 = [1+2+3\ldots+x]^2.$$

§ V. DE L'INTERPOLATION.

667. L'INTERPOLATION *a pour but, étant donné un certain nombre de valeurs d'une fonction avec les valeurs de la variable auxquelles elles correspondent, de déterminer les valeurs que prend cette fonction pour d'autres valeurs intermédiaires et données de la variable.*

668. Lorsque la fonction proposée est entière et du degré n, elle est entièrement déterminée, si l'on connaît les valeurs correspondantes à $(n+1)$ valeurs différentes et données de la variable; en effet, deux pareilles fonctions sont nécessairement identiques lorsqu'elles prennent les mêmes valeurs pour $(n+1)$ valeurs différentes de la variable, car, si elles ne l'étaient pas, en égalant à zéro leur différence, on formerait une équation qui serait au plus du degré n, et dont le premier membre serait annulé par $(n+1)$ valeurs de la variable, ce qui ne se peut (518). On représentera donc cette fonction par

$$y = A + Bx + Cx^2 + \dots + Kx^n,$$

et en exprimant qu'elle prend successivement les valeurs connues $y_0, y_1, y_2 \dots y_n$, lorsqu'on y remplace x par les valeurs données $x_0, x_1, x_2, \dots x_n$, on aura $(n+1)$ équations au moyen desquelles on déterminera les coefficients A, B, C, ... T, U.

Mais dans la plupart des cas, on n'a pas l'expression générale de la fonction dont on se propose de calculer les valeurs, et dont on connaît seulement un certain nombre de valeurs particulières. Il est évident que le problème est alors complétement indéterminé; puisqu'il revient à faire passer une courbe par un certain nombre de points désignés, et que l'on peut toujours tracer une infinité de courbes qui satisfassent à cette condition, tout en pouvant d'ailleurs différer notablement les unes des autres dans l'intervalle de deux points consécutifs.

On choisit ordinairement pour la courbe dont l'ordonnée doit représenter la fonction que l'on a à considérer, une courbe

parabolique, à cause de sa simplicité; ce qui revient à supposer que cette fonction est une fonction entière que l'on déterminera alors comme au numéro précédent. Mais ce calcul peut se faire très-simplement, sans résoudre les équations de condition qui doivent donner les coefficients A, B, C, ... T, U.

669. Soit en effet

$$y = A + Bx + Cx^2 + \dots + Kx^n$$

la fonction cherchée. Si l'on forme les $(n+1)$ équations de condition :

$$\begin{array}{l} y_0 = A + Bx_0 + Cx_0^2 + \dots + Kx_0^n \\ y_1 = A + Bx_1 + Cx_1^2 + \dots + Kx_1^n \\ y_2 = A + Bx_2 + Cx_2^2 + \dots + Kx_2^n \\ \vdots \quad\;\; \vdots \quad\;\; \vdots \quad\;\; \vdots \qquad\qquad\;\; \vdots \\ y_n = A + Bx_n + Cx_n^2 + \dots + Kx_n^n, \end{array}$$

on reconnaîtra facilement, d'après les formules données par *Cramer* pour l'expression des valeurs des inconnues dans un système d'équations du premier degré (**172**), que les coefficients A, B, C,.... K, ne contiendront les quantités $y_0, y_1, y_2, \dots y_n$ qu'au premier degré et seulement dans leurs numérateurs; par conséquent, en supposant que la fonction y soit ordonnée par rapport à y_0, y_1, y_2 .... y_n, elle se présentera sous la forme

$$y = X_0 y_0 + X_1 y_1 + X_2 y_2 + \dots + X_n y_n \qquad [9],$$

les quantités X_0, X_1, X_2, ... X_n ne dépendant que de la variable x et de ses valeurs connues x_0, x_1, x_2, ... x_n.

Cette expression de y doit se réduire à y_0 pour $x = x_0$, à y_1 pour $x = x_1$,... à y_n pour $x = x_n$; il faudra donc que l'on ait :

$$\begin{array}{l} \text{pour } x = x_0,\; X_0 = 1,\; X_1 = 0,\; X_2 = 0,\; \dots\; X_n = 0; \\ \text{pour } x = x_1,\; X_0 = 0,\; X_1 = 1,\; X_2 = 0,\; \dots\; X_n = 0; \\ \text{pour } x = x_2,\; X_0 = 0,\; X_1 = 0,\; X_2 = 1,\; \dots\; X_n = 0; \\ \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ \text{pour } x = x_n,\; X_0 = 0,\; X_1 = 0,\; X_2 = 0,\; \dots\; X_n = 1. \end{array}$$

Ainsi, la fonction X_0 par exemple, doit s'anéantir pour toutes

les valeurs de x égales à $x_1, x_2, \ldots x_n$; on satisfera à cette première condition en prenant pour X_0 une expression ayant pour numérateur le produit $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$. En second lieu, cette expression devant se réduire à l'unité pour $x=x_0$, il suffira évidemment de lui donner pour dénominateur le produit $(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)$. On posera donc :

$$X_0=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}.$$

On sera conduit de même à poser :

$$X_1=\frac{(x-x)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)},$$

$$X_2=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)\ldots(x_2-x_n)},$$

$$\vdots$$

$$X_n=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$

En multipliant $X_0, X_1, X_2, \ldots X_n$ par ces valeurs dans l'équation [9], il viendra enfin :

$$\begin{aligned} y= & \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}y_0 \\ & +\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}y_1 \\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & +\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n. \end{aligned} \qquad [10]$$

Cette élégante formule, donnée par *Lagrange*, est très-commode dans les applications numériques, puisque tous ses termes sont calculables par logarithmes.

Il est important de remarquer que l'on aurait pu prendre pour les quantités $X_0, X_1 \ldots X_n$, d'autres expressions qui eussent également satisfait aux conditions du problème ; ainsi, on aurait pu remplacer les différences $(x-x_0)$, $(x-x_1)$, etc., par leurs carrés $(x-x_0)^2$, $(x-x_1)^2$, etc. Si l'on avait voulu prendre pour y une fonction transcendante, on aurait pu,

à la place de $(x-x_0)$, $(x-x_1)$, etc., écrire $\sin m(x-x_0)$, $\sin m(x-x_1)$, etc., m étant d'ailleurs quelconque. On voit combien le problème de l'interpolation est indéterminé lorsque l'on ignore la forme de la fonction que doivent vérifier les valeurs données.

670. Lorsque les valeurs de la variable sont en progression arithmétique, on peut mettre sous une autre forme la fonction dont on connaît les valeurs correspondantes. Soient, en effet, $u_0, u_1, u_2 \ldots . u_n$ les valeurs connues que prend la fonction lorsque l'on donne à x les valeurs désignées x_0, $x_1=x_0+h$, $x_2=x_0+2h\ldots$, $x_n=x_0+nh$. Si nous nous reportons à la formule générale [3] (650), qui donne un terme quelconque d'une suite de quantités en fonction de la première et de ses différences successives; le second membre de cette formule devient successivement $u_0, u_1, u_2 \ldots$ etc., lorsque l'on y fait $n=0, =1, =2$, etc.; si donc on pose $n=\frac{x-x_0}{h}$, on voit que ce second membre deviendra successivement $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$ lorsqu'on fera $x=x_0, =x_0+h, =x_0+2h, \ldots =x_0+nh$; il sera d'ailleurs une fonction entière de x, du degré n, et sera par conséquent la fonction cherchée. Ainsi, en la désignant par u_x, cette fonction aura pour expression :

$$u_x=u_0+\frac{x-x_0}{h}\Delta u_0+\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2}$$
$$+\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3}+\ldots [11].$$

Si, la forme de la fonction n'étant pas connue d'avance, on voulait néanmoins la représenter par cette formule, il serait nécessaire que les différences successives décrussent assez rapidement pour que l'on pût négliger toutes celles qui dépasseraient l'ordre n.

671. Supposons, par exemple, que l'on veuille obtenir le logarithme de 3,1415926536 au moyen d'une table de logarithmes à dix décimales. On regardera les logarithmes contenus

dans cette table comme les valeurs données de la fonction u_x, les nombres auxquels correspondent ces logarithmes comme celles de x, et l'on formera le tableau suivant :

x	$u_x = \log x$	Δu_0	$\Delta^2 u_0$	$\Delta^3 u_0$	$\Delta^4 u_0$
3,14	0,496 929 648 1	+0,001 380 905 7	−0,000 004 376 9	+0,000 000 027 7	−0,000 000 000 3
3,15	0,498 310 553 8	+0,001 376 528 8	−0,000 004 349 2	+0,000 000 027 4	
3,16	0,499 687 082 6	+0,001 372 179 6	−0,000 004 321 8		
3,17	0,501 059 262 2	+0,001 367 857 8			
3,18	0,502 427 120 0				

En prenant quelques logarithmes consécutifs de plus, on trouverait encore −0,000 000 000 3 pour la différence quatrième ; de sorte que, lorsqu'on s'arrête à dix chiffres décimaux, les différences cinquième et suivantes sont nulles. On s'arrêtera donc dans l'expression de la valeur de u_x pour $x = 3{,}1415926536$ au terme en $\Delta^4 u_0$ inclusivement.

Le tableau ci-dessus donnera :

$$u_0 = 0{,}496\,929\,648\,1$$
$$\Delta u_0 = +0{,}001\,380\,905\,7$$
$$\Delta^2 u_0 = -0{,}000\,004\,376\,9$$
$$\Delta^3 u_0 = +0{,}000\,000\,027\,7$$
$$\Delta^4 u_0 = -0{,}000\,000\,000\,3$$

et comme $h = 0{,}01$, $x_0 = 3{,}14$, $x = 3{,}1415926536$, on aura :

$$\frac{x - x_0}{h} = 0{,}159\,265\,36.$$

Avec ces valeurs, il sera facile de mettre en nombre la formule, et l'on trouvera :

$$u_x = u \log 3{,}1415926536 = 0{,}4971498726.$$

672. Si dans la formule [11] on fait $x - x_0 = h$, $u_x - u_0 = \delta u$,

il viendra, en écrivant simplement u au lieu de u_0,

$$\delta u = \frac{h'}{h}\Delta u + \frac{h'(h'-h)}{1.2.h^2}\Delta^2 u + \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{1.2.3.h^3}\Delta^3 u + \ldots \quad [12]$$

formule qui fera connaître la différence δu, pour un intervalle h' entre deux valeurs de la variable, au moyen des différences $\Delta u, \Delta^2 u, \ldots$ relatives à l'intervalle h. Si les différences $\Delta^2 u, \Delta^3 u, \ldots$ sont assez petites pour qu'on puisse les négliger, on aura simplement $\delta u = \frac{h'}{h}\Delta u$, c'est-à-dire que la différence δu sera proportionnelle à l'intervalle h'.

Nous verrons plus loin dans la résolution des équations numériques qu'il est utile de savoir substituer dans une fonction entière une suite de quantités dont la différence est le dixième de la différence existant entre les termes d'une suite de quantités déjà substituées; ainsi, après avoir substitué la suite des nombres 0, 1, 2, 3, ... dont la différence est $h=1$, on se propose de substituer entre 0 et 1 les nombres 0,1, 0,2, ... 0,9; entre 1 et 2 les nombres 1,1, 1,2, ... 1,9, etc. On devra donc, dans la formule [11], donner à $\frac{x-x_0}{h} = \frac{h'}{h} = z$ les valeurs successives 0,1, 0,2, 0,3, ... 0,9; et on calculera pour chacune de ces valeurs les coefficients $z, \frac{z(z-1)}{1.2}$, etc., de Δu, $\Delta^2 u$, etc. Si l'on observe d'ailleurs que ces coefficients sont des fonctions entières du rapport $\frac{h'}{h} = z$, on pourra calculer pour chacun d'eux la suite de ses valeurs successives par la méthode des différences (652); ainsi, pour avoir la suite des valeurs des coefficients de $\Delta^4 u$, on en calculera *directement quatre* valeurs correspondantes à $\frac{h'}{h}$ ou $z=0,1$, $=0,2$, $=0,3$, $=0,4$, et les valeurs suivantes pour $z=0,5$, $=0,6, \ldots =0,9$ s'obtiendront par le procédé indiqué au numéro 652. On trouvera de la sorte pour les coefficients de la formule [11] les valeurs données dans le tableau suivant :

$\frac{x-x_0}{h}$ ou x	Coefficients de Δu	Coefficients de $\Delta^2 u$	Coefficients de $\Delta^3 u$	Coefficients de $\Delta^4 u$	
	+	—	+	—	
0,1	0,1	0,045	0,0285	0,0206625	etc.
0,2	0,2	0,080	0,0480	0,0336000	
0,3	0,3	0,105	0,0595	0,0401625	
0,4	0,4	0,120	0,0640	0,0416000	
0,5	0,5	0,125	0,0625	0,0390625	
0,6	0,6	0,120	0,0560	0,0336000	
0,7	0,7	0,105	0,0455	0,0261625	
0,8	0,8	0,080	0,0320	0,0176000	
0,9	0,9	0,045	0,0165	0,0086625	

Il sera ensuite facile de trouver $\delta^2 u$, $\delta^3 u$, etc., au moyen même des différences qui ont servi à calculer les suites des valeurs des coefficients de $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, etc. On trouvera ainsi :

$$\delta u = 0,1\Delta u - 0,045\Delta^2 u + 0,0285\Delta^3 u - 0,0206625\Delta^4 u + \ldots$$
$$\delta^2 u = 0,010\Delta^2 u - 0,0090\Delta^3 u + 0,0077250\Delta^4 u - \ldots$$
$$\delta^3 u = 0,0010\Delta^3 u - 0,0013500\Delta^4 u + \ldots$$
$$\delta^4 u = 0,0001000\Delta^4 u - \ldots$$

673. Si nous nous reportons à la formule [11], qui représente exactement (668) une fonction entière de degré n, dont on connaît les valeurs $u_0, u_1, u_2 \ldots u_n$ correspondantes aux valeurs x_0, x_0+h, $x_0+2h\ldots$, x_0+nh de la variable, on verra facilement que, si $u_0, \Delta u_0, \Delta^2 u_0 \ldots \Delta^n u_0$ sont des quantités positives, et que l'on donne à x une valeur $>x_0+(n-1)h$ de sorte que $\frac{x-x_0}{h}$, $\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)$, etc., soient aussi positives, le premier membre de la formule sera positif. Il y a plus : à partir de la valeur $x=x_0+(n-1)h$, tous les termes qui composent le second membre augmenteront indéfiniment avec x, et par conséquent il en sera de même de la fonction qu'il représente. En appelant $\varphi(x)$ cette fonction, il en résulte évidemment que $x_0+(n-1)h$ est une LIMITE SUPÉRIEURE *des racines positives de l'équation* $\varphi(x)=0$. (Voir au chapitre suivant les nos 675 et 679.)

CHAPITRE XXII.

DE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

§ I. CALCUL DES RACINES COMMENSURABLES.

674. Une équation à coefficients numériques a généralement des racines réelles et des racines imaginaires; les premières peuvent être commensurables ou incommensurables; et, dans l'expression $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ d'une racine imaginaire, α et β représentent des quantités rationnelles ou irrationnelles. Or, les racines incommensurables ne pouvant être trouvées qu'approximativement, on voit que la détermination des racines commensurables doit être plus facile que celle des autres racines; d'ailleurs, comme on les obtiendra exactement, on pourra débarrasser l'équation proposée de toutes ces racines, ce qui abaissera son degré et rendra par conséquent plus facile le calcul de ses autres racines. Nous allons donc nous occuper d'abord de la recherche des racines commensurables, puis nous verrons comment on pourra obtenir les racines incommensurables avec une approximation donnée, et nous terminerons par le calcul des racines imaginaires.

675. Quelle que soit l'équation proposée, nous commencerons par faire évanouir les dénominateurs et tous les radicaux qu'elle pourra contenir; de sorte qu'après avoir transposé tous les termes dans le premier membre, elle sera ramenée à la forme

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Rx^3 + Sx^2 + Tx + U = 0 \quad [1],$$

dans laquelle *les coefficients* A, B,... R, S, T, U *sont tous des nombres rationnels et entiers.*

Les racines commensurables de cette équation peuvent être, les unes entières et les autres fractionnaires; nous allons d'abord nous occuper des premières.

Le moyen le plus naturel d'y parvenir est de substituer dans l'équation [1] la suite naturelle des nombres entiers 1, 2, 3,... et —1, —2, —3,..., et si l'on trouve autant de résultats égaux à zéro qu'il y a d'unités dans l'exposant du degré de cette équation, on aura déterminé toutes ses racines*. Mais s'il n'en est pas ainsi, on devra craindre de ne pas avoir poussé les substitutions suffisamment loin. Pour lever cette difficulté, nous allons tâcher de calculer *les* LIMITES SUPÉRIEURES *des racines positives et négatives de l'équation* [1], *c'est-à-dire de trouver deux nombres dont les valeurs absolues soient respectivement plus grandes que celles de la plus grande racine positive et de la plus grande racine négative de cette équation;* car, il n'y aura qu'à pousser les substitutions des nombres 1, 2, 3,... et —1, —2, —3,... jusqu'à ces limites, et on sera sûr de ne laisser échapper aucune des racines commensurables entières que l'on cherche.

676. PROBLÈME I. *Déterminer une limite supérieure des racines positives d'une équation donnée.*

Cette question est évidemment indéterminée, car on conçoit qu'il y a une infinité de nombres plus grands que la plus grande racine positive de l'équation [1]. *Le but que l'on doit se proposer en cherchant une limite supérieure des racines positives d'une équation, est donc de trouver une règle simple pour obtenir un nombre qui ne surpasse pas de beaucoup la plus grande de ces racines.* On a donné, de cette importante question, plusieurs solutions parmi lesquelles les suivantes méritent de fixer l'attention.

1re SOLUTION. Il est clair que si l'on transforme l'équation proposée, que je représenterai, pour abréger, par $\varphi(x)=0$, en une autre dont les racines soient égales à celles de cette équation diminuées chacune d'une quantité arbitraire h, et que l'on

---

* Nous n'indiquons pas la substitution de zéro, parce que zéro ne peut être racine qu'autant que la proposée ne renferme pas de terme indépendant de x; ainsi on reconnaît l'existence de cette racine à l'inspection seule de l'équation.

détermine cette quantité h, de manière que la transformée n'ait que des permanences, cette transformée ne pourra avoir pour racines réelles que des quantités négatives (532, 2°) et par conséquent la valeur $+L$ que l'on aura trouvée pour h surpassera nécessairement la plus grande racine positive de $\varphi(x)=0$, c'est-à-dire qu'elle sera une limite supérieure des racines positives de cette équation.

On posera donc $y=x-h$, d'où $x=y+h$, et par conséquent

$$\varphi(y+h)=\varphi(h)+\varphi'(h)y+\frac{\varphi''(h)}{1.2}y^2+\frac{\varphi'''(h)}{1.2.3}y^3+\ldots+Ay^m=0.$$

Maintenant, pour déterminer le plus petit nombre entier qui rendra positives toutes les fonctions

$$\varphi(h),\quad \varphi'(h),\quad \varphi''(h),\quad \varphi'''(h),\ldots\quad \varphi^{m-1}(h),$$

on cherchera quel est le plus petit nombre entier dont la substitution dans $\varphi^{m-1}(h)$ donne un résultat positif, et la chose sera facile, puisque cette fonction est du premier degré. Ainsi, si $\varphi^{m-1}(h)=ah+b$, b étant positif, on fera $h=0$; si $b<0$, on prendra pour h le nombre entier immédiatement supérieur à $-\frac{b}{a}$. On substituera la valeur trouvée pour h dans la dérivée de l'ordre $(m-2)$, laquelle est du deuxième degré par rapport à h, et si le résultat est négatif, on augmentera cette valeur de h successivement d'une unité, jusqu'à ce que l'on obtienne un résultat positif. On opérera de même sur la dérivée de l'ordre $(m-3)$, et, en remontant ainsi successivement aux fonctions précédentes, on déterminera facilement un nombre entier L, que l'on devra prendre pour la valeur de h.

Cette méthode suppose que, si une valeur α de h rend positives une certaine dérivée $\varphi^n(h)$ et toutes celles d'un ordre inférieur au sien, toute valeur de h plus grande que α rendra aussi cette dérivée positive. Posons, en effet, $h=\alpha+k$, k étant >0, et il viendra

$$\varphi^n(\alpha+k)=\varphi^n(\alpha)+\varphi^{n+1}(\alpha).k+\frac{\varphi^{n+2}(\alpha)}{1.2}k^2+\ldots$$

Or, par hypothèse, $\varphi^n(\alpha)$, $\varphi^{n+1}(\alpha)$, $\varphi^{n+2}(\alpha)$... sont des quantités positives : donc $\varphi^n(\alpha+k)$ est aussi positive.

677. Appliquons la méthode que nous venons d'exposer, et qui est due à *Newton*, à l'équation

$$\varphi(x)=x^4-7x^3+5x^2+56x-104=0.$$

Nous exécuterons les calculs suivants :

$$\varphi'(x)=4x^3-21x^2+10x+56$$

$$\frac{\varphi''(x)}{1.2}=6x^2-21x+5,$$

$$\frac{\varphi'''(x)}{1.2.3}=4x-7.$$

$4x-7=0$ donne $x=\frac{7}{4}$; ainsi on fera d'abord $x=2$, et on trouvera que

$$\text{pour } x=2,\quad \frac{\varphi'''(x)}{1.2.3}>0,\quad \frac{\varphi''(x)}{1.2}<0;$$

$$x=3,\quad \frac{\varphi''(x)}{1.2}<0,$$

$$x=4,\quad \frac{\varphi''(x)}{1.2}>0,\quad \varphi'(x)>0,\quad \varphi(x)>0;$$

ainsi $L=4$ est une limite supérieure des racines positives de l'équation proposée.

678. Il ne faudrait pas s'imaginer que la limite L, fournie **par cette méthode de *Newton*, fût égale au nombre entier immédiatement supérieur à la plus grande racine positive de** $\varphi(x)=0$; **en effet, comme il n'est pas nécessaire qu'une équation n'ait que des permanences pour que toutes ses racines réelles soient négatives, on comprend qu'en donnant à h des valeurs entières plus petites que L, il pourrait se faire que l'équation transformée $\varphi(y+h)=0$ eût des variations, et que toutes ses** racines réelles fussent encore négatives; **de sorte que ces nouvelles valeurs de h seraient aussi des limites supérieures des racines positives de $\varphi(x)=0$. C'est ce dont l'équation que nous**

avons considérée ci-dessus nous offre un exemple; car, comme elle revient à

$$(x^2-8)(x^2-7x+13)=0,$$

on voit que ses racines sont

$$\pm\sqrt{8} \quad \text{et} \quad \frac{7\pm\sqrt{-3}}{2},$$

et qu'ainsi 3 est une limite; or, en faisant $y=x-3$, on trouve

$$\varphi(y+3)=y^4+5y^3-4y^2+5y+1=0,$$

équation qui a deux variations et n'a pour racines réelles que les quantités négatives $(+\sqrt{8}-3)$ et $-(\sqrt{8}+3)$.

Remarquons cependant que L serait précisément égal au nombre entier qui est immédiatement supérieur à la plus grande racine positive de $\varphi(x)=0$, si cette équation avait toutes ses racines réelles. En effet, si N désigne ce nombre entier, et que l'on pose $y=x-\text{N}$, il est clair que la transformée $\varphi(y+\text{N})=0$ ayant toutes ses racines réelles et négatives, ne pourra avoir que des permanences (551); donc la substitution de N à la place de x dans les fonctions

$$\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi''(x),\ldots\varphi^{m-1}(x),$$

les rendra toutes positives; et comme L est le plus petit nombre entier qui jouit de cette propriété, il faut en conclure que $\text{L}=\text{N}$.

679. 2° Solution. Cette solution et la suivante reposent sur ce principe qu'*un nombre est une limite supérieure des racines positives d'une équation, lorsque sa substitution dans le premier membre de cette équation donne un résultat plus grand que zéro et que tous les nombres plus grands que lui jouissent de la même propriété;* en effet, aucun nombre plus grand que celui dont il s'agit ne pourra rendre nul le premier membre de l'équation proposée.

Désignons par $\pi(x)$ la somme de tous les termes de l'équation proposée qui précèdent son premier terme négatif, et par $\psi(x)$

la somme de tous ses termes négatifs : je dis que si $+L$ est un nombre qui, substitué à la place de x, rend la différence $\pi(x)-\psi(x)$ plus grande que zéro, L sera une limite. En effet, soit r le plus petit exposant de x dans $\pi(x)$, nous aurons

$$\pi(x)-\psi(x)=x^r\left\{\frac{\pi(x)}{x^r}-\frac{\psi(x)}{x^r}\right\}.$$

Or $\frac{\pi(x)}{x^r}$ ne renferme que des puissances positives de x, tandis que $\frac{\psi(x)}{x^r}$ ne contient, au contraire, que des termes affectés de puissances négatives de cette variable, de sorte qu'en faisant croître x à partir de $x=L$, la première de ces deux quantités augmentera, ou du moins restera constante, si $\pi(x)$ est un monome, et la deuxième diminuera constamment jusqu'à devenir nulle pour $x=\infty$; donc la différence $\pi(x)-\psi(x)$ sera toujours positive, puisque par hypothèse $\pi(L)>\psi(L)$, et croîtra même au delà de toute grandeur donnée. Donc L est une limite supérieure des racines positives de l'équation proposée.

Cela posé, je partage le premier membre de l'équation proposée en plusieurs groupes de termes ordonnés suivant les puissances décroissantes de x, ne présentant qu'une seule variation et ayant une quantité positive pour premier terme ; puis je substitue, dans chacun de ces groupes, la suite naturelle des nombres 1, 2, 3, 4,.... jusqu'à ce que je trouve un nombre qui donne un résultat plus grand que zéro ; le plus grand de tous les nombres qui rendront ainsi les différents groupes positifs, sera évidemment une limite supérieure des racines positives de la proposée.

Si les groupes sont des binomes ou des trinomes qu'on puisse réduire au second degré, en mettant en facteur commun la plus faible des trois puissances de x que chacun d'eux renferme, on évitera les tâtonnements en égalant chaque groupe à zéro et en prenant, pour valeur de L, la plus grande racine positive de ces différentes équations.

680. Exemple I. $x^5+7x^4-12x^3-49x^2-52x-13=0.$

Je mets cette équation sous la forme

$$x(x^4-12x^2-52)+(7x^4-49x^2-13)=0.$$

En égalant à zéro les quantités comprises entre les parenthèses, on formera deux équations, d'où l'on tirera $x=4$ et $x=\sqrt{8}$; ainsi 4 est une limite.

La méthode de *Newton* aurait donné 3 pour limite.

Exemple II. $x^9-5x^8-13x^7-6x^6+3x^5-20x^4-27x^3-5x^2+10=0$. Cette équation revient à

$$x^6(x^3-5x^2-13x-6)+x^2(3x^3-20x^2-27x-5)+10=0.$$

On voit immédiatement en mettant x^2 en facteur commun du premier et du deuxième terme de chaque groupe, que pour rendre le premier positif, il faut que x soit plus grand que 5, et que le deuxième groupe sera négatif, si x n'est pas supérieur à $\frac{20}{3}$. J'essaye donc 7. Le groupe $x^3-5x^2-13x-6$ prend une valeur positive, mais le deuxième $3x^3-20x^2-27x-5$ devient négatif. Je substitue alors 8 au lieu de x dans ce polynome, et comme j'obtiens un résultat positif, j'en conclus que 8 est une limite.

La méthode de *Newton* aurait donné 7.

Exemple III. $2x^7+11x^6-10x^5-26x^4+31x^3+72x^2-230x-348=0$. Cette équation peut être mise sous la forme suivante :

$$2x^5(x^2-5)+11x^4\left(x^2-\frac{26}{11}\right)+31\left(x^3-\frac{348}{31}\right)+72x\left(x-\frac{115}{36}\right)=0.$$

En égalant chaque groupe à zéro, on trouvera

$$x=\sqrt{5},\quad x=\sqrt{\frac{26}{11}},\quad x=\sqrt[3]{\frac{348}{31}},\quad x=\frac{115}{36}.$$

La dernière de ces valeurs est plus grande que toutes les autres, ainsi $\frac{115}{36}$ est une limite.

681. On peut modifier la méthode précédente de manière à obtenir une limite, sans avoir aucun tâtonnement à faire.

Représentons, en effet, par $-Nx^{m-n}$ le premier terme négatif de l'équation proposée, et par $-Px^{m-p}$, $-Qx^{m-q}$,.... ses autres termes négatifs, et supposons d'ailleurs qu'on ait dégagé le premier terme de l'équation de son coefficient ; on obtiendra évidemment une limite, si l'on peut trouver une valeur positive de x qui satisfasse à l'inégalité

$$x^m > Nx^{m-n} + Px^{m-p} + Qx^{m-q} + \ldots$$

Mais si nous appelons S le plus grand coefficient négatif, il est clair que nous aurons satisfait à cette inégalité, si nous pouvons vérifier la suivante

$$x^m > Sx^{m-n} + Sx^{m-n-1} + Sx^{m-n-2} + \ldots + Sx^2 + Sx + S.$$

En mettant S en facteur commun et en observant que $x^{m-n} + x^{m-n-1} + x^{m-n-2} + \ldots + x^2 + x + 1$ est le quotient de la division de $(x^{m-n+1}-1)$ par $(x-1)$, on verra que l'inégalité ci-dessus revient à

$$x^m > S\frac{x^{m-n+1}-1}{x-1} = \frac{Sx^{m-n+1}}{x-1} - \frac{S}{x-1}.$$

Si on ne cherche la limite que parmi les nombres plus grands que l'unité, cette inégalité sera comportée par la suivante

$$x^m > \frac{Sx^{m-n+1}}{x-1},$$

d'où, en divisant ses deux membres par $\frac{x^{m-n+1}}{x-1}$, ce qui est permis, puisque x doit être plus grand que 1, on trouvera

$$x^{n-1}(x-1) > S.$$

Or, comme $x^{n-1} > (x-1)^{n-1}$, on satisfera à cette condition en posant

$$(x-1)^{n-1}(x-1) = S \quad \text{ou} \quad (x-1)^n = S,$$

d'où l'on tire enfin

$$x = 1 + \sqrt[n]{S}.$$

Donc, *on aura une limite supérieure des racines positives d'une équation, en ajoutant l'unité à la racine du plus grand coefficient négatif, dont l'indice est égal à la différence des expo-*

sants du premier terme de l'équation et de son premier terme négatif.

682. En appliquant cette règle aux trois équations qui nous ont servi d'exemple, dans le numéro précédent, nous trouverons

$$L=1+\sqrt{52}=9,\quad L=1+27=28,\quad L=1+\sqrt{\frac{348}{2}}=15.$$

Elle fournit, comme on voit, une limite bien moins approchée que les méthodes précédentes.

On pourra encore, après avoir décomposé le premier membre de l'équation proposée en groupes, ainsi que nous l'avons indiqué précédemment (**679**), calculer la limite de chaque groupe, à l'aide de la règle précédente.

683. Dans le cas particulier où le deuxième terme de l'équation est négatif, la règle du nº **681** donne pour limite *le plus grand coefficient négatif augmenté de l'unité.* C'est là une limite, dans le cas même où le deuxième terme de l'équation est positif, car c'est le résultat auquel on serait parvenu si l'on avait posé

$$x^m > Sx^{m-1} + Sx^{m-2} + Sx^{m-3} + \ldots + Sx + S.$$

684. On tire de là le moyen de résoudre la question suivante :

Problème II. *Étant donné un polynome ordonné suivant les puissances décroissantes, entières et positives de* x, *trouver une valeur de cette variable, à partir de laquelle ce polynome conserve constamment le signe de son premier terme, et acquière des valeurs absolues qui puissent surpasser toute grandeur donnée.*

Soit

$$\pm Ax^m \pm Bx^{m-1} \pm Cx^{m-2} \pm \ldots \pm Tx \pm U$$

le polynome proposé, dans lequel A, B, C,... U sont des quantités positives : on résoudra évidemment la question en cherchant la limite supérieure des racines positives de l'équation

$$x^m - \frac{B}{A}x^{m-1} - \frac{C}{A}x^{m-2} - \ldots - \frac{T}{A}x - \frac{U}{A} = 0.$$

Si donc S est le plus grand des coefficients de notre polynome,

la valeur demandée de x sera $\frac{S}{A}+1$, c'est-à-dire *la somme obtenue en ajoutant à l'unité le plus grand coefficient qu'a le polynome quand on a divisé tous ses termes par celui du premier.*

685. 3ᵉ Solution. M. *Bret* a donné, dans les Annales de Mathématiques de M. *Gergonne*, une méthode par laquelle on obtient, sans tâtonnement, une limite qui est souvent plus resserrée que la précédente.

Soit l'équation

$$Ax^m + \dots + Mx^{n+1} - Nx^n + \dots + Px^{q+1} - Qx^q + \dots$$
$$+ Rx^{s+1} - Sx^s + \text{etc.} = 0$$

dans laquelle les coefficients ont leurs signes en évidence. Nous remarquerons d'abord que quel que soit k, pourvu qu'il représente un nombre entier et positif, on a toujours

$$x^k = (x^k - 1) + 1 = (x^{k-1} + x^{k-2} + x^{k-3} + \dots + x + 1)(x-1) + 1,$$

ou, en faisant $x - 1 = y$,

$$x^k = yx^{k-1} + yx^{k-2} + yx^{k-3} + \dots + yx + y + 1.$$

Cela posé, si, en conservant les termes négatifs tels qu'ils sont, on applique cette transformation à tous les termes positifs de la proposée, on aura

$$Ayx^{m-1} + \dots + \left.\begin{array}{l} Ay \\ \vdots \\ +My \\ -N \end{array}\right| x^n + \dots + \left.\begin{array}{l} Ay \\ \vdots \\ +My \\ \vdots \\ +Py \\ -Q \end{array}\right| x^q + \dots + \left.\begin{array}{l} Ay \\ \vdots \\ +My \\ \vdots \\ +Py \\ \vdots \\ +Ry \\ -S \end{array}\right| x^s + \dots = 0 \quad [2]$$

(toutes les puissances de x que l'on n'écrit pas ont des coefficients entièrement positifs). D'où l'on voit que si l'on égale à zéro les coefficients qui renferment un terme négatif, que l'on résolve les équations ainsi obtenues

$$Ay + \dots + My - N = 0,$$
$$Ay + \dots + My + \dots + Py - Q = 0,$$
$$Ay + \dots + My + \dots + Py + \dots + Ry - S = 0,$$
etc.,

et que l'on remplace y dans la transformée par la plus grande des valeurs de y tirées de ces équations :

$$y=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}+\ldots+\mathrm{M}},\quad y=\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{A}+\ldots+\mathrm{P}},\quad y=\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{A}+\ldots+\mathrm{R}},\ \text{etc.},$$

tous les termes de cette transformée auront alors des coefficients positifs, de sorte que pour toutes les valeurs de x, à partir de cette valeur de y augmentée de l'unité ($x=y+1$), le premier membre de l'équation proposée sera constamment positif, et prendra même des valeurs qui croîtront au delà de toute limite; donc cette valeur de x est une limite supérieure des racines positives de la proposée. Ainsi

Ajoutez successivement à l'unité une suite de fractions ayant chacune pour numérateur un des coefficients négatifs de l'équation proposée et pour dénominateur la somme de tous les coefficients positifs qui le précèdent. Le plus grand des nombres ainsi obtenus sera une limite supérieure des racines positives de cette équation.

Il est d'ailleurs entendu que, dans la pratique, il suffit de faire entrer en considération le plus grand des coefficients que renferme chaque série de termes négatifs, de sorte qu'il n'y a pas plus de nombres à essayer qu'il n'y a de ces séries.

Si on applique cette règle aux trois exemples que nous avons considérés au nº 680, on trouvera :

1° $\mathrm{L}=1+\frac{52}{1+7}=1+\frac{52}{8}=7\frac{1}{2}$.

2° $1+\frac{13}{1}=14,\quad 1+\frac{27}{1+3}=\frac{31}{4}$; donc $\mathrm{L}=14$.

3° $1+\frac{26}{2+11}=3,\quad 1+\frac{348}{2+11+31+72}=4$; donc $\mathrm{L}=4$.

On voit que la méthode de M. *Bret* est surtout avantageuse quand le premier terme négatif est précédé de plusieurs termes positifs et que les plus petits coefficients négatifs précèdent les plus grands.

686. Problème. *Trouver une limite supérieure des racines*

négatives d'une équation donnée, c'est-à-dire un nombre dont la valeur absolue soit plus grande que les valeurs absolues de ses racines négatives.

Si l'on change x en $-x$ dans l'équation proposée, on obtiendra, comme on le sait, une équation dont les racines seront égales et de signes contraires à celles de la proposée; donc en affectant du signe — la limite supérieure des racines positives de la transformée, on aura résolu la question.

EXEMPLE. $\varphi(x)=x^5-5x^4-13x^3+7x^2+2x-69=0.$

$$\varphi(-x)=0=x^5+5x^4-13x^3-7x^2+2x+69.$$

La méthode de décomposition en facteurs donne $L'=-\frac{13}{5}$, et celle de M. *Bret* conduit à $L'=-3\frac{1}{6}$.

687. PROBLÈME III. *Déterminer une limite inférieure des racines positives d'une équation* $\varphi(x)=0$.

Il est clair que *zéro* est une limite inférieure des racines positives de l'équation proposée, de sorte que l'objet qu'on a en vue ici est de chercher une quantité positive moindre que la plus petite des racines positives de cette équation.

Or, si l'on pose $x=\frac{1}{y}$, et que l'on calcule la limite supérieure L des racines positives de l'équation transformée $\varphi\left(\frac{1}{y}\right)=0$, on aura $L>y$, et par conséquent $\frac{1}{L}<\frac{1}{y}=x$. Ainsi, on obtiendra la limite demandée, en divisant l'unité par la limite supérieure des racines positives de l'équation que l'on trouve en remplaçant x par $\frac{1}{y}$ dans la proposée.

688. Soit N le plus grand des coefficients qui sont de signes contraires au dernier terme de l'équation proposée, après avoir dégagé son premier terme de son coefficient : cette équation sera ainsi de la forme

$$\varphi(x)=x^m\ldots\pm Nx^n\ldots\mp U=0;$$

donc

$$\varphi\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{y^m}\ldots\pm\frac{N}{y^n}\ldots\mp U=0.$$

d'où, en chassant les dénominateurs, ordonnant suivant les puissances descendantes de y, et dégageant y^m de son coefficient,

$$y^m \ldots - \frac{N}{U} y^{m-n} \ldots \mp \frac{1}{U} = 0.$$

Le plus grand coefficient négatif de cette équation est $\frac{N}{U}$; donc $1+\frac{N}{U}=\frac{U+N}{U}$ est une limite supérieure de ses racines positives ; donc $\frac{U}{U+N}$ est une limite inférieure des racines positives de la proposée $\varphi(x)=0$. Ainsi, *on obtient immédiatement une limite inférieure des racines positives d'une équation, en divisant son dernier terme par la somme faite de ce dernier terme et du plus grand des coefficients qui ont un signe contraire au sien.*

689. Comme il est important, dans la pratique, d'avoir pour la limite inférieure le plus grand nombre possible, on n'emploie presque jamais cette règle, et on calcule la limite supérieure des racines de l'équation en y par la méthode du nº **679**, la seule qui puisse donner pour cette limite une quantité moindre que l'unité.

En appliquant cette règle au premier exemple du nº **680**, on trouvera

$$\varphi(y)=13y^5+52y^4+49y^3+12y^2-7y-1=0,$$

ou $$\varphi(y)=13y^5+52y^4+7y(7y^2-1)+(12y^2-1)=0.$$

La limite supérieure des racines positives de cette équation est $\sqrt{\frac{1}{7}}$; donc la limite inférieure des racines positives de la proposée est $\sqrt{7}$.

La règle du nº 688 donnerait $\frac{13}{13+7}=\frac{13}{20}$.

690. *Pour obtenir la limite inférieure des racines négatives d'une équation, on cherchera la limite inférieure des racines positives de sa transformée en* $-x$, *et on l'affectera du signe* $-$.

691. Au moyen des principes que nous venons d'établir, on

pourra déterminer toutes les racines commensurables entières d'une équation donnée; car, il suffira pour cela, de substituer dans son premier membre la suite naturelle des nombres

$$1, 2, 3, 4, \ldots + L \quad \text{et} \quad -1, -2, -3, -4, \ldots - L',$$

en désignant par $+L$ et par $-L'$ les limites supérieures de ses racines positives et de ses racines négatives.

Nous ne prenons pas, pour point de départ, les limites inférieures des racines positives et des racines négatives de l'équation à résoudre, parce que pour obtenir des limites plus grandes que l'unité, il faut appliquer la méthode du n° 679 à l'équation dont les racines sont réciproques de celles de cette équation, et que ce n'est que dans des cas très-particuliers que l'on trouve une quantité plus petite que l'unité pour limite supérieure des racines de cette transformée.

692. En réfléchissant à la méthode que nous venons d'indiquer pour trouver les racines commensurables entières d'une équation, on sent combien cette méthode est imparfaite, puisque, si les différences entre les racines sont un peu grandes, on est forcé d'essayer beaucoup de nombres et de faire ainsi des calculs très-longs. Il convient donc de *chercher des* CARACTÈRES D'EXCLUSION *qui puissent faire reconnaître facilement que tel nombre ne peut pas être racine de l'équation qu'on veut résoudre.*

Soit

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Rx^3 + Sx^2 + Tx + U = 0$$

l'équation dont il s'agit, A, B, ... R, S, T, U représentant des nombres entiers. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre a soit racine de cette équation, c'est qu'étant substitué à la place de x, il rende son premier membre identiquement nul, de sorte que l'on ait

$$Aa^m + Ba^{m-1} + \ldots + Ra^3 + Sa^2 + Ta + U = 0 \quad [3].$$

Mais c'est précisément la longueur des calculs nécessaires pour vérifier cette condition qui fait l'imperfection de la méthode précédente; il faut donc chercher à la remplacer par une autre

qui lui soit équivalente, mais dont l'application soit plus facile.

Si, après avoir changé les signes de tous les termes et transposé le dernier dans le second membre, on divise par a, l'égalité [3] deviendra

$$-Aa^{m-1}-Ba^{m-2}-\dots-Ra^2-Sa-T=\frac{U}{a}.$$

Or, a étant un nombre entier, le premier membre de cette égalité l'est aussi, et par conséquent U est divisible par a, de sorte que *le dernier terme d'une équation dont les coefficients sont tous entiers, est divisible par chacune de ses racines commensurables entières.* Si on pose, pour abréger :

$$\frac{U}{a}=T',$$

et qu'après avoir transposé le terme $-T$, on divise de nouveau par a, on trouvera

$$-Aa^{m-2}-Ba^{m-3}-\dots-Ra-S=\frac{T'+T}{a}.$$

Ainsi $T'+T$ doit être divisible par a. Je pose

$$\frac{T'+T}{a}=S',$$

et, après avoir transposé le terme $-S$, je divise par a; il viendra

$$-Aa^{m-3}-Ba^{m-4}-\dots-R=\frac{S'+S}{a};$$

donc $S'+S$ doit être divisible par a. En continuant d'opérer de la même manière et en observant qu'à chaque transformation les exposants de a diminuent d'une unité, on verra que la $(m-1)^{me}$ transformée sera

$$-Aa-B=\frac{C'+C}{a};$$

donc $C'+C$ est divisible par a. Enfin si on pose

$$\frac{C'+C}{a}=B',$$

et, qu'après avoir transposé le terme $-B$, on divise par a, on trouvera

$$-A=\frac{B'+B}{a},\quad \text{ou}\quad \frac{B'+B}{a}+A=0,$$

ce qui prouve que $B'+B$ est divisible par a.

En résumant tout ce que nous venons de dire, nous conclurons que *pour qu'un nombre entier* a *soit racine d'une équation dont tous les coefficients sont entiers, il faut qu'il divise*.

1° *Le dernier terme de l'équation*;

2° *La somme qu'on obtient en ajoutant au quotient de cette division le coefficient de la première puissance de l'inconnue*;

3° *La somme formée du quotient de cette seconde division et du coefficient de la seconde puissance de l'inconnue*;

Enfin que la somme du coefficient du premier terme de l'équation et du dernier quotient obtenu soit égale à zéro.

Il est entendu que si l'équation est incomplète, il faudra agir comme si elle était complète, en prenant zéro pour coefficient des puissances de x *qui manqueront*.

Ces conditions sont *toutes* NÉCESSAIRES, et je vais montrer qu'elles sont SUFFISANTES. Supposons-les, en effet, toutes remplies, de sorte que l'on ait

$$\frac{U}{a}=T',$$

$$\frac{T+T'}{a}=S',$$

$$\frac{S+S'}{a}=R',$$

$$\vdots$$

$$\frac{C+C'}{a}=B',$$

$$\frac{B+B'}{a}+A=0,$$

$B', C', \ldots S', T'$ représentant ainsi des nombres entiers. J'élimine toutes ces quantités entre ces m équations, ce qui se fera en les multipliant respectivement par $a, a^2, a^3, \ldots a^{m-1}, a^m$ et

en ajoutant membre à membre les équations-produit. On trouvera

$$Aa^m + Ba^{m-1} + \ldots + Ra^3 + Sa^2 + Ta + U = 0,$$

ce qui prouve bien que a est racine de l'équation proposée.

693. On déduit de ce qui précède la *règle pratique* suivante pour déterminer les racines commensurables entières de l'équation [1].

Calculez les limites supérieures des racines positives et négatives de cette équation, cherchez ensuite les diviseurs du dernier terme et écrivez sur une ligne horizontale ceux de ces diviseurs, tant positifs que négatifs, qui seront moindres que ces limites respectives. Divisez le dernier terme par chacun de ces diviseurs et écrivez les quotients au-dessous, sur une seconde ligne horizontale. Ajoutez à chacun de ces quotients le coefficient de la première puissance de x, *qu'il soit zéro ou qu'il ne le soit pas; écrivez chaque somme au-dessous du quotient correspondant, puis divisez chacune d'elles par le diviseur qui est en tête de la colonne où elle se trouve, et écrivez les quotients au-dessous de ces différentes sommes.*

Continuez ainsi jusqu'à ce que vous soyez parvenu à ajouter le coefficient du premier terme à chacun des quotients obtenus en dernier lieu, et celles des sommes ainsi trouvées qui seront nulles, correspondront aux seuls diviseurs qui sont racines de l'équation proposée.

Il est entendu qu'une fois qu'on a reconnu qu'un diviseur donne un quotient fractionnaire, on le rejette comme ne pouvant pas être racine et qu'on ne s'en occupe plus.

Quant aux diviseurs $+1$ *et* -1, *il est plus simple de les substituer dans l'équation proposée que de les soumettre à la règle que nous venons d'exposer, et qui est connue sous le nom de* MÉTHODE DES DIVISEURS COMMENSURABLES DU PREMIER DEGRÉ.

694. EXEMPLE. *Déterminer les racines commensurables entières de l'équation*

$$2x^4 - 23x^3 + 77x^2 - 62x - 24 = 0.$$

On trouvera facilement que $+L = 11\frac{1}{2}$ et que $-L' = 1$, qu'ainsi il n'y a pas de racines commensurables entières négatives, et que $+1$ n'étant pas racine, il faut appliquer notre méthode aux nombres 2, 3, 4, 6, 8. Voici le tableau des calculs :

2	3	4	6	8
—12	— 8	— 6	— 4	— 3
—74	—70	—68	—66	—65
—37		—17	—11	
+40		+60	+66	
+20		+15	+11	
— 3		— 8	—12	
		— 2	— 2	
		0	0	

4 et 6 sont les seules racines commensurables entières de l'équation proposée. En divisant son premier membre par $(x-4)(x-6) = x^2 - 10x + 24$, on trouve $2x^2 - 3x - 1$ pour quotient; d'où l'on conclut que les deux autres racines sont $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$.

695. Cette méthode exclut immédiatement tous les nombres compris entre les limites $+L$ et $-L'$, qui ne sont pas des diviseurs du dernier terme, et quant à ceux qui, jouissant de cette propriété, ne sont pas racines de l'équation, on reconnaît qu'ils doivent être rejetés après un nombre d'opérations faciles à effectuer, qui ne peut pas surpasser l'exposant du degré de l'équation, et est ordinairement moindre. Cependant, on comprend que si le dernier terme a un grand nombre de diviseurs compris entre $+L$ et $-L'$, l'opération peut encore être très-laborieuse; aussi *Bezout* a-t-il cherché des caractères auxquels on puisse reconnaître facilement que certains de ces diviseurs ne peuvent pas être racines.

Soit a une racine commensurable entière de l'équation $\varphi(x) = 0$. On pourra exprimer que a est effectivement racine, en écrivant que $\varphi(x)$ est divisible par $(x-a)$; de sorte qu'en dé-

signant par $\psi(x)$ le quotient de cette division, on aura

$$\frac{\varphi(x)}{x-a}=\psi(x).$$

Cette équation étant identique, on peut y remplacer x successivement par $+1$ et par -1; ce qui donnera

$$\frac{\varphi(+1)}{a-1}=-\psi(+1) \quad \text{et} \quad \frac{\varphi(-1)}{a+1}=-\psi(-1).$$

Or, $\psi(x)$ étant un polynome entier, $\psi(+1)$ et $\psi(-1)$ sont aussi des nombres entiers; d'où l'on voit que pour qu'un nombre entier a, positif ou négatif, soit racine de l'équation $\varphi(x)=0$, il *faut* qu'étant diminué et augmenté d'une unité, il divise respectivement les résultats qu'on obtient en remplaçant x par $+1$ et par -1 dans le premier membre de cette équation.

Pour faciliter l'application de cette règle, il sera bon de décomposer $\varphi(+1)$ et $\varphi(-1)$ en leurs facteurs premiers.

Si l'on trouvait que $\varphi(+1)$ ou $\varphi(-1)$ est égal à zéro, on en conclurait que $+1$ ou -1 est racine de $\varphi(x)=0$: on déterminerait alors le degré de multiplicité de cette racine (607), et on débarrasserait l'équation $\varphi(x)=0$ de toutes les racines égales à $+1$ ou à -1 qu'elle peut avoir, avant de chercher ses autres racines commensurables.

696. Exemple. $\varphi(x)=x^3-44x^2-45x+12600=0$.

On trouvera $+L=45, -L'=-17$.

Les diviseurs du dernier terme moindres que $+L$ sont

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 21, 24, 25, 30, 35, 36, 40, 42.

Tous ces diviseurs, au nombre de vingt-deux, doivent être essayés positivement et les douze premiers négativement.

La substitution de $+1$ et de -1 dans $\varphi(x)$ donne

$$\varphi(+1)=12512=2^5.17.23 \quad \text{et} \quad \varphi(-1)=12600=2^3.3^2.5^2.7.$$

On voit d'abord que $2-1$ divise $\varphi(+1)$ et que $2+1$ divise $\varphi(-1)$; de sorte que 2 *peut* être racine. En continuant ainsi, on

verra que les seuls diviseurs qui satisfassent aux conditions indiquées par *Bezout* sont 2, 3, 5, 9, 24, 35, —3, —7, —15. Nous allons les soumettre à la méthode du n° 695.

— 15	—7	—3	+2	+3	+5	+9	+24	+35
—840	—1800	—4200	+6300	+4200	+2520	+1400	+525	+360
—885	—1845	—4245	+6255	+4155	+2475	+1355	+480	+315
+ 59		+1415		+1385	+ 495		+ 24	+ 9
+ 15		+1371		+1341	+ 451		— 24	— 35
— 1		— 457		+ 447			— 1	— 1
0							0	0

Donc $x^3 - 44x^2 - 45x + 12600 = (x-24)(x-35)(x+15)$.

697. Lorsqu'on a déterminé ainsi les racines entières d'une équation, on divise son premier membre par le produit des facteurs du premier degré correspondants à ces racines, et, en égalant le quotient à zéro, on obtient une équation qui n'a plus de racines entières, à moins que la proposée n'en ait d'égales. On appliquera donc notre méthode à cette équation, en ayant soin toutefois de ne soumettre aux épreuves que les nombres entiers que l'on a déjà reconnus être racines. On divisera ensuite le premier membre de cette équation par le produit des facteurs correspondants aux nouvelles racines trouvées; ce qui donnera une seconde équation-quotient, sur laquelle on opérera comme sur la précédente et ainsi de suite. De cette manière, on déterminera toutes les racines entières de la proposée et le degré de multiplicité de chacune d'elles, et on sera conduit à une équation $\psi(x)=0$, qui aura pour racines toutes les autres racines de cette proposée. Pour trouver les racines commensurables fractionnaires de $\psi(x)=0$, on la transformera en une autre $\pi(x)=0$ dont tous les coefficients soient entiers, celui du premier terme étant l'unité (584), et comme une pareille équation ne peut avoir pour racines commensurables que des nombres entiers (529), il sera facile, d'après ce qui précède, de calculer toutes ses racines commensurables. En les divisant ensuite par le nombre k, par lequel on a dû multiplier toutes les racines

de $\psi(x)=0$ pour obtenir l'équation $\pi(x)=0$, on connaîtra toutes les racines commensurables fractionnaires de $\psi(x)=0$ et le degré de multiplicité de chacune d'elles, et on aura de plus une certaine équation $F(x)=0$, dont les racines divisées par k seront toutes les racines incommensurables et imaginaires de l'équation proposée $\varphi(x)=0$; de sorte qu'il s'agit maintenant de résoudre cette équation $F(x)=0$.

§ II. DES DIVISEURS COMMENSURABLES DU SECOND DEGRÉ.

698. Le premier membre de cette équation $F(x)=0$ n'a plus de diviseurs *commensurables* du premier degré, mais on conçoit qu'il peut très-bien en avoir du second, et que s'il en était *toujours* ainsi, le problème de la détermination des racines incommensurables et imaginaires des équations serait ramené à la recherche de ces diviseurs. *Cherchons donc les diviseurs commensurables du second degré du premier membre de l'équation* $F(x)=0$.

Un pareil diviseur est de la forme x^2-px+q, p et q étant deux indéterminées dont il s'agit de trouver les valeurs. Pour y parvenir, nous diviserons $F(x)$ par x^2-px+q, et nous nous arrêterons à un reste du premier degré, qui sera de la forme $Mx+N$, M et N étant deux fonctions de p et de q. Ce reste devra donc être identiquement nul, si x^2-px+q est un diviseur de $F(x)$, et par conséquent il faudra que l'on ait

$$M=0, \quad N=0.$$

On résoudra ces deux équations, et *tous* les couples de valeurs de p et de q que l'on en tirera étant substitués dans le trinome x^2-px+q le rendront diviseur de $F(x)$.

Or, rien n'exprime, dans le calcul que nous venons d'indiquer, que p et q soient des quantités commensurables, et par conséquent les équations $M=0$ et $N=0$ devront admettre autant de solutions que l'équation $F(x)=0$ a de diviseurs du second degré, c'est-à-dire $\frac{m(m-1)}{2}$, si elle est du m^{me} degré, car

les facteurs simples de son premier membre donnent $\frac{m(m-1)}{2}$ combinaisons deux à deux. Si donc on élimine q, par exemple, entre $M=0$ et $N=0$, l'équation finale résultante $P=0$ sera du degré $\frac{m(m-1)}{2}$. Donc, si ce nombre est plus petit que m, et quand même l'équation $P=0$ n'aurait pas de racines commensurables, nous aurons fait dépendre la résolution de l'équation proposée de celle d'une équation de degré inférieur au sien, et ainsi le problème de la résolution des équations sera trouvé; car, on ferait de même dépendre la résolution de cette équation $P=0$ de celle d'une autre équation dont le degré serait moindre que le sien, et ainsi de suite; de sorte qu'on finirait par ramener la résolution de l'équation $F(x)=0$ à celle d'une équation du premier ou du deuxième degré. Posons donc

$$\frac{m(m-1)}{2}<m: \quad \text{il en résulte} \quad m<3;$$

ainsi, cette méthode est illusoire, puisqu'elle ne saurait s'appliquer qu'aux équations du deuxième degré, pour lesquelles elle est tout à fait inutile.

Quoi qu'il en soit, si l'on veut déterminer les diviseurs commensurables du deuxième degré de $F(x)$, on cherchera les racines commensurables de l'équation $P=0$, et quand on les aura obtenues, il sera facile, d'après la théorie de l'élimination, de calculer les valeurs correspondantes de q. Si l'on trouve ainsi des diviseurs commensurables du second degré de l'équation proposée, on effectuera la division de son premier membre par le produit de ces diviseurs, et on l'*abaissera* ainsi à une autre de degré inférieur au sien. Toutefois l'avantage ainsi obtenu sera plus que compensé par la longueur des calculs qu'entraînera l'élimination de p ou de q entre les équations $M=0$, $N=0$.

699. Remarquons enfin que l'équation $P=0$ n'est autre chose que l'équation aux sommes des racines de la proposée, et que l'équation $Q=0$, que l'on obtiendrait en éliminant p entre les équations $M=0$ et $N=0$, est l'équation aux produits

des racines de cette même équation : en conséquence, pour obtenir les diviseurs commensurables du deuxième degré de l'équation $F(x)=0$, on cherchera l'équation aux sommes ou l'équation aux produits de ses racines*, et cela par la méthode des fonctions symétriques (644), et si on a trouvé que cette dernière a une racine commensurable β, on représentera par p la somme des deux racines dont β est le produit, et on exprimera que $F(x)$ est divisible par $x^2-px+\beta$; ce qui conduira à deux équations $A=0$ et $B=0$, qui devront être vérifiées par cette valeur de p, de sorte que pour l'obtenir il n'y aura qu'à résoudre l'équation formée en égalant à zéro le plus grand commun diviseur de leurs premiers membres.

700. *Descartes* a déduit de la recherche des diviseurs du second degré d'une équation une méthode pour résoudre l'équation algébrique du quatrième degré. Considérons, en effet, l'équation

$$x^4-Ax^3+Bx^2-Cx+D=0 \qquad [4],$$

et cherchons ses diviseurs du deuxième degré. Nous effectuerons donc la division de son premier membre par x^2-px+q, et, en exprimant que le reste du premier degré est identiquement nul, nous formerons les équations

$$p^3-Ap^2+Bp-q(2p-A)-C=0 \qquad [5],$$

$$q^2-(p^2-Ap+B)q+D=0 \qquad [6].$$

Si de la première on tire la valeur de q,

$$q=\frac{p^3-Ap^2+Bp-C}{2p-A} \qquad [7],$$

pour la substituer dans la deuxième, on trouvera une équation

* *Une équation du troisième degré à coefficients rationnels et qui n'a pas de racines commensurables, n'a pas de diviseur rationnel du deuxième degré;* car, en égalant à zéro le quotient de la division de son premier membre par ce diviseur, on tirerait de l'équation ainsi formée une valeur commensurable pour x.

finale $P=0$ qui sera du sixième degré, comme on le savait d'avance. Or, je dis qu'elle est réductible au troisième degré. En effet, ses racines étant les sommes distinctes deux à deux de celles a, b, c, d de la proposée, leur somme est le triple de celle des racines de cette équation; donc, si on la transforme en une autre $P'=0$, dont les racines soient égales aux siennes, diminuées chacune de la sixième partie de leur somme, ce qui fera évanouir son second terme (588), cela reviendra à diminuer chacune des racines de notre équation $P=0$, de la demi-somme de celles de la proposée; donc sa racine $a+b$ deviendra

$$a+b-\frac{a+b+c+d}{2}=\frac{a+b}{2}-\frac{c+d}{2};$$

donc aussi sa racine $c+d$ deviendra $\frac{c+d}{2}-\frac{a+b}{2}$, et ainsi des autres racines de $P=0$; donc la transformée $P'=0$ aura ses racines deux à deux égales et de signes contraires; donc elle ne renfermera que des puissances paires de l'inconnue et sera par conséquent réductible à une équation de degré sous-double, c'est-à-dire du troisième degré. De cette manière, la résolution de l'équation du quatrième degré se trouve ramenée à celle d'une équation du troisième.

Mais si l'équation [4] n'a pas de second terme, et on peut toujours supposer qu'il en est ainsi, l'équation $P=0$ est elle-même immédiatement réductible au troisième degré; car, la somme des quatre racines de la proposée étant nulle, la somme de deux quelconques d'entre elles est égale et de signe contraire à la somme des deux autres; de sorte que ces sommes étant les diverses racines de $P=0$, cette équation ne pourra renfermer que des termes de degré pair. Et, en effet, si on fait $A=0$ dans la formule [7], et qu'on substitue la valeur

$$q=\frac{p^3+Bp-C}{2p}$$

dans l'équation [6], on trouvera

$$p^6+2Bp^4+(B^2-4D)p^2-C^2=0.$$

Le dernier terme de cette équation étant négatif *, elle aura deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative (547); et comme à chaque valeur réelle de p correspond une pareille valeur de q, il s'ensuit que *le premier membre de toute équation du quatrième degré, à coefficients réels, est décomposable en facteurs réels du second degré.* Ce théorème est dû à *Descartes*, qui en a déduit la résolution de l'équation littérale du quatrième degré.

701. Si $A=0$ et $C=0$, la formule [7] se réduit à

$$q=\frac{p^2+Bp}{2p} \qquad [8],$$

et comme la proposée a alors ses racines deux à deux égales et de signes contraires (259), il s'ensuit que son équation aux sommes $P=0$ doit avoir deux racines nulles; ainsi nous en tirerons $p=0$. Mais, en introduisant cette valeur $p=0$ dans [8], on

---

* On peut le reconnaître *a priori*, en admettant que les racines imaginaires d'une équation sont de la forme $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$. En effet, il peut se présenter trois cas, savoir :

1° *Les quatre racines de l'équation* [4] *sont réelles.* Notre assertion est alors évidente, puisque les racines de l'équation $P=0$ sont réelles, et deux à deux égales et de signes contraires.

2° *Deux racines* a *et* b *de la proposée sont réelles et les deux autres sont imaginaires.* Dans ce cas, les racines de $P=0$ sont

$$a+b,\ a+\alpha+\beta\sqrt{-1},\ a+\alpha-\beta\sqrt{-1},\ b+\alpha+\beta\sqrt{-1},\ b+\alpha-\beta\sqrt{-1},\ 2\alpha:$$

mais $A=a+b+2\alpha=0$, donc $a+b=-2\alpha$, d'où l'on voit que le produit $(a+b).2\alpha.\{(a+\alpha)^2+\beta^2\}\{(b+\alpha)^2+\beta^2\}$ de ces six racines est négatif.

3° *Les quatre racines de la proposée sont imaginaires.* Celles de $P=0$ sont alors

$$2\alpha,\ (\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)\sqrt{-1},\ (\alpha+\gamma)+(\beta-\delta)\sqrt{-1},\ (\alpha+\gamma)-(\beta-\delta)\sqrt{-1},$$
$$(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)\sqrt{-1},\ 2\gamma.$$

Mais $A=2\alpha+2\gamma=0$; donc $\alpha=-\gamma$, et ainsi le produit

$$2\alpha.2\gamma.\{(\alpha+\gamma)^2+(\beta+\delta)^2\}\{(\alpha+\gamma)^2+(\beta-\delta)^2\}$$

de ces six racines est négatif.

trouve $q=\frac{0}{0}$. On supprimera donc le facteur p commun aux deux termes de la valeur de q, et en y faisant ensuite $p=0$, on trouvera $q=\frac{B}{2}$, de sorte que $x^2-px+q=x^2+\frac{B}{2}$, quantité qui ne saurait diviser x^4+Bx^2+D, puisque B et D sont deux quantités entièrement indépendantes l'une de l'autre. L'équation [8] ne peut donc pas nous donner la valeur de q correspondante à $p=0$.

Pour lever cette difficulté, je remonte aux équations [5] et [6], et j'y introduis les hypothèses $A=0$ et $C=0$; elles deviendront

$$p^3+Bp-2pq=0,\quad q^2-(p^2+B)q+D=0.$$

Leur résolution se décompose dans celle des deux systèmes

$$\left.\begin{array}{l}p=0\\ q^2-(p^2+B)q+D=0\end{array}\right\}[9],\quad \left.\begin{array}{l}p^2+B-2q=0\\ q^2-(p^2+B)q+D=0\end{array}\right\}[10].$$

Le premier système donne

$$p=0,\quad q=\frac{B\pm\sqrt{B^2-4D}}{2}.$$

Nous voyons par cette double valeur de q qui sera réelle, si $B^2-4D \not< 0$, pourquoi la formule [8] a donné $q=\frac{0}{0}$. C'est que l'équation d'où on l'a tirée n'étant que du premier degré par rapport à q, ne pouvait pas donner les deux valeurs qui correspondent à $p=0$; elle devait donc alors se réduire à une identité, et donner en conséquence $q=\frac{0}{0}$, car nous démontrerons tout à l'heure que quand une équation doit avoir plus de racines qu'il n'y a d'unités dans l'exposant de son degré, les coefficients de tous ses termes sont identiquement nuls.

Mais pourquoi la formule [8] a-t-elle donné la valeur fausse $q=\frac{B}{2}$? C'est que l'équation [5], d'où elle dérive, étant satisfaite par $p=0$, admet toutes les valeurs imaginables pour q : or, en la divisant par p, on lui ôte cette propriété, et il n'est pas étonnant que l'équation résultante donne pour q une valeur différente de celle que l'on cherche. D'ailleurs, en substituant dans [8] la valeur $p=0$, nous ne faisons usage que de la seule équa-

tion [5], et par conséquent il n'y a pas de raison pour que les valeurs que l'on trouve ainsi satisfassent à l'équation [6].

Quant au système [10], on en tire

$$q=\pm\sqrt{D},\ p=\pm\sqrt{-B\pm2\sqrt{D}} \qquad [11].$$

Si $D<0$, ces valeurs sont imaginaires; mais alors celles que l'on a tirées du système [9] sont réelles.

Si $D>0$, et qu'on ait en même temps $B>0$ et $B^2-4D>0$, p est imaginaire, mais les valeurs fournies par les équations [9] sont encore réelles. Si, au contraire, $B^2-4D<0$, les valeurs de p données par la formule [11] sont réelles. Elles le sont aussi, si D étant positif, B est négatif. Donc le théorème de *Descartes* est vrai dans tous les cas.

702. Théorème. *Lorsqu'une équation a plus de racines qu'il n'y a d'unités dans l'exposant de son degré, les coefficients de tous ses termes sont identiquement nuls.*

Considérons, en effet, l'équation

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+Tx+U=0,$$

et supposons qu'elle ait $(m+1)$ racines $a,\ b,\ c,\ldots k,\ l$: il résulte du théorème du n° 518 que l'on aura *identiquement*

$$Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots+Tx+U=A(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k).$$

Or, si l'on remplace x par l, le premier membre se réduira à zéro, de sorte qu'il en devra être de même du second. Mais aucun des facteurs $l-a,\ l-b,\ l-c,\ldots l-k$ n'étant nul, il faudra nécessairement que $A=0$. Ainsi *une équation du degré* m *ne peut pas avoir* $(m+1)$ *racines, à moins que le coefficient de son premier terme ne soit nul*. Mais les m quantités $a,\ b,\ c,\ldots k$ sont racines de l'équation

$$Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots+Tx+U=0,$$

car on a, par exemple, l'identité $Aa^m+Ba^{m-1}\ldots+Ta+U=0$; donc $B=0$. On prouvera de même que $C=0,\ D=0,\ldots T=0,\ U=0$.

§ III. DU THÉORÈME DE M. *STURM*.

703. Le théorème dont nous allons actuellement nous occuper fournit un moyen sûr de connaître combien une équation a de racines réelles comprises entre deux nombres quelconques, ce qui suffit pour conduire à la détermination effective de toutes les racines réelles de cette équation.

Soit

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Tx + U = 0$$

une équation numérique d'un degré quelconque : je suppose * que l'on ait effectué les opérations nécessaires pour trouver le plus grand commun diviseur entre le premier membre de cette équation que je désignerai par X, et sa dérivée, que j'appellerai X_1, en ayant toutefois la précaution de changer les signes de tous les termes de chaque reste avant de le prendre pour diviseur. Ainsi, on divisera d'abord X par X_1, et, quand on sera arrivé à un reste d'un degré inférieur à celui de X_1, on changera les signes de tous les termes de ce reste. Désignons par X_2 le polynome ainsi obtenu. On divisera de la même manière X_1 par X_2, et, après avoir encore changé les signes de tous les termes du reste, on aura un nouveau polynome X_3 d'un degré moindre que celui de X_2: on divisera X_2 par X_3, et en continuant cette série de divisions, on parviendra finalement, soit à un reste numérique indépendant de x et différent de zéro, soit à un reste fonction de x qui divisera exactement le reste précédent. Nous examinerons ces deux cas séparément.

1er Cas. *Supposons* d'abord *que l'équation* $X = 0$ *n'ait pas de racines égales*, auquel cas les polynomes X et X_1 sont premiers entre eux. En représentant les quotients successifs que

* Nous croyons ne pouvoir mieux faire que d'extraire ce qui va suivre du beau Mémoire de M. *Sturm*.

l'on aura trouvés par Q_1, Q_2, Q_3..., on a cette suite d'égalités

$$\begin{aligned} X &= Q_1X_1 - X_2 \\ X_1 &= Q_2X_2 - X_3 \\ &\vdots \\ X_{n-1} &= Q_nX_n - X_{n+1} \\ &\vdots \\ X_{r-2} &= Q_{r-1}X_{r-1} - X_r, \end{aligned}$$

X_r étant une quantité numérique. Cela posé, M. *Sturm* a déduit de la considération des fonctions X, X_1, X_2,... X_r le théorème suivant, l'une des plus belles découvertes algébriques que l'on ait faites dans ce siècle.

THÉORÈME. *α et β étant deux nombres de grandeurs et de signes quelconques, on substituera le plus petit des deux α, à la place de x, dans toutes les fonctions*

$$X, X_1, X_2, \ldots X_{r-1}, X_r,$$

puis on écrira, par ordre, sur une même ligne, les signes des résultats, et l'on comptera le nombre des variations qui se trouvent dans cette suite de signes; on comptera de même le nombre des variations fournies par la substitution de β à la place de x, et autant il y aura de variations de moins dans cette seconde suite de signes que dans la première, autant l'équation $X = 0$ aura de racines réelles comprises entre α et β.

Si la seconde suite présente autant de variations que la première, l'équation proposée n'aura aucune racine comprise entre α et β.

D'ailleurs la seconde suite ne peut pas avoir plus de variations que la première.

Pour démontrer ce théorème, nous allons examiner comment le nombre des variations formées par les signes des fonctions, pour une valeur quelconque de x, peut s'altérer, quand cette variable croît d'une manière continue. Or, il ne peut arriver de changements dans cette suite de signes qu'autant qu'une des fonctions X, X_1, X_2,... X_{r-1} change de signe, et par conséquent devient nulle (**542**). Il y a donc deux cas à examiner, selon que la fonction qui s'évanouit est la première X, ou quelqu'une des fonctions X_1, X_2, ... X_{r-1} *intermédiaires* entre

X et X_r. La dernière X_r étant un nombre ne peut pas changer de signe.

704. Voyons premièrement quelle altération éprouve la suite des signes lorsque x, en croissant d'une manière continue, atteint et dépasse une valeur qui annule la première fonction X. Désignons cette valeur par a. La dérivée X_1 de X ne peut pas s'évanouir en même temps que X, pour $x=a$, car, par hypothèse, l'équation $X=0$ n'a point de racines égales. Ainsi il existe une quantité positive h assez petite pour qu'entre $a-h$ et $a+h$ il ne tombe aucune racine de l'équation $X_1=0$, de telle sorte que quand x croîtra d'une manière continue, depuis $a-h$ jusqu'à $a+h$, X_1 ne changera pas de signe. Il faut maintenant déterminer le signe de X pour $x=a+h$. Pour cela, je désigne X par $\varphi(x)$ et ses dérivées successives par $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$,... selon la notation usitée. Lorsqu'on fera $x=a+h$, X et X_1 deviendront respectivement $\varphi(a+h)$ et $\varphi'(a+h)$, et on aura

$$\varphi(a+h)=\varphi(a)+\varphi'(a)h+\frac{\varphi''(a)}{1.2}h^2+\frac{\varphi'''(a)}{1.2.3}h^3+\ldots,$$

ou bien, en observant que $\varphi(a)$ est zéro et que $\varphi'(a)$ ne l'est pas,

$$\varphi(a+h)=h\left\{\varphi'(a)+\frac{\varphi''(a)}{1.2}h+\frac{\varphi'''(a)}{1.2.3}h^2+\ldots\right\}.$$

On voit, d'après cette expression, qu'en attribuant à h des valeurs positives suffisamment petites, on pourra rendre les termes qui suivent $\varphi'(a)$ aussi petits que l'on voudra, de sorte que le deuxième membre, et par conséquent le premier, aura le même signe que $\varphi'(a)$. Donc $\varphi(a+h)$ aura aussi le même signe que $\varphi'(a+h)$, puisque nous avons observé que le signe de $\varphi'(x)$ ne changeait pas lorsque x variait depuis $a-h$ jusqu'à $a+h$. Donc X a le même signe que X_1 pour $x=a+h$.

En changeant h en $-h$ dans la formule précédente, il viendra

$$\varphi(a-h)=h\left\{-\varphi'(a)+\frac{\varphi''(a)}{1.2}h-\frac{\varphi'''(a)}{1.2.3}h^2+\ldots\right\},$$

et l'on verra, comme tout à l'heure, que $\varphi(a-h)$ a un signe contraire à celui de $\varphi'(a)$; d'où il suit que pour $x=a-h$, le signe de X est contraire à celui de X_1.

Donc, si le signe de X_1 pour $x=a$ est $+$, le signe de X sera $+$ pour $x=a+h$, et $-$ pour $x=a-h$. Si, au contraire, X_1 a le signe $-$ pour $x=a$, X aura le signe $-$ pour $x=a+h$, et le signe $+$ pour $x=a-h$. D'ailleurs X_1 a les mêmes signes pour $x=a-h$ et pour $x=a+h$ que pour $x=a$.

Ces résultats sont indiqués dans le tableau suivant

		X	X_1		X	X_1
pour	$x=a-h$	$-$	$+$	ou bien	$+$	$-$
	$x=a$	0	$+$		0	$-$
	$x=a+h$	$+$	$+$		$-$	$-$

Ainsi, lorsque la fonction X s'évanouit pour $x=a$, le signe de X forme avec celui de X_1 une variation avant que x atteigne la valeur a, et cette variation est changée en une permanence après que x a dépassé cette racine.

Quant aux autres fonctions X_2, X_3..., chacune aura comme X_1, soit pour $x=a+h$, soit pour $x=a-h$, le même signe qu'elle a pour $x=a$, si toutefois aucune ne s'évanouit pour $x=a$ en même temps que X. Ainsi, la suite des signes des fonctions X, X_1, X_2,... X_r perd une variation, lorsque x en croissant dépasse une valeur a qui annule X sans annuler aucune des autres fonctions X_1, X_2, X_3,... Il faut maintenant examiner ce qui arrive lorsque l'une de ces fonctions s'évanouit.

705. Soit X_n une fonction intermédiaire qui s'annule quand x devient égale à b. Cette valeur de x ne peut réduire à zéro ni la fonction X_{n-1} qui précède immédiatement X_n, ni la fonction X_{n+1} qui la suit; car, si cela était, le facteur $x-b$ diviserait en même temps deux restes consécutifs X_{n-1} et X_n, ou X_n et X_{n+1}, et par conséquent X et X_1, ce qui ne se peut, puisque l'équation $X=0$ est supposée ne pas avoir de racines égales. Les deux fonctions X_{n-1} et X_{n+1} ont donc, pour $x=b$, des va-

leurs différentes de zéro; en outre, ces valeurs sont de signes contraires, car l'équation

$$X_{n-1} = X_n Q_n - X_{n+1}$$

donne $X_{n-1} = -X_{n+1}$, lorsqu'on a $X_n = 0$.

Cela posé, substituons à la place de x, deux nombres $b-h$ et $b+h$, très-peu différents de b. les deux fonctions X_{n-1} et X_{n+1} auront, pour ces deux valeurs de x, les mêmes signes que pour $x=b$, puisqu'on peut toujours prendre h assez petit pour qu'il ne se trouve aucune racine des équations $X_{n-1}=0$ et $X_{n+1}=0$ entre $b-h$ et $b+h$. Quel que soit le signe de X_n, pour $x=b-h$, comme il est placé dans la suite des signes, entre ceux de X_{n-1} et de X_{n+1}, qui sont contraires, les signes des trois fonctions consécutives X_{n-1}, X_n et X_{n+1}, pour $x=b-h$, formeront toujours, soit une permanence et une variation, soit une variation et une permanence. Pareillement les signes de ces trois fonctions pour $x=b+h$, quel que soit celui de X_n, formeront une variation et n'en formeront qu'une.

D'ailleurs, chacune des autres fonctions aura un même signe pour $x=b-h$ et pour $x=b+h$, pourvu qu'aucune ne devienne nulle pour $x=b$, en même temps que X_n.

Conséquemment, la suite des signes de toutes les fonctions X, X_1, X_2, ... X_r, pour $x=b+h$, présentera précisément autant de variations que la suite de leurs signes pour $x=b-h$. Ainsi, le nombre des variations dans la suite des signes n'est pas changé, quand une fonction intermédiaire quelconque passe par zéro.

On arriverait évidemment à la même conclusion, si plusieurs fonctions intermédiaires non consécutives s'évanouissaient pour la même valeur de x. Mais si cette valeur annulait aussi la première fonction X, le changement de signe de celle-ci ferait alors disparaître une variation sur la gauche de la suite des signes, ainsi que nous l'avons fait voir au n° **704**.

Il est donc démontré que chaque fois que la variable x, en croissant d'une manière continue, atteint et dépasse une valeur

qui rend X égale à zéro, la suite des signes des fonctions $X, X_1, X_2, \ldots X_r$ perd une variation formée sur la gauche par les signes de X et de X_1, laquelle est remplacée par une permanence, tandis que les changements de signes des fonctions intermédiaires $X_1, X_2, \ldots X_{r-1}$ ne peuvent jamais ni augmenter ni diminuer le nombre des variations qui existent déjà. En conséquence, *si l'on fait croître* x *d'une manière continue depuis* α *jusqu'à* β, autant la suite des signes des fonctions $X, X_1, X_2, \ldots X_r$, pour $x=\beta$, contiendra de variations de moins que la suite de leurs signes pour $x=\alpha$, autant il y aura de racines de l'équation $X=0$ comprises entre α et β.

706. Pour faciliter les applications, il est nécessaire d'ajouter plusieurs remarques à ce qui précède.

Dans les divisions successives qui servent à former les fonctions $X_2, X_3, \ldots X_r$, on pourra multiplier ou diviser chaque dividende ou chaque diviseur par tel *nombre* POSITIF que l'on voudra. Les fonctions $X, X_1, X_2, \ldots X_r$ que l'on obtiendra ainsi auront encore les mêmes signes, pour chaque valeur de x, que celles que nous avons considérées précédemment. On évitera de cette manière les coefficients fractionnaires.

707. Si X s'évanouit pour $x=\alpha$, on en conclut d'abord que α est une racine de $X=0$; puis, on attribue à x une valeur $\alpha+h$ qui surpasse α d'une quantité aussi petite que l'on voudra. Pour cette valeur $\alpha+h$ de x, les signes de X et de X_1 forment une permanence, comme on l'a vu au nº **704**, tandis que dans le reste de la suite des signes, depuis X_1 jusqu'à X_r, il y a le même nombre de variations que pour $x=\alpha$ (**705**). On trouvera donc, par la règle générale, combien il y a de racines de $X=0$ comprises entre $\alpha+h$ et β, c'est-à-dire plus grandes que α et plus petites que β. Ainsi, on comptera le nombre des variations formées par la suite des signes des fonctions $X_1, X_2, \ldots X_r$ pour $x=\alpha$, et autant il y en aura de moins que dans la suite des signes de toutes les fonctions $X, X_1, X_2, \ldots X_r$, pour $x=\beta$, autant, etc.

De même si β était racine de $X=0$, on déterminerait, par la



même règle, le nombre de ses racines comprises entre α et $\beta - h$, en observant que, pour $x = \beta - h$, le signe de X est contraire à celui de X_1, et que, dans le reste de la suite, il y a autant de variations pour $x = \beta - h$ depuis X_1 jusqu'à X_r que pour $x = \beta$.

708. Lorsqu'on pourra reconnaître qu'une des fonctions auxiliaires X_n conserve constamment le même signe pour toutes les valeurs de x comprises entre α et β, il ne sera point nécessaire de considérer les fonctions qui suivent X_n ; il suffira de substituer ces deux nombres α et β dans les fonctions X, X_1, X_2,... X_n, et d'écrire les signes des résultats; autant la suite des signes, pour $x = \beta$, présentera de variations de moins que celle des signes, pour $x = \alpha$, autant il y aura de racines de l'équation $X = 0$ comprises entre α et β.

En effet, on peut appliquer au système partiel des fonctions X, X_1, X_2, .. X_n la démonstration que nous avons donnée plus haut pour le système complet des fonctions X, X_1, X_2,.., X_n, X_{n+1}, ... X_r, dont la dernière était un nombre constant. Dans l'hypothèse actuelle, X_n conserve toujours le même signe sans avoir une valeur constante pour toutes les valeurs de x croissant depuis α jusqu'à β. Or, comme on l'a vu, la suite des signes de ces fonctions X, X_1,... X_n perd une variation chaque fois que X devient nul (**704**), et l'évanouissement d'une fonction intermédiaire entre X et X_n ne peut ni augmenter ni diminuer le nombre des variations (**705**). Donc, autant la substitution de β à la place de x, dans les fonctions X, X_1, X_2,... X_n, donnera de variations de moins que la substitution de α, autant il y aura de racines de $X = 0$ comprises entre α et β.

709. Le théorème de M. *Sturm*, modifié de cette manière, sera souvent d'une application plus facile. Ainsi, lorsqu'en cherchant le plus grand commun diviseur de X et de X_1, on parviendra à un reste X_n du deuxième degré qui, égalé à zéro, ne donne que des valeurs imaginaires de x, il ne sera pas nécessaire de pousser plus loin les divisions; car, ce polynome X_n sera constamment de même signe que son premier terme, pour toutes

les valeurs réelles de x, de sorte qu'on pourra le prendre pour la dernière des fonctions auxiliaires.

On peut même encore s'arrêter à un polynome X_n qui s'annule pour des valeurs réelles de x, pourvu qu'on puisse déterminer toutes ces valeurs, et qu'aucune d'elles ne réduise en même temps X à zéro. En effet, en désignant par $p, q, r,\ldots$ celles qui seraient comprises entre α et β, après les avoir disposées par ordre de grandeur (26), en commençant par la plus petite, et en observant que X_n conserve le même signe pour toutes les valeurs de x depuis α jusqu'à p, on trouvera par l'application du théorème modifié (**708**), et en raisonnant comme dans le n° **707**, combien l'équation $X=0$ a de racines comprises entre α et $p-h$, h étant une quantité susceptible de décroître indéfiniment; de même, X_n ayant encore un signe constant pour toutes les valeurs de x comprises entre p et q, on trouvera combien $X=0$ a de racines entre $p+h$ et $q-h$, c'est-à-dire entre p et q, en prenant h suffisamment petit. On reconnaîtra de même combien $X=0$ a de racines entre q et r, et ainsi de suite.

710. Le théorème général donne le moyen de connaître le nombre total des racines réelles de l'équation $X=0$. En effet, il suit du n° **684** qu'il est toujours possible d'assigner à x deux valeurs $+L$ et $-L$, à partir desquelles chacune des fonctions **$X, X_1, X_2,\ldots X_r$ conserve constamment le signe que prend son premier terme pour cette valeur de x, de sorte que toutes les racines réelles de l'équation $X=0$ sont comprises entre ces deux nombres $+L$ et $-L$. D'un autre côté, il est clair que faire $x=-L$, dans toutes les fonctions, revient à y remplacer d'abord x par $-x$, et à substituer ensuite $+L$ au lieu de cette variable dans les fonctions résultantes; donc** ***pour connaître le nombre des racines réelles de l'équation $X=0$, on changera x en $-$x dans le premier terme de chacune des fonctions $X, X_1, X_2\ldots X_{r-1}, X_r$, et on écrira les signes des résultats sur une ligne horizontale; on écrira sur une seconde ligne les signes des premiers termes de ces mêmes fonctions, et autant il y aura de***

variations de moins dans cette seconde ligne que dans la première, autant la proposée aura de racines réelles.

Si on écrit sur une troisième ligne les signes des derniers termes de toutes les fonctions X, X_1, X_2,... X_r, ce qui revient à y faire $x=0$, l'excès du nombre des variations ainsi trouvées sur celui que présente la deuxième ligne déterminera le nombre des racines positives de l'équation $X=0$.

711. On peut faire usage d'une règle plus simple pour déterminer le nombre des racines réelles de l'équation $X=0$, lorsque les fonctions X, X_1, X_2,... sont au nombre de $m+1$, m désignant le degré de la première.

Il est clair, en effet, que deux fonctions consécutives quelconques sont l'une de degré pair, et l'autre de degré impair; de sorte que si leurs premiers termes forment une variation ou une permanence, ils présenteront au contraire une permanence ou une variation, quand on y aura changé x en $-x$. Si donc, dans la suite des signes des premiers termes de toutes les fonctions X, X_1, X_2,... X_m, il y a v variations et p permanences, quand on aura remplacé x par $-x$, la suite des signes de leurs premiers termes contiendra p variations et v permanences; par conséquent la proposée a $(p-v)$ racines réelles (**703**); mais le nombre total de ses racines est $m=p+v$; donc elle a $(p+v)-(p-v)=2v$ racines imaginaires. Donc *l'équation* $X=0$ *a autant de couples de racines imaginaires qu'il y a de variations dans la suite des signes des premiers termes de toutes les fonctions* X, X_1, X_2,... X_m.

712. Corollaire. *Pour que l'équation* $X=0$ *ait toutes ses racines réelles, il faut et il suffit que les fonctions* X, X_1, X_2,... *jusqu'à celle qui ne contient plus* x *inclusivement, soient au nombre de* $m+1$, *et qu'en outre leurs premiers termes soient tous positifs.* En effet, si le nombre des fonctions X, X_1, X_2,... était moindre que $m+1$, la suite des signes de leurs premiers termes ne pourrait pas présenter m variations, quand on y aurait changé x en $-x$; or, au contraire, elle doit avoir m variations de plus que la suite des signes des premiers termes de ces

fonctions, si la proposée a toutes ses racines réelles. Il faut donc d'abord que le nombre des fonctions X, X_1, X_2,... soit $m+1$: en second lieu, leurs premiers termes doivent être tous positifs; car, ceux de X et de X_1 l'étant, s'il n'en était pas de même de tous les autres, il y aurait une ou plusieurs variations dans la suite des signes des premiers termes des fonctions X, X_1, X_2,... X_m, et l'équation $X=0$ aurait ainsi un ou plusieurs couples de racines imaginaires. Les conditions que nous avons énoncées sont donc nécessaires; elles sont aussi suffisantes; car, si elles sont remplies, la proposée ne pourra pas avoir de racines imaginaires (**710**).

713. Lorsque les coefficients de l'équation $X=0$ sont indéterminés, les polynomes X_2, X_3,... que l'on obtient par la recherche du plus grand commun diviseur de X et de X_1, sont respectivement des degrés $m-2$, $m-3$,..., et les coefficients des plus hautes puissances de x dans ces polynomes, en y comprenant X_m, sont des quantités littérales composées des coefficients de l'équation $X=0$. Les conditions de la réalité de toutes les racines de cette équation se réduisent donc à ce que les coefficients des premiers termes des polynomes X_2, X_3,...X_m soient positifs, aucun n'étant nul. On voit que le nombre de ces conditions n'est pas plus grand que $(m-1)$, mais il peut être moindre, parce que quelques-unes peuvent être comprises dans les autres.

La méthode de l'équation aux carrés des différences avait donné $\frac{m(m-1)}{2}$ pour la limite du nombre de ces conditions (**595**).

***714.** 2ᵉ Cas. Nous avons admis jusqu'à présent que l'équation $X=0$ n'avait pas de racines égales, parce qu'on peut toujours faire en sorte de n'avoir à résoudre que des équations qui remplissent cette condition (**602**); mais le théorème énoncé au nº **703** peut encore s'appliquer au cas où l'équation aurait des racines égales. Supposons donc que

$$X=(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q\ldots(x-k)=0;$$

alors, en cherchant le plus grand commun diviseur de X et de X_1, comme nous l'avons prescrit au nº 703, on trouvera un diviseur X_r qui divisera exactement le précédent X_{r-1}, et on aura (602)

$$X_r = (x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}\ldots$$

Cela posé, si l'on divise les fonctions $X, X_1, X_2, \ldots X_r$, par X_r, on trouvera une suite de fonctions $T, T_1, T_2, \ldots T_r = +1$, auxquelles on pourra appliquer le théorème de M. *Sturm*.

En effet, on voit d'abord que

$$T = \frac{X}{X_r} = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k),$$

de sorte que l'équation $T=0$ a les mêmes racines que $X=0$, mais chacune de ces racines n'entre qu'une fois dans $T=0$. Ensuite, comme

$$X_1 = n\frac{X}{x-a} + p\frac{X}{x-b} + q\frac{X}{x-c} + \ldots + \frac{X}{x-k},$$

il en résulte que

$$T_1 = n\frac{T}{x-a} + p\frac{T}{x-b} + q\frac{T}{x-c} + \ldots + \frac{T}{x-k},$$

et qu'ainsi les fonctions T et T_1 sont premières entre elles (ceci est d'ailleurs une conséquence des équations $T = T_1Q_1 - T_2$, $T_1 = T_2Q_2 - T_3, \ldots T_{r-2} = T_{r-1}Q_{r-1} - 1$, que l'on déduit de celles du nº 703). En outre, on tire de cette dernière équation

$$\frac{T_1}{T} = \frac{n}{x-a} + \frac{p}{x-b} + \frac{q}{x-c} + \ldots + \frac{1}{x-k} = \frac{n + Q(x-a)}{x-a},$$

en appelant Q la somme de toutes les fractions qui suivent $\frac{n}{x-a}$: cette formule fait voir que le rapport $\frac{T_1}{T}$ est positif pour les valeurs de x un peu plus grandes que a, et négatif pour les valeurs de cette variable un peu plus petites que a; car, en posant $x = a + h$ et prenant h suffisamment petit, le numérateur du second membre aura le même signe que n. Ainsi, le signe de T

forme avec celui de T_1 une variation, avant que x atteigne la valeur a, et cette variation est changée en une permanence, après que x a dépassé cette racine.

Chacune des autres fonctions T_2, T_3, ... aura d'ailleurs, soit pour $x = a - h$, soit pour $x = a + h$, le même signe qu'elle a pour $x = a$, si toutefois aucune ne s'évanouit pour $x = a$. On conclut de là que la suite des signes des fonctions $T, T_1, T_2, \ldots T_r$ perd une variation sur la gauche lorsque x, en croissant, dépasse une racine de l'équation $T = 0$.

En raisonnant comme au n° 705, on verra que si une des autres fonctions $T_1, T_2, \ldots T_{r-1}$, telle que T_n, s'évanouit pour une valeur de x qui ne réduira pas en même temps T à zéro, le nombre des variations restera le même dans la suite des signes; car on a $T_{n-1} = T_n Q_n - T_{n+1}$.

En conséquence, *si* x *croît d'une manière continue, depuis* α *jusqu'à* β, *autant la suite des signes des fonctions* $T, T_1, T_2, \ldots T_r$ *aura de variations de moins pour* $x = \beta$ *que pour* $x = \alpha$, *autant l'équation* $T = 0$ *aura de racines comprises entre ces deux nombres.*

Remarquons qu'il n'est pas même nécessaire de calculer les fonctions $T, T_1, T_2, \ldots T_r$; car, puisque ces fonctions sont les quotients respectifs que l'on trouve en divisant $X, X_1, X_2, \ldots X_r$ par X_r, on conçoit que si, pour une certaine valeur de x, X_r a une valeur positive ou négative, les fonctions $T, T_1, T_2, \ldots T_r$ seront toutes de mêmes signes ou de signes contraires que leurs correspondantes $X, X_1, X_2, \ldots X_r$, et qu'ainsi cette dernière suite présentera les mêmes variations que la suite des signes de T, $T_1, T_2, \ldots T_r$. Donc *le nombre des racines réelles différentes de l'équation* $X = 0$ *comprises entre* α *et* β, *abstraction faite du degré de multiplicité de chacune, est égal à l'excès du nombre des variations contenues dans la suite des signes de* $X, X_1, X_2, \ldots X_r$, *pour* $x = \alpha$, *sur le nombre des variations de la même suite pour* $x = \beta$. Ainsi, le théorème convient au cas des racines égales, pourvu toutefois que α et β ne soient pas des racines de $X = 0$.

***718.** Occupons-nous maintenant de déterminer le degré de

multiplicité de chaque racine. Il suit du n° 602, que la dérivée de T a pour expression

$$T' = \frac{T}{x-a} + \frac{T}{x-b} + \frac{T}{x-c} + \ldots + \frac{T}{x-k},$$

d'où

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \ldots + \frac{1}{x-k} = \frac{1+R(x-a)}{x-a},$$

en appelant R la somme des fractions qui suivent $\frac{1}{x-a}$. En divisant par ce rapport $\frac{T'}{T}$ le rapport $\frac{T_1}{T}$, dont nous avons trouvé la valeur précédemment, il viendra

$$\frac{T_1}{T'} = \frac{n+Q(x-a)}{1+R(x-a)},$$

d'où l'on tire, en faisant $x=a$,

$$\frac{T_1}{T'} = n.$$

Si la racine a est incommensurable et qu'on ne l'ait pas obtenue sous forme finie, on ne trouvera que des valeurs approchées de T_1 et de T', mais leur quotient devra différer très-peu d'un nombre entier, qui sera n.

716. Il est intéressant de savoir comment la suite des signes des fonctions X, X_1, X_2,... X_r doit se modifier, pour qu'elle puisse perdre une variation, chaque fois que X s'évanouit.

Soit a une racine, soit simple, soit multiple, de $X=0$: les deux fonctions X et X_1 auront des signes semblables pour $x=a+h$, et si b désigne la racine simple ou multiple de $X=0$ immédiatement plus grande que a, de sorte que cette équation n'ait point de racines entre a et b, X_1 aura pour $x=b-h$ un signe contraire à celui de X. Mais X conserve constamment le même signe, lorsque x croît d'une manière continue depuis $a+h$ jusqu'à $b-h$; donc X_1 doit, en même temps, changer de signe une fois ou un nombre impair de fois.

Soit a' la valeur unique, ou la plus petite racine de l'équation $X_1=0$, qui soit comprise entre a et b, X et X_1 auront pour $x=a'-h$ le même signe qu'elles ont pour $x=a+h$; mais, pour $x=a'+h$, X aura encore ce même signe et X_1 un signe contraire; de sorte que la permanence formée par les signes de X et de X_1 pour $x=a+h$, se sera changée en une variation pour $x=a'+h$. Or, X_2 aura un signe contraire à celui de X pour les trois valeurs $x=a'-h$, $x=a'$ et $x=a'+h$ (705); de sorte qu'on peut former le tableau suivant :

	X	X_1	X_2
$x=a'-h$	$\pm$	$\pm$	$\mp$
$x=a'$	$\pm$	0	$\mp$
$x=a'+h$	$\pm$	$\mp$	$\mp$

Ainsi, en même temps que la permanence formée par les signes de X et de X_1 s'est changée en une variation, la variation formée par les signes de X_1 et de X_2 s'est changée en une permanence, et par conséquent le nombre des variations dans la suite totale des signes n'est ni augmenté ni diminué.

Si l'équation $X_1=0$ a une seconde racine a'' comprise entre a et b, la variation que forment les signes de X et de X_1 avant que x atteigne cette valeur a'', sera de nouveau remplacée par une permanence, quand x l'aura dépassée, et cependant à cause de X_2 le nombre des variations restera le même dans la suite des signes, ainsi que le montre le tableau ci-dessous :

	X	X_1	X_2
$x=a''-h$	$\pm$	$\mp$	$\mp$
$x=a''$	$\pm$	0	$\mp$
$x=a''+h$	$\pm$	$\pm$	$\mp$

Comme X_1 ne peut ainsi changer de signe qu'un nombre impair de fois, après son dernier changement, les signes de X et de X_1 formeront une variation qui subsistera jusqu'à ce que x atteigne la racine b de $X=0$.

717. THÉORÈME DE ROLLE. *Entre deux racines réelles et iné-*

gales d'une équation $X=0$, *il se trouve au moins une racine réelle de sa dérivée* $X_1=0$.

Nous venons, en effet, de démontrer qu'entre deux racines consécutives a et b de $X=0$ il y avait toujours un nombre impair de racines de $X_1=0$.

718. COROLLAIRE I. *Si une équation* $X=0$ *a toutes ses racines réelles, ses dérivées successives* $X_1=0$, $X_2=0$,... *auront aussi toutes leurs racines réelles.*

719. COROLLAIRE II. *L'équation* $X=0$ *ne peut avoir qu'une seule racine inférieure à la plus petite racine de* $X_1=0$, *et une seule qui soit supérieure à sa plus grande racine.*

720. COROLLAIRE III. *Entre deux racines consécutives de* $X_1=0$ *il ne peut tomber qu'une seule racine de* $X=0$.

721. Le théorème de *Rolle* fournit le moyen le plus rapide de trouver les conditions de la réalité des racines de l'équation $x^3+px+q=0$. En effet, la dérivée de cette équation étant $3x^2+p=0$, on voit que si p n'était pas négatif, la proposée n'aurait pas ses trois racines réelles (**718**); donc il faut déjà que l'on ait $p<0$. Cela posé, supposons, comme au n° **550**, que q soit négatif, auquel cas la proposée aura deux racines négatives, ces deux racines devront comprendre la racine négative $-\sqrt{-\frac{p}{3}}$ de la dérivée; donc la plus grande de ces deux racines se trouvera entre zéro et $-\sqrt{-\frac{p}{3}}$. Mais la substitution de zéro au lieu de x dans la proposée donne un résultat négatif $+q$; donc, en y remplaçant x par $-\sqrt{-\frac{p}{3}}$, on devra trouver un résultat positif; donc

$$+\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}-p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q>0,$$

ou $$-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+q>0;\quad \text{d'où}\quad 4p^3+27q^2<0.$$

Cette condition est suffisante; car, si elle est remplie, $p<0$,

et, d'un autre côté, notre équation $x^3+px+q=0$ aura une racine réelle négative comprise entre 0 et $-\sqrt{-\frac{p}{3}}$; d'ailleurs elle en a une positive, puisque $q<0$; donc ses trois racines sont réelles.

722. Pour donner une application du théorème de M. *Sturm*, nous allons chercher les conditions de réalité des racines de l'équation $$X=x^4+qx^2+rx+s=0.$$

On trouvera

$$X_1=4x^3+2qx+r,$$
$$X_2=-2qx^2-3rx-4s,$$
$$X_3=(-2q^3+8qs-9r^2)x-(rq^2+12rs),$$
$$X_4=16sq^4-4r^2q^3-128s^2q^2+144r^2sq+256s^3-27r^4.$$

Afin d'éviter les coefficients fractionnaires, on a multiplié X par 4, X_1 par q^2, et X_2 par $(-2q^3+8qs-9r^2)^2$. Les coefficients des premiers termes des fonctions X_2, X_3 et X_4 doivent être positifs; donc

$$q<0,\quad 2q^3-8qs+9r^2<0,$$

et $$16sq^4-4r^2q^3-128s^2q^2+144r^2sq+256s^3-27r^4>0.$$

§ IV. CALCUL DES RACINES INCOMMENSURABLES.

723. Nous avons expliqué (697) comment on pouvait obtenir toutes les racines commensurables d'une équation, et ramener ainsi sa résolution à celle d'une équation $F(x)=0$ qui n'a plus que des racines incommensurables et imaginaires. Cette nouvelle équation $F(x)=0$ pouvant avoir des racines égales, on lui appliquera *la méthode* dite *des racines égales*, si elle est d'un degré supérieur au cinquième (605), mais en ayant soin toutefois, avant de prendre un reste pour diviseur, de changer les signes de tous ses termes et de n'introduire ou de ne supprimer jamais que des facteurs positifs (705 et 706). La résolution de l'équation $F(x)=0$ sera ainsi ramenée à celle d'un certain nombre d'équations d'un degré moins élevé que le sien

et qui n'auront plus de racines multiples; de sorte que nous ne devrons plus nous occuper que d'équations dont toutes les racines seront inégales, incommensurables et imaginaires.

724. La détermination des racines incommensurables d'une équation se compose de deux parties distinctes : l'une, que l'on appelle la *méthode de séparation des racines*, a pour but d'assigner pour chaque racine réelle, deux nombres entre lesquels elle soit seule comprise, et l'autre apprend à évaluer chaque racine avec nn aussi grand degré d'approximation qu'on le désire. Tel est l'objet de la *méthode d'approximation*.

Avant d'entrer dans l'exposition détaillée de ces deux méthodes, je ferai remarquer que, si dans une équation on change x en $-x$, et qu'ayant calculé les racines positives de la transformée, on affecte chacune d'elles du signe $-$; on obtiendra toutes les racines négatives de cette proposée, de sorte que la difficulté de calculer toutes les racines réelles d'une équation est ainsi ramenée à la détermination de ses racines positives, et en conséquence nous allons ne nous occuper que de celles-ci.

725. Méthode de M. Sturm. Puisque deux nombres qui, substitués dans une équation, donnent deux résultats de signes contraires, comprennent au moins une racine réelle de cette équation (**342**), on voit que si, en substituant dans la proposée $F(x)=0$ la suite naturelle des nombres entiers 0, 1, 2, 3... jusqu'à la limite supérieure $+L$ de ses racines positives, on trouvait autant de couples de résultats de signes contraires qu'il y a de variations dans son premier membre, on serait certain qu'entre deux nombres consécutifs qui donneraient deux résultats de signes contraires il ne tomberait qu'une seule racine, tandis que deux nombres qui fourniraient un couple de résultats de mêmes signes ne comprendraient aucune racine; car, s'il en était autrement, une équation aurait plus de racines positives que de variations, ce qui est contraire à la première partie de la *règle des signes de Descartes*. On connaîtra donc ainsi avec certitude, par les signes des résultats des substitutions, quels sont ceux des nombres substitués qui comprennent une racine et ceux

qui n'en interceptent pas; de sorte que la séparation des racines positives sera effectuée.

Mais si, en substituant la suite naturelle des nombres entiers 0, 1, 2, 3,... + L dans le premier membre de l'équation proposée, on ne trouve pas autant de couples de résultats de signes contraires qu'elle a de variations, cela pourra tenir à ce qu'elle a des racines imaginaires, ou bien à ce qu'il tombe plusieurs racines entre deux nombres consécutifs; de sorte que l'on devra craindre que la séparation des racines ne soit pas alors complétement effectuée.

Cependant, si l'on sait, d'après un examen attentif de l'énoncé de la question qui a conduit à l'équation que l'on veut résoudre, combien elle doit avoir de racines positives, on pourra encore parvenir à séparer ces racines, si elles ne le sont pas. Pour cela, on transformera l'équation $F(x)=0$ en une autre dont les racines seront dix fois plus grandes que les siennes; de sorte que si la plus petite différence des racines de la proposée est plus grande qu'*un dixième*, les racines de la transformée $F\left(\frac{x}{10}\right)=0$ différeront de plus d'une unité; par conséquent, on n'aura qu'à substituer la suite naturelle des nombres 0, 1, 2, 3,... + 10L dans cette transformée, et les signes des résultats formant autant de variations que la proposée aura de racines positives, la séparation de ces racines se trouvera ainsi faite. Mais, si le nombre de ces variations est encore inférieur à celui des racines positives de $F(x)=0$, on multipliera par *dix* les racines de la transformée, ce qui donnera une nouvelle transformée $F\left(\frac{x}{100}\right)=0$, sur laquelle on opérera comme sur la précédente, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit parvenu au but que l'on veut atteindre.

On pourra abréger les calculs en observant : 1° que l'on connaît *a priori* les signes des résultats que donne la substitution des nombres 10, 20, 30,... dans $F\left(\frac{x}{10}\right)=0$; car, ces résultats

sont les mêmes que ceux qu'on a trouvés en faisant respectivement $x=1$, $=2$, $=3$,... dans $F(x)=0$; 2° qu'au lieu de substituer immédiatement dans $F\left(\frac{x}{10}\right)$ tous les nombres entiers compris entre 0 et 10, 10 et 20, 20 et 30,... on pourra *procéder par moyennes*, c'est-à-dire y substituer d'abord 5, 15, 25,...; ce qui suffira pour séparer les racines, si celles de la proposée diffèrent de plus de 0,5; si leur différence est moindre que 0,5, on substituera des moyennes entre 0 et 5, 5 et 10, 10 et 15,..., mais en ne prenant pour chacune que sa partie entière, comme 3, 8, 13,...; et ainsi de suite.

726. Si l'on ignore combien l'équation proposée a de racines réelles, il faudra avoir recours au théorème de M. *Sturm*. En conséquence on formera (**703**) toutes les fonctions

$$X,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ldots\ X_n\text{*} \qquad [a],$$

si déjà elles ne l'ont pas été (**723**), puis on écrira sur une première ligne les signes des derniers termes de toutes ces fonctions et, sur une seconde, ceux de leurs premiers termes; puis en prenant la différence entre le nombre des variations contenues dans la première ligne et le nombre des variations que présentera la deuxième, on saura combien l'équation $F(x)=0$ a de racines positives. Si ce nombre est égal au nombre des couples de résultats de signes contraires qu'a donnés la substitution des nombres 0, 1, 2, 3,... dans son premier membre, on en conclura que les racines étaient séparées; sinon, on substituera dans la suite des fonctions X, X_1, X_2,... X_n les nombres 0, 1, 10, 100, 1000,... jusqu'à ce que l'on parvienne à une suite qui présente autant de variations que celle des signes des premiers termes de toutes ces fonctions; car, le nombre correspondant sera une limite supérieure des racines positives de $X=0$. En comparant le nombre des variations perdues en passant

* X_n désignant un diviseur qui ne change pas de signe dans l'intervalle de zéro à la limite supérieure des racines positives de $F(x)=X=0$.



d'une suite à la suivante, on saura ainsi combien il y a de racines entre 0 et 1, entre 1 et 10, entre 10 et 100....

Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait des racines comprises entre 10 et 100; on fera $x=50$ dans toutes les fonctions, et on apprendra par là combien il y a de racines entre 10 et 50, combien entre 50 et 100. Admettons qu'il s'en trouve entre 10 et 50: on substituera 20 ou 30 dans la suite [a], et si c'est 30 qui a été substitué, on verra facilement combien il y a de racines entre 10 et 30 et entre 30 et 50; s'il y en a entre 30 et 50, on fera $x=40$ dans toutes les fonctions, ce qui fera connaître combien il y a de racines, soit entre 30 et 40, soit entre 40 et 50; de sorte qu'on parviendra de cette manière à déterminer le chiffre des dizaines de chacune des racines comprises entre 10 et 100. Pour obtenir le chiffre de leurs unités, par exemple, de celles qui ont 4 pour chiffres de leurs dizaines, on posera $x=40+y$, et on substituera cette valeur de x dans toutes les fonctions X, X_1, X_2, X_n (483); ce qui donnera une suite de fonctions

$$Y,\ Y_1,\ Y_2, \ldots Y_n \qquad [b],$$

auxquelles on pourra appliquer le théorème de M. *Sturm;* car, il est évident qu'en faisant dans cette dernière suite $y=\alpha$, on obtiendra les mêmes résultats qu'en faisant $x=40+\alpha$ dans la suite [a]; de sorte que, si pour $y=\alpha$ la suite [b] présente n variations de moins que pour $y=0$, on devra en conclure que la proposée a n racines comprises entre 40 et $40+\alpha$; donc aussi l'équation $Y=0$ en a n entre *zéro* et α. En conséquence, on fera $y=5$, dans la suite [b], et en comparant le nombre des variations qui en résulteront aux nombres de variations fournies par $x=40$ et par $x=50$, nombres qui sont ceux mêmes des variations que l'on obtiendrait en faisant $y=0$ et $y=10$, on saura combien il y a de valeurs de y comprises entre 0 et 5, et entre 5 et 10; s'il y en a entre 0 et 5, par exemple, on continuera à procéder *par moyennes*, en faisant d'abord $y=2$ ou $y=3$; si, ayant substitué $y=2$, on a *reconnu* qu'il y avait des valeurs de y comprises entre 0 et 2, on fera $y=1$ et on saura ainsi si ces

valeurs de y se trouvent entre *zéro* et 1 ou entre 1 et 2. Supposons qu'elles tombent entre 1 et 2, on en conclura que la proposée a des racines entre 41 et 42, de sorte que ces racines se trouvent ainsi déterminées *à moins d'une unité*.

Si l'on voulait les obtenir *à moins d'un dixième*, il faudrait continuer l'application de la méthode précédente, en posant $y=1+z$, ce qui donnerait une suite de fonctions

$$Z, Z_1, Z_2 \dots Z_n,$$

auxquelles on pourrait encore appliquer le théorème de M. *Sturm*. En y faisant d'abord $z=0,5$, puis, en procédant encore par moyennes, on parviendrait à déterminer le chiffre des dixièmes des racines de la proposée qui sont comprises entre 41 et 42, et, en continuant de la même manière, on finirait non-seulement par séparer ces racines, mais même par les déterminer aussi exactement qu'on le voudrait.

727. Comme ces calculs deviennent très-longs, on les arrête dès qu'on a trouvé le chiffre des unités des racines que l'on cherche, et, pour approcher davantage de ces racines, on a recours à une élégante méthode, fondée sur la théorie des *fractions continues*, qui est due à *Lagrange*. Nous considérerons deux cas, suivant qu'il n'y a qu'une seule racine entre deux nombres entiers consécutifs ou qu'il s'en trouve plusieurs.

1er Cas. Supposons qu'il ne tombe qu'une seule racine de l'équation $Y=0$ entre les deux nombres entiers a et $(a+1)$: cette racine se compose de a, plus d'une quantité moindre que l'unité que nous pourrons représenter par $\frac{1}{z}$; de sorte que nous poserons

$$y=a+\frac{1}{z};$$

et, si nous substituons cette valeur de y dans l'équation $Y=0$, nous trouverons, en effectuant le développement par la formule de *Taylor* (483), une transformée $Z=0$, telle qu'en substituant successivement toutes ses racines dans la formule $y=a+\frac{1}{z}$,

on obtiendra toutes les racines de $Y=0$. Or, il est évident qu'aux valeurs négatives de z correspondront des valeurs de y plus petites que a, et que ses valeurs positives supérieures ou inférieures à l'unité donneront des valeurs de y plus grandes que a, mais plus petites ou plus grandes que $a+1$. Puis donc que les nombres a et $(a+1)$ comprennent une racine de $Y=0$ et n'en comprennent qu'une, *il faut que l'équation* $Z=0$ *ait une et une seule racine positive plus grande que l'unité.* On substituera donc la suite naturelle des nombres 2, 3, 4, 5... dans le polynome Z, jusqu'à ce que l'on soit arrivé à un nombre qui donne un résultat positif*, et la valeur cherchée de z sera comprise entre ce nombre et le précédent. Soit b ce nombre précédent : on posera

$$z=b+\frac{1}{u},$$

et, en substituant cette valeur de z dans $Z=0$, on obtiendra une nouvelle équation $U=0$ qui aura une racine positive plus grande que l'unité et n'en aura qu'une. On en trouvera la partie entière en substituant la suite des nombres 2, 3, 4, 5,... dans U, jusqu'à ce que l'on parvienne à un résultat positif, et en appelant $(c+1)$ le nombre qui aura fourni ce résultat, on posera

$$u=c+\frac{1}{v},$$

et on pourra continuer cette série de calculs aussi loin qu'on le jugera convenable. Si on remonte ensuite à la valeur de y, on trouvera une expression de la forme

$$y=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc.}}}}$$

de sorte qu'*on pourra ainsi obtenir cette valeur de* y *avec tel degré d'approximation qu'on le voudra.*

---

* La substitution de $+1$ dans Z donne nécessairement un résultat négatif, puisque l'équation $Z=0$ n'a qu'une racine comprise entre $+1$ et la limite supérieure de ses racines positives.

Si, par exemple, on veut l'avoir à moins de $\frac{1}{\delta}$ près, on commencera par extraire la racine carrée de δ, puis, à mesure que l'on obtiendra un quotient incomplet, on formera la réduite correspondante, et on s'arrêtera quand on aura trouvé une fraction convergente dont le dénominateur ne soit pas de beaucoup inférieur à $\sqrt{\delta}$; on verra alors, d'après la règle du nº **402**, si l'on a atteint le degré d'approximation demandé. S'il n'en est pas ainsi, on calculera le quotient incomplet suivant, puis la réduite correspondante, et on appliquera de nouveau la règle du nº **402** et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait obtenu une réduite qui diffère de la valeur cherchée de y d'une quantité moindre que $\frac{1}{\delta}$.

728. Si, en effectuant le développement de la valeur de y en fraction continue, on voit les mêmes quotients se reproduire plusieurs fois, et dans le même ordre, on aura lieu de présumer que la valeur de y dont on s'occupe a pour expression une fraction continue périodique. Pour savoir s'il en est effectivement ainsi, on formera l'équation du deuxième degré $y^2+py+q=0$, dont elle est une des racines (**412**), et cette équation devra en conséquence avoir une racine commune avec $Y=0$, de sorte que leurs premiers membres auront un commun diviseur du premier degré. On divisera donc Y par y^2+py+q, et si $My+N$ est le reste auquel conduit cette division, il faudra que ce reste s'anéantisse, en y remplaçant y par la racine dont il s'agit, laquelle peut être représentée par $\alpha+\sqrt{\beta}$; on devra donc avoir

$$(M\alpha+N)+M\sqrt{\beta}=0,$$

équation qui se décompose dans les deux suivantes

$$M\alpha+N=0 \quad \text{et} \quad M=0 \quad \text{d'où} \quad N=0.$$

Donc, la division de Y par y^2+py+q doit se faire exactement, si la fraction continue est effectivement périodique. Si cette di-

vision ne réussit pas, on en conclura que la périodicité n'a pas lieu, et on poursuivra le calcul des quotients incomplets.

729. 2ᵉ Cas. Supposons qu'il tombe plusieurs racines entre les deux nombres entiers a et $(a+1)$, on posera encore

$$y = a + \frac{1}{z},$$

ce qui conduira à une transformée $Z = 0$, qui aura autant de racines positives plus grandes que l'unité qu'il y a de racines de $Y = 0$ comprises entre a et $(a+1)$. Si l'on était sûr que ces différentes valeurs de z eussent des parties entières différentes, on n'aurait qu'à substituer dans Z la suite naturelle des nombres $1, 2, 3, 4,\ldots$ et on trouverait autant de couples de résultats de signes contraires qu'il y a de ces racines, de sorte que l'on déterminerait de cette manière la partie entière de chacune, ce qui nous ramènerait à appliquer à l'équation $Z = 0$ la méthode d'approximation de *Lagrange* que nous avons exposée tout à l'heure (727). Mais comme plusieurs valeurs de z peuvent avoir la même partie entière et qu'alors la substitution des nombres $1, 2, 3, 4,\ldots$ dans Z ne pourrait pas indiquer l'existence de plus d'une de ces racines, pour éviter toute incertitude, on substituera $a + \frac{1}{z}$ non-seulement dans Y, mais aussi dans toutes les fonctions Y_1, Y_2, $Y_3,\ldots Y_n$, ce qui donnera une nouvelle suite de fonctions

$$Z,\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\ldots Z_n \qquad [c],$$

auxquelles on pourra appliquer le théorème de M. *Sturm*. Il est clair, en effet, que les résultats qu'on trouvera en faisant $z = \beta$, par exemple, dans cette suite, seront ceux mêmes que l'on aurait obtenus en remplaçant y par $a + \frac{1}{\beta}$ dans la suite [b], de telle sorte que si n racines de l'équation $Y = 0$ sont comprises entre $a + \frac{1}{\beta}$ et $a + \frac{1}{\beta+1}$, auquel cas n valeurs de z se trouvent entre β et $(\beta+1)$, la suite [b] présentant n variations *de plus*

pour $y=a+\frac{1}{\beta+1}$ que pour $y=a+\frac{1}{\beta}$, la suite [c] devra pareillement fournir n variations de plus pour $z=\beta+1$ que pour $z=\beta$. Donc, en appliquant à cette suite le calcul que nous avons développé dans le n° 726, on pourra déterminer la partie entière de chaque valeur de z. Si ces parties entières sont différentes, on est ramené, comme nous l'avons dit plus haut, à appliquer à l'équation $Z=0$ la méthode du n° 727, c'est-à-dire que l'on n'opérera que sur Z et non sur les autres fonctions Z_1, Z_2,... Z_n. Mais, s'il y a plusieurs valeurs de z entre b et $(b+1)$, par exemple, on substituera

$$z=b+\frac{1}{u},$$

dans toutes les fonctions de la suite [c], ce qui donnera la nouvelle suite

$$U,\ U_1,\ U_2,\ U_3,\dots U_n,$$

sur laquelle on opérera comme on l'a fait sur la suite [c]; et, en continuant de cette manière, on finira par arriver à une transformée dont les racines positives et plus grandes que l'unité auront des parties entières différentes, sans quoi plusieurs valeurs de y auraient, pour expression, la même fraction continue, de sorte qu'elles seraient égales, et nous sommes partis d'une équation dont toutes les racines étaient différentes.

Comme on n'a besoin que de connaître les signes des résultats qu'on obtient en substituant certains nombres entiers dans les suites [a], [b], etc., on chassera les dénominateurs qui pourraient s'y trouver, ce qui sera permis (706), car ces dénominateurs seront des quantités positives.

730. Méthode de Lagrange. Nous avons vu que, quand la suite des signes obtenus en substituant les nombres naturels 0, 1, 2, 3,...$+$L dans le premier membre de l'équation $F(x)=0$ ne présentait pas autant de variations qu'il y en a dans ce premier membre, il fallait, pour séparer les racines positives de cette équation, avoir recours au théorème de M. *Sturm*, si d'ailleurs

on ignorait le nombre de ces racines positives. Toutefois *Lagrange* avait donné longtemps auparavant une méthode très-générale pour effectuer cette séparation.

Ce grand géomètre, observant que, si la substitution des nombres 0, 1, 2, 3,... + L, dans le premier membre de $F(x)=0$, ne suffisait pas pour effectuer la séparation de ses racines positives, cela tenait nécessairement à ce qu'il y avait plusieurs racines comprises entre deux nombres consécutifs, il en avait conclu que si, au lieu de prendre l'unité pour raison de la progression des nombres à substituer, on choisissait une quantité δ moindre que la plus petite des différences qui existent entre les diverses racines de $F(x)=0$, il ne pourrait tomber qu'une seule racine entre deux nombres dont la substitution dans $F(x)$ donnerait deux résultats de signes contraires, et que deux nombres qui produiraient deux résultats de mêmes signes n'en comprendraient aucune, de sorte qu'on effectuerait ainsi la séparation des racines positives de la proposée, et qu'on obtiendrait même la valeur de chacune de ces racines à moins de δ. Il s'agit donc de calculer cette quantité δ.

Pour y parvenir, on formera l'équation aux carrés des différences $\psi(z)=0$ des racines de l'équation proposée $F(x)=0$ (394 ou 645), et on cherchera ensuite la limite inférieure $\frac{g}{h}$ des racines positives de cette équation (689), et, en en extrayant la racine carrée, on obtiendra une quantité moindre que la plus petite des différences des racines de la proposée *.

---

* Il est clair que l'on obtiendrait également une valeur de δ, en calculant une limite inférieure des racines de l'équation aux différences $\pi(y)=0$. Or, si

$$Ay^{2p}-By^{2p-2}-Cy^{2p-4}-\ldots-Ky^{2p-2q}=y^{2p-2q}(Ay^{2q}-By^{2q-2}-Cy^{2q-4}-\ldots-K) \quad [d]$$

est un des groupes dans lesquels on décompose la transformée $\pi\left(\frac{1}{y}\right)=0$ de cette équation,

$$z^{p-q}(Az^{q}-Bz^{q-1}-Cz^{q-2}-\ldots-K) \quad [e]$$

sera le groupe correspondant de la transformée $\psi\left(\frac{1}{z}\right)=0$ de l'équation

Si $\sqrt{\frac{g}{h}}$ est une quantité plus grande que l'unité, les racines positives de la proposée auront été séparées par la substitution des nombres 0, 1, 2, 3,...+ L, dans son premier membre, et il faudra appliquer au calcul de chacune d'elles la méthode d'approximation que nous avons développée au n° **727**.

Si $\sqrt{\frac{g}{h}}<1$, on observera que $\sqrt{\frac{g}{h}}=\frac{\sqrt{gh}}{h}$, de sorte qu'en

---

aux carrés des différences, de sorte que faire $x=h$ dans [e] c'est faire $y=\sqrt{h}$ dans [d]; si donc on trouve h pour limite supérieure des racines positives de $\psi\left(\frac{1}{z}\right)=0$, on trouvera $\sqrt{h}$ pour la limite de celles de $\pi\left(\frac{1}{y}\right)=0$; et par conséquent l'équation aux différences et l'équation aux carrés des différences conduisent l'une et l'autre à $\sqrt{\frac{1}{y}}$, pour valeur de la quantité que nous avons désignée par δ.

Observons toutefois que si l'on ne peut pas résoudre immédiatement les équations formées en égalant à zéro les groupes dans lesquels on aura décomposé les équations $\psi\left(\frac{1}{z}\right)=0$, et $\pi\left(\frac{1}{y}\right)=0$, et qu'il faille faire des tâtonnements, en y substituant les nombres entiers 1, 2, 3, 4,..., si l'on trouve que $z=10$, par exemple, rend positifs tous les groupes de $\psi\left(\frac{1}{z}\right)$, on devra faire $y=4$ dans $\pi\left(\frac{1}{y}\right)$, pour en rendre tous les groupes positifs; car, on n'y aura pas substitué $y=\sqrt{10}$, puisqu'on essaye seulement les nombres entiers 1, 2, 3, 4. Ainsi, la considération de l'équation aux carrés des différences aura donné alors $\delta=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$, de sorte qu'on aura pris $\frac{3}{10}$ pour raison de la progression des nombres à substituer, tandis que l'équation aux différences aurait conduit à faire $\delta=\frac{1}{4}$, et $\frac{3}{10}$ est $>\frac{1}{4}$. Il vaut donc mieux employer l'équation aux carrés des différences.

Si on employait la méthode donnée au n° 688, pour calculer directement la limite inférieure des racines d'une équation, on trouverait $\delta=\sqrt{\frac{U}{U+N}}$, en faisant usage de l'équation aux carrés des différences, et $\delta=\frac{U}{U+N}<\sqrt{\frac{U}{U+N}}$, en employant l'équation aux différences. Donc encore, on devra préférer l'équation aux carrés des différences.

appelant k la racine du plus grand carré contenu dans gh, on aura $\frac{k}{h} < \sqrt{\frac{g}{h}}$; on pourra donc prendre $\frac{k}{h}$ pour la raison de la progression des nombres à substituer dans $F(x)$, lesquels seront ainsi tous commensurables. Mais ce n'est pas assez d'éviter de cette manière la substitution de quantités incommensurables, il faut encore faire en sorte de n'opérer que sur des nombres entiers Pour y parvenir, on transformera l'équation $F(x)=0$ en une autre $f(y)=0$ dont les racines soient h fois plus grandes que les siennes; les différences des racines de cette nouvelle équation seront h fois plus grandes que celles de la proposée, et par conséquent elles surpasseront $\frac{k}{h} \times h = k$; d'où il suit qu'en substituant dans $f(y)=0$ la suite des nombres

$$0,\ k,\ 2k,\ 3k,\ 4k,\ldots$$

jusqu'à la limite supérieure des racines positives de cette équation, on sera sûr d'effectuer la séparation de ses racines positives. Mais on peut encore resserrer davantage les deux limites qui comprennent une même racine. Car si nk et $(n+1)k$ sont ces deux limites, on n'aura qu'à substituer dans $f(y)$ leur moyenne arithmétique, ou le nombre entier qui en approche le plus, si elle est fractionnaire, et en comparant le signe du résultat aux signes qu'ont donnés $y=nk$ et $y=(n+1)k$, on saura si cette racine de $f(y)=0$ est comprise entre le nombre substitué et nk, ou entre ce nombre et $(n+1)k$. On aura donc ainsi resserré les limites qui comprennent la racine que l'on considère, et on voit qu'en continuant ainsi, on parviendra à la placer entre deux nombres entiers consécutifs, et même entre deux nombres qui différeront l'un de l'autre d'aussi peu que l'on voudra. Cette méthode d'approximation, qui est d'ailleurs d'une application très-laborieuse, est connue sous le nom de *Méthode par rapprochement des limites.*

Quand on aura ainsi calculé toutes les racines de l'équation $f(y)=0$, à moins d'une unité, on les divisera par h, et on

trouvera ainsi celles de la proposée $F(x)=0$ à moins de $\frac{1}{h}$. Si cette approximation est suffisante, le problème de la résolution de cette dernière équation sera complétement résolu. Si on demande les racines de $F(x)=0$ à moins de $\frac{1}{n}$, n étant $>h$, il n'y aura qu'à calculer celles de $f(y)=0$ à moins de $\frac{h}{n}$, ce qui ne saurait présenter de difficultés (**727**), et, en les divisant ensuite par h, on obtiendra les racines de $F(x)=0$, avec le degré d'approximation demandé.

Telle est la méthode que *Lagrange* a donnée pour déterminer les racines incommensurables d'une équation. On voit qu'elle est infaillible et qu'elle ne peut laisser échapper aucune racine; mais il faut reconnaître que, comme elle exige la formation de l'équation aux carrés des différences des racines de la proposée, elle a l'inconvénient d'entraîner dans des calculs extrêmement laborieux. Aussi cet illustre géomètre avait-il fait de nombreuses tentatives pour éviter le calcul de cette équation, et il y avait réussi pour plusieurs cas particuliers, ainsi qu'on peut le voir dans son admirable *Traité de la résolution des équations numériques*.

731. La substitution de la suite naturelle des nombres entiers 0, 1, 2, 3, etc. (**725**) dans le premier membre de l'équation à résoudre, pourra d'ailleurs s'effectuer très-simplement d'après la *méthode des différences* (**662**), en s'arrêtant lorsque l'un des résultats sera de même signe que les différences qu'on doit leur ajouter pour obtenir les suivants, puisqu'alors la valeur de ces résultats allant toujours en croissant, le premier membre de l'équation ne pourra pas devenir égal à zéro. Si cette substitution donne autant de changements de signes qu'il y a de variations dans le premier membre de l'équation, les racines seront séparées. Pour en approcher davantage, au lieu de transformer l'équation proposée en une autre dont les racines soient dix fois plus grandes (**725**) et de substituer ensuite dans la transformée les nombres entiers 1, 2, 3, etc., on pourra sub-

stituer directement dans la proposée des nombres consécutifs différant d'un dixième, en faisant usage des formules que nous avons données précédemment (672); ces substitutions se feront seulement dans les intervalles où l'on aura reconnu l'existence de racines. On arrivera ainsi à placer chaque racine entre deux nombres différant d'un dixième; pour obtenir une plus grande approximation, on pourra ensuite, soit substituer des nombres équidistants d'un centième dans chaque nouvel intervalle comprenant une racine, soit employer une méthode plus rapide due à *Newton*, et que nous exposerons tout à l'heure (735).

S'il arrive, au contraire, que le nombre des racines mises en évidence par la substitution des nombres entiers 0, 1, 2, 3, etc. soit moindre que le nombre des racines positives qu'il est permis de supposer d'après la règle de *Descartes*, on ne sera pas sûr d'avoir séparé toutes les racines. On devra recourir à de nouvelles substitutions de nombres équidistants d'un dixième. Mais il conviendra, pour ne pas entreprendre des calculs inutiles, de faire ces substitutions dans les intervalles où elles pourront présenter quelques chances de succès; on y parviendra en s'aidant de considérations graphiques, comme nous allons le faire voir.

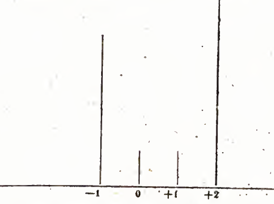
732. Soit $F(x)=0$ l'équation proposée. Posons $y=F(x)$. Concevons que sur une ligne droite on porte, à partir d'une origine 0, des longueurs égales, qui représentent les valeurs positives $+1, +2, +3...$, données successivement à x, et en sens opposé des longueurs destinées à représenter les valeurs négatives $-1, -2, -3,...$; puis, par l'extrémité de ces distances, élevons des perpendiculaires dont les longueurs soient égales aux valeurs correspondantes de y, ces longueurs étant portées au-dessus ou au-dessous de l'axe des x, suivant que les valeurs de y seront positives et négatives. On déterminera ainsi une série de points discontinus, qui deviendraient contigus si l'on donnait à x des valeurs variant d'une manière continue, et formeraient alors la courbe dont $y=F(x)$ est

l'équation. Mais l'on conçoit que, dans un grand nombre de cas, l'ensemble de ces points isolés pourra suffire pour donner des indications utiles sur la forme générale de la courbe, et pour faire connaître approximativement la position des points où elle coupe l'axe des x, c'est-à-dire les valeurs de x qui, rendant nulles les valeurs correspondantes de y, sont les racines de l'équation $F(x)=0$. On substituera alors des nombres équidistants d'un dixième dans les intervalles où la forme de la courbe aura manifesté l'existence probable d'un point d'intersection avec l'axe des x, et l'on pourra ainsi arriver à séparer les racines.

Ainsi, soit l'équation $3x^4-3x+1=0$. Je pose $y=3x^4-3x+1$, et je trouve que pour

$$\begin{aligned} x&=-1, & y&=+7,\\ x&=\ \ 0, & y&=+1,\\ x&=+1, & y&=+1,\\ x&=+2, & y&=+43. \end{aligned}$$

Construisons ces valeurs comme ci-dessous :



Si l'on observe d'ailleurs qu'en faisant croître x négativement au-dessous de -1 et positivement au-dessus de $+1$, y prendra des valeurs de plus en plus grandes, il est clair que

si la courbe à laquelle appartiennent les quatre points ci-dessus déterminés coupe l'axe des x, cela ne pourra arriver qu'entre $x=0$ et $x=+1$. C'est donc entre ces deux valeurs de x qu'il conviendra de tenter de nouvelles substitutions. En substituant $+0,5$, on trouve effectivement un résultat négatif; l'équation a donc deux racines positives, comprises l'une entre 0 et 0,5, et l'autre entre 0,5 et 1. D'ailleurs il ne peut pas exister plus de deux racines positives, d'après la règle de *Descartes*, et l'équation n'a pas de racines négatives; les racines réelles sont donc séparées.

733. Le théorème suivant permettra d'ailleurs d'assigner une limite aux sinuosités que pourraient présenter les courbes obtenues:

Si l'équation proposée est du degré m, *une parallèle à l'axe des* x *ne peut couper la courbe en plus de* m *points.*

Soit, en effet, a la distance de cette parallèle à l'axe des x. Posons $F(x)=a$; cette équation, étant du degré m, ne pourra pas avoir plus de m racines, c'est-à-dire qu'il n'y aura pas plus de m valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ pourra devenir égal à a; or, les points d'intersection de la courbe avec la droite considérée correspondent précisément à ces valeurs de x; le théorème se trouve donc démontré.

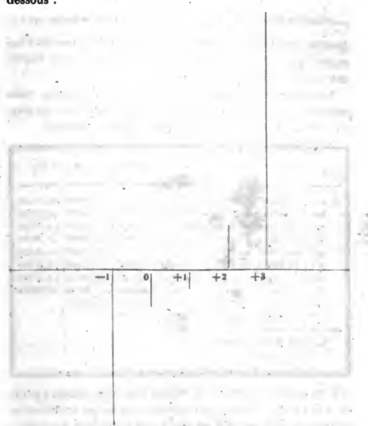
734. Il y aura cependant des cas où la considération des points de la courbe obtenus en construisant les valeurs de $F(x)$ correspondantes aux valeurs 0, 1, 2, 3..., données à la variable pourra ne donner aucune indication. Prenons, en effet, pour exemple l'équation :

$$64x^5-160x^4+160x^3-104x^2+48x-9=0.$$

On aura, pour

$$\begin{aligned} x&=-1, & y&=-545,\\ x&=0, & y&=-9,\\ x&=+1, & y&=-1,\\ x&=+2, & y&=+53,\\ x&=+3, & y&=+1503, \end{aligned}$$

et en construisant ces valeurs, on obtiendra les résultats ci-dessous :



L'équation n'a d'ailleurs pas de racines négatives (la transformée en $-x$ n'ayant que des permanences), et il est facile de voir, en groupant les termes de la manière suivante,

$$64x^4\left(x-\frac{160}{64}\right)+160x^2\left(x-\frac{104}{160}\right)+48\left(x-\frac{9}{48}\right),$$

que $+3$ est une limite supérieure des racines positives, et qu'à partir de cette valeur le premier membre prendra des valeurs toujours croissantes. Ainsi, nous voyons qu'il existe une ra-

cine comprise entre $+1$ et $+2$; mais l'inspection de la courbe n'indique nullement qu'il puisse exister d'autres racines. Si cependant on substitue $\frac{1}{2}$ ou 0,5 dans le premier membre de l'équation, on trouve $+1$ pour résultat. Il y a donc encore deux autres racines réelles, l'une comprise entre 0 et 0,5, l'autre entre 0,5 et $+1$.

Pour déterminer plus exactement ces trois racines, nous substituerons à partir de 0 des nombres croissants de dixième en dixième, et nous formerons ainsi le tableau suivant :

x	y	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$	$\delta^4 y$	$\delta^5 y$
$x=0$	−9,00000	+3,90464	−1,32480	+0,48000	−0,23040	+0,07680
0,1	−5,09536	+2,57984	−0,84480	+0,24960	−0,15360	+0,07680
0,2	−2,51552	+1,73504	−0,59520	+0,09600	−0,07680	+0,07680
0,3	−0,78048	+1,13984	−0,49920	+0,01920	−0,00000	+0,07680
0,4	+0,35936	+0,64064	−0,48000	+0,01920	+0,07680	+0,07680
0.5	+1,00000	+0,16064	−0,46080	+0,09600	+0,15360	+0,07680
0,6	+1,16064	−0,30016	−0,36480	+0,24960	+0,23040	+0,07680
0,7	+0,86048	−0,66496	−0,11520	+0,48000	+0,30720	+0,07680
0,8	+0,19552	−0,78016	+0,36480	+0,78720	+0,38400	
0,9	−0,58464	−0,41536	+1,15200	+1,17120		
$x=1,0$	−1,00000	+0.73664	+2,32320			
1,1	−0,76336	+3,05984				
1,2	+2,79648					

Il est inutile de pousser ce tableau plus loin, puisqu'à partir de $x=1,2$ les résultats des substitutions seront évidemment positifs, de sorte que 1,2 est une limite supérieure des racines de l'équation. Ainsi, l'équation proposée a trois racines réelles comprises entre 0,3 et 0,4, entre 0,8 et 0,9, et entre 1,1 et 1,2. Pour les calculer à moins d'un centième, on pourra substituer entre chaque intervalle des valeurs distantes d'un centième, etc., ou bien recourir à la méthode suivante.

735. Méthode d'approximation de Newton. Nous avons vu tout à l'heure comment, quand on connait deux nombres entre lesquels se trouve une seule racine de l'équation $F(x)=0$,

on peut par le rapprochement des limites de cette racine l'obtenir aussi exactement que l'on veut. Supposons donc qu'en opérant ainsi, on ait calculé la valeur de cette racine *à moins d'un dixième.*

J'appelle a la valeur approchée de cette racine, et y la quantité dont elle en diffère, de sorte que $(a+y)$ est une racine de $F(x)=0$. Nous exprimerons qu'il en est ainsi, en remplaçant x par $(a+y)$ dans cette équation, ce qui donnera :

$$F(a+y)=F(a)+F'(a)y+\frac{F''(a)}{1.2}y^2+\frac{F'''(a)}{1.2.3}y^3+\ldots+y^m=0 \quad [12]$$

équation du même degré que la proposée, et dont les racines sont les m restes que l'on obtient en retranchant de chacune des racines de cette proposée la quantité constante a. Or, puisqu'une des racines de $F(x)$ est peu différente de a, l'équation [12] doit avoir pour racine une petite fraction ; d'où il suit que, si l'on y remplace y par cette valeur, les termes où y entre à des puissances supérieures à la première deviendront très-petits, de sorte que cette équation sera fort peu altérée en y supprimant ces termes. Elle se réduira alors à

$$F(a)+F'(a)y=0, \text{ d'où } y=-\frac{F(a)}{F'(a)} \quad [13],$$

et par suite, comme valeur approchée de x,

$$x=a-\frac{F(a)}{F'(a)}.$$

Or, on tire de l'équation [12]

$$y=-\frac{F(a)}{F'(a)}-\left\{\frac{F''(a)}{F'(a)}.\frac{y^2}{1.2}+\frac{F'''(a)}{F'(a)}.\frac{y^3}{1.2.3}+\ldots\right\};$$

ainsi, l'erreur commise en prenant pour y la valeur donnée par la formule [13], est la somme de tous les termes compris entre les accolades dans l'équation précédente. Mais, comme la valeur cherchée de y est moindre que $\frac{1}{10}$, y^2, y^3,... sont respectivement moindres que $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$,..., et on conçoit alors que cette

somme peut être moindre que $\frac{1}{100}$, de sorte qu'en réduisant la fraction $-\frac{F(a)}{F'(a)}$ en décimales et appelant α la valeur ainsi trouvée à moins d'*un centième*, il pourra se faire que la quantité $(a+\alpha)$ exprime, à moins de $\frac{1}{100}$, la valeur de la racine cherchée.

Désignons, pour abréger, cette valeur par b, et appelons z ce qu'il faut ajouter à b pour avoir la racine dont il s'agit. z étant une quantité moindre que y, nous pourrons répéter sur elle les raisonnements précédents, ce qui nous conduira à

$$z=-\frac{F(b)}{F'(b)} \qquad [14],$$

et l'erreur sera

$$\left\{\frac{F''(b)}{F'(b)}\cdot\frac{z^2}{1.2}+\frac{F'''(b)}{F'(b)}\cdot\frac{z^3}{1.2.3}+\cdots\frac{z^m}{F'(b)}\right\}.$$

Or, comme z est plus petit que $\frac{1}{100}$, z^2, z^3,... seront respectivement moindres que $\frac{1}{100^2}=\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{100^3}=\frac{1}{1000000}$,..., de sorte que cette erreur pourra être moindre que $\frac{1}{10000}$. On réduira donc $-\frac{F(b)}{F'(b)}$ en décimales, en s'arrêtant au chiffre des dix-millièmes, et si on appelle β la valeur ainsi trouvée, il pourra se faire que la quantité $(b+\beta)$ exprime à moins d'*un dix-millième* la racine cherchée.

En continuant ainsi, on obtiendra des valeurs qui *pourront* être exactes à moins de $\left(\frac{1}{10000}\right)^2$, de $\left(\frac{1}{10000}\right)^4$,...; c'est-à-dire que chacune des valeurs successives que l'on obtiendra renfermera deux fois plus de décimales que la précédente.

Ainsi donc, on commencera par former la fraction

$$-\frac{F(x)}{F'(x)},$$

on y remplacera x par sa valeur a trouvée à moins de $\frac{1}{10}$, et on convertira ensuite la fraction résultante en décimales, en s'arrêtant au chiffre des centièmes. On ajoutera la *fraction décimale* ainsi trouvée à a, ce qui *pourra* donner une valeur b de la racine cherchée, exacte *à moins d'un centième*.

En opérant sur b comme on vient de le faire sur a, et en ayant soin de s'arrêter au quatrième chiffre décimal, en convertissant la fraction $-\frac{F(b)}{F'(b)}$ en décimales, on obtiendra une valeur c de la racine demandée, qui *pourra* être exacte *à moins d'un dix-millième*, et ainsi de suite.

Cette méthode qui est due à *Newton* est très-rapide, puisque chaque opération fournit deux fois plus de décimales que la précédente, mais elle peut être en défaut par deux causes; savoir :

1° Il pourra très-bien se faire que la quantité

$$\left\{\frac{F''(x)}{F'(x)}\cdot\frac{y^2}{1.2}+\frac{F'''(x)}{F'(x)}\cdot\frac{y^3}{1.2.3}+\ldots+\frac{y^m}{F'(x)}\right\}$$

ne soit pas moindre que $\left(\frac{1}{10}\right)^2$, ou que $\left(\frac{1}{100}\right)^2$, ou que $\left(\frac{1}{10000}\right)^2$,... dans la première, ou dans la deuxième, ou dans la troisième... approximation;

2° Et en fût-il ainsi, comme on ne prend que des valeurs approchées pour celles des fractions $-\frac{F(a)}{F'(a)}, -\frac{F(b)}{F'(b)}, -\frac{F(c)}{F'(c)}, \ldots$, il en résulte de nouvelles erreurs, de sorte que la méthode de *Newton* devra souvent ne pas donner le degré d'approximation qu'elle semble promettre.

Il convient donc, pour l'appliquer avec sécurité, de s'assurer à chaque opération si l'on peut compter sur le degré d'approximation qu'elle indique. Soit donc k une valeur que l'on est porté à croire exacte à moins de $\left(\frac{1}{10}\right)^n$; on substituera cette quantité k

dans $F(x)$, et en comparant le signe du résultat au signe de $F(h)$, h désignant la valeur qui précède k, on saura si la racine est plus grande ou plus petite que k. En effet, si $F(k)$ est de signe contraire à $F(h)$, c'est que la racine tombe entre h et k, de sorte que si h est $>$ ou $<$ que cette racine, k est au contraire $<$ ou $>$ qu'elle; et si $F(k)$ a le même signe que $F(h)$, la racine sera $>$ ou $< k$, selon qu'elle sera $>$ ou $< h$. Cela posé, si k est plus petit ou plus grand que la racine, on substituera $k+\frac{1}{10^n}$ ou $k-\frac{1}{10^n}$ dans $F(x)$, et si le résultat est de signe contraire à $F(k)$, on en conclura que l'on a la racine à moins de $\frac{1}{10^n}$, et qu'on ne l'a pas avec cette approximation, si $F\left(k+\frac{1}{10^n}\right)$ ou $F\left(k-\frac{1}{10^n}\right)$ a le même signe que $F(k)$. Dans cette dernière hypothèse, il faudra augmenter ou diminuer son dernier chiffre décimal successivement de 1, 2, 3,... unités, jusqu'à ce qu'on parvienne à un résultat qui soit de signe contraire à $F(k)$, et on saura alors avec quel degré d'approximation la valeur de k ainsi corrigée sera exacte. La longueur des opérations qu'exigent ces précautions fait préférer la méthode d'approximation de *Lagrange* (**727**) à celle de *Newton*.

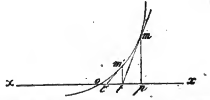
736. La méthode d'approximation de *Newton* peut se représenter très-simplement par une construction graphique. Posons en effet $y = F(x)$; les points où la courbe représentée par cette équation coupe l'axe des x, donnent les valeurs des racines réelles de l'équation $F(x)=0$. Si a désigne la valeur approchée d'une de ces racines, l'ordonnée du point de la courbe qui a a pour abscisse, sera $F(a)$, et l'équation de la tangente menée à la courbe en ce point sera :

$$y - F(a) = F'(a)(x-a);$$

cette tangente coupe l'axe des x en un point dont l'abscisse est

$$x = a - \frac{F(a)}{F'(a)},$$

c'est-à-dire égale à la valeur approchée fournie par la méthode de *Newton*. Cette méthode revient donc à la construction suivante :



connaissant une position approchée p du point o où une courbe coupe l'axe des x, on mène au point m de la courbe qui se projette en p une tangente mt, et l'on obtient ainsi un point t qui *en général* est beaucoup plus près de o que p ; mais on conçoit fort bien qu'il pourra dans certains cas ne pas en être ainsi, et alors la méthode sera en défaut. Si le point t est plus rapproché de o que p, on déterminera de même un second point t' encore plus rapproché, et ainsi de suite.

737. Nous allons donner quelques exemples de résolution d'équations.

Calculer à moins d'un dix-millième les racines de l'équation

$$F(x) = x^3 - 7x + 7 = 0.$$

On voit d'abord en appliquant à cette équation la règle du n° **550**, que ses trois racines sont réelles et qu'elle en a par conséquent deux positives (**536**) et une négative. En conséquence, je substitue dans son premier membre les nombres 0, 1, 2 ; car, $\sqrt{7}$ est la limite supérieure de ses racines positives.

$$\begin{array}{lll} x = 0 & \text{donne} & +7 \\ x = 1 & & +1 \\ x = 2 & & +1 \\ x = \sqrt{7} & & + \end{array}$$

Ainsi, ces deux racines ont la même partie entière. Je pose donc $x' = 10x$, ce qui donne

$$1000.\,F\left(\frac{x'}{10}\right) = x'^3 - 700x' + 7000 = 0,$$

de sorte qu'en faisant dans cette équation

$$x'=0,\quad x'=10,\quad x'=20,\quad x'=10\sqrt{7},$$

on trouvera respectivement

$$+7000,\quad +1000,\quad +1000,\quad + \quad .$$

Je remplace actuellement x' par les moyennes

$$5,\qquad 15,$$

entre 0 et 10, 10 et 20, et il vient

$$+3625\qquad -125.$$

Donc il y a une racine entre 10 et 15, et une autre entre 15 et 20. La moyenne entre 10 et 15 étant 13, je substitue ce nombre au lieu de x', ce qui donne $+97$, de sorte que notre racine tombe entre 13 et 15; je fais $x'=14$, et comme le résultat de cette substitution est -56, j'en conclus que la plus petite racine positive est comprise entre 13 et 14. On verra de même, en substituant successivement 17 et 16 au lieu de x', que la plus grande tombe entre 16 et 17.

Pour approcher davantage de la plus petite, je pose $x'=13+\frac{1}{y}$, et en effectuant le développement d'après la formule de *Taylor*, je trouve

$$97-\frac{193}{y}+\frac{39}{y^2}+\frac{1}{y^3}=0,$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$97y^3-193y^2+39y+1=0.$$

$$y=2 \text{ donne } \quad + \quad \text{donc } y=1+\frac{1}{z};$$

mais, avant d'aller plus loin, je remarque que la valeur de a étant demandée à moins de $\frac{1}{10000}$, celle de x' devra être calculée à moins de $\frac{1}{1000}$, puisque $x=\frac{x'}{10}$; or, la racine carrée de

1000 est <32. La première réduite de la valeur de x' est $\frac{13}{1}$, et la deuxième est $\frac{14}{1}$. En remplaçant y par $1+\frac{1}{z}$, on trouvera

$$56z^3+56z^2-98z-97=0.$$

$z=2$ donne $+$; donc $z=1+\frac{1}{u}$, et la troisième réduite est $\frac{27}{2}$. L'équation en u est

$$83u^3-182u^2-224u-56=0.$$

En considérant les deux premiers termes, on voit que $u>2$:

$u=3$ donne -125

$u=4$ $\quad +$;

donc $u=3+\frac{1}{v}$, et la quatrième réduite est $\frac{95}{7}$.

L'équation en v est

$$125v^3-925v^2-565v-85=0.$$

La considération des deux premiers termes montre que $v>7$.

$v=8$ donne $+$;

donc $v=7+\frac{1}{t}$, et la quatrième réduite est $\frac{692}{51}$.

Le dénominateur de cette réduite est plus grand que 32; ainsi elle donne certainement le degré d'approximation voulu. La règle du n° **402** donne $\frac{1}{2958}$ pour limite de l'erreur commise en prenant cette réduite pour valeur de x'. En la réduisant en décimales et reculant ensuite la virgule d'un rang vers la gauche, on trouvera $x=1,3568$, valeur exacte à moins d'un dix-millième.

On calculera semblablement les deux autres racines.

738. *Résoudre l'équation*

$$X=x^4-7x^3+12x^2-x-7=0.$$

La limite supérieure des racines positives est 7.

$x=0$ donne	-7
$x=1$	-2
$x=2$	-1
$x=3$	-10
$x=4$	-11
$x=5$	$+38$
$x=6$	$+203$
$x=7$	$+$

Il n'y a qu'un seul changement de signes ; ainsi les racines peuvent ne pas être séparées. Je forme les fonctions de M. *Sturm* :

$$X=x^4-7x^3+12x^2-x-7,\quad X_1=4x^3-21x^2+24x-1,$$
$$X_2=51x^2-156x+119,\qquad X_3=329x-527,\quad X_4=+2890.$$

$x=0$ donne $-\ -\ +\ -\ +$, 3 *variations ;*

$x=\infty$ $\quad +\ +\ +\ +\ +$, 0 *variat.*

Il y a trois racines réelles positives. Comme il en tombe une entre 4 et 5, nous allons voir si les deux autres sont entre 0 et 4, ou entre 5 et 7, ou si elles ne seraient pas toutes trois entre 4 et 5 :

$x=4$ donne $-\ +\ +\ +\ +$, 1 *variat.*

donc il y a deux racines entre 0 et 4. Je substitue la moyenne 2 de ces nombres :

$x=2$ donne $-\ -\ +\ +\ +$, 1 *variat.*

ainsi, elles se trouvent entre 0 et 2 ;

$x=1$ donne $-\ +\ +\ -\ +$, 3 *variat.*

donc, ces deux racines tombent entre 1 et 2. Je pose donc $x=1+\frac{1}{y}$,

et en développant, d'après la formule de *Taylor*, je trouve

$$Y = -2y^4 + 6y^3 - 3y^2 - 3y + 1, \quad Y_1 = 6y^3 - 6y^2 - 9y + 4,$$
$$Y_2 = 14y^2 - 54y + 51, \quad Y_3 = -198y + 329, \quad Y_4 = +2890,$$

$y=1$ donne	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$,	1 *variat.*
$y=10$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$,	3 *variat.*
$y=5$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$,	3 *variat.*
$y=3$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$,	3 *variat.*
$y=2$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$,	3 *variat.*

ainsi, les deux valeurs de y sont entre 1 et 2. Je fais donc $y = 1 + \frac{1}{z}$, et je trouve

$$Z = -z^4 + z^3 + 3z^2 - 2z - 2, \quad Z_1 = -5z^3 - 3z^2 + 12z + 6,$$
$$Z_2 = 11z^2 - 26z + 14, \quad Z_3 = 131z - 198, \quad Z_4 = +2890.$$

$z=1$ donne	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$,	3 *variat.*
$z=10$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$,	1 *variat.*
$z=5$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$,	1 *variat.*
$z=3$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$,	1 *variat.*
$z=2$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$,	1 *variat.*

Les deux valeurs de z sont comprises entre 1 et 2. Je pose donc $z = 1 + \frac{1}{u}$, et je trouve

$$U = -u^4 + 3u^3 - 3u - 1, \quad U_1 = 10u^3 - 9u^2 - 18u - 5,$$
$$U_2 = -u^2 - 4u + 11, \quad U_3 = -67u + 131, \quad U^4 = +2890.$$

$u=1$ donne	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$,	1 *variat.*
$u=10$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$,	3 *variat.*
$u=5$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$,	3 *variat.*
$u=3$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$,	3 *variat.*
$u=2$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$,	2 *variat.*

Il y a donc une valeur de u entre 1 et 2, et une autre entre 2 et 3.

Pour calculer la première plus approximativement, je pose $u=1+\frac{1}{v}$, et je substitue dans l'équation $U=0$, ce qui donne

$$V=2v^4-2v^3-3v^2+v+1=0.$$

$$v=2 \text{ donne } +, \quad \text{donc } v=1+\frac{1}{t}.$$

Examinons si la fraction continue

$$x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}}$$

qui est le développement de la racine que nous poursuivons, ne serait pas périodique. Si elle jouit de cette propriété, elle sera une des racines de l'équation $x=1+\frac{1}{x}$, ou $x^2-x-1=0$. J'effectue donc la division de $x^4-7x^3+12x^2-x-7$ par x^2-x-1 (728), et je trouve que le quotient de cette division est x^2-6x+7 et que le reste est nul. Donc, on obtiendra les racines demandées en résolvant les deux équations $x^2-x-1=0$ et $x^2-6x+7=0$.

739. *Calculer la racine positive de l'équation*

$$D^5-0{,}004797D^2-0{,}000826D-0{,}0111=0^* \quad [15].$$

On tire de cette équation :

$$D^5=0{,}0111+0{,}000826D+0{,}004797D^2 \qquad [16].$$

---

* L'équation par laquelle on détermine le diamètre intérieur d'une conduite d'eau cylindrique est la suivante :

$$D^5-0{,}000\,095\,94\,\frac{LQ}{H}\,D^2-0{,}0826\,\frac{Q^2}{H}\,D-0{,}002\,22\,\frac{LQ^2}{H}=0,$$

L étant la longueur du tuyau, Q la dépense d'eau en une seconde, et H la hauteur de la colonne d'eau représentant la pression à l'orifice de sortie. Si l'on suppose $L=500^m$, $Q=0^{mc},1$, et $H=1^m$, on trouve l'équation proposée [15].

D étant évidemment plus petit que 1, on voit que les deux derniers termes du second membre sont très-petits par rapport au premier; si donc on les néglige, on aura, comme première approximation,

$$D'^5 = 0{,}0111, \quad \text{d'où} \quad D' = \sqrt[5]{0{,}0111} = 0^m{,}40650.$$

Cette valeur est trop faible. Si on la substitue dans le second membre de l'équation [16], il viendra :

$$D''^5 = 0{,}012228, \quad \text{d'où} \quad D'' = \sqrt[5]{0{,}012228} = 0^m{,}41445,$$

valeur encore trop faible, mais plus approchée que la précédente. Cette nouvelle valeur étant à son tour substituée dans le second membre de l'équation [16], il en résultera :

$$D'''^5 = 0{,}012266, \quad \text{d'où} \quad D''' = \sqrt[5]{0{,}012266} = 0{,}41470.$$

On arrivera de même à l'équation

$$D^{iv5} = 0{,}012267, \quad \text{d'où} \quad D^{iv} = \sqrt[5]{0{,}012267} = 0{,}41471.$$

Voici d'ailleurs le détail des calculs :

$$\log 0{,}0111 = \bar{2}{,}0453230$$

$$\log \sqrt[5]{0{,}0111} = \bar{1}{,}6090646; \quad D' = 0{,}40650$$

$$\left.\begin{array}{lll}
\log D' & = \bar{1}{,}6090646 & \qquad\qquad 0{,}0111 \\
\log 0{,}000826 & = \underline{\bar{4}{,}9169800} & \\
\log [0{,}000826 D'] & = \bar{4}{,}5260446 & 0{,}000826 D' = 0{,}0003350 \\
\log D'^2 & = \bar{1}{,}2181292 & \\
\log 0{,}004797 & = \underline{\bar{3}{,}6809697} & \\
\log [0{,}004797 D'^2] & = \bar{4}{,}8990989 & 0{,}004797 D'^2 = \underline{0{,}0007926} \\
 & & \qquad\quad D''^5 = 0{,}0122276
\end{array}\right\}$$

$$\log 0{,}012228 = \bar{2}{,}0873554$$

$$\log \sqrt[5]{0{,}012228} = \bar{1}{,}6174711 \quad D'' = 0^m{,}41445$$

Observant que $\log D'' = \log D' + 0{,}0084065$, et que par suite

$$\log D''^2 = \log D'^2 + 0{,}0168130,$$

on aura, pour le calcul de la substitution de D″ dans le second membre de l'équation [16] *:

$$\left.\begin{array}{ll} & 0{,}0111 \\ \log[0{,}000826D''] = \bar{4}{,}5344511 & 0{,}000826D'' = 0{,}0003423 \\ \log[0{,}004797D''^2] = \bar{4}{,}9159119 & 0{,}004797D''^2 = \underline{0{,}0008239} \end{array}\right\}$$

$$D'''^5 = 0{,}0122662$$

$$\log 0{,}012266 = \bar{2}{,}0887030$$

$$\log \sqrt[5]{0{,}012266} = \bar{1}{,}6177406 \quad D''' = 0^m{,}41470$$

$$\log D''' = \log D'' + 0{,}0002695$$

$$\log D'''^2 = \log D''^2 + 0{,}0005390$$

$$\left.\begin{array}{ll} & 0{,}0111 \\ \log[0{,}000826D'''] = \bar{4}{,}5347206 & 0{,}000826D''' = 0{,}0003425 \\ \log[0{,}004797D'''^2] = \bar{4}{,}9164509 & 0{,}004797D'''^2 = \underline{0{,}0008249} \end{array}\right\}$$

$$D^{\text{IV}} = 0{,}0122674$$

$$\log 0{,}012267 = \bar{2}{,}0887384$$

$$\log \sqrt[5]{0{,}012267} = 1{,}6177476 \quad D^{\text{IV}} = 0{,}41471.$$

Cette valeur, qui diffère peu de la précédente, est encore trop faible; mais si l'on essaye la valeur $D_1 = 0{,}41480$, on trouvera que celle-ci est trop grande. En effet, on a d'une part, en substituant dans l'équation [15]:

$$\log D_1 = \bar{1}{,}6178387$$

$$\log D_1^5 = \bar{2}{,}0891935 \quad D_1^5 = 0{,}012279,$$

d'autre part:

$$\left.\begin{array}{ll} & 0{,}0111 \\ \log[0{,}000826D_1] = \bar{4}{,}5348187 & 0{,}000826D_1 = 0{,}0003426 \\ \log[0{,}004797D_1^2] = \bar{4}{,}9166471 & 0{,}004797D_1^2 = \underline{0{,}0008253} \end{array}\right\}$$

$$0{,}0111 + 0{,}000826D_1 + 0{,}004797D_1^2 = 0{,}0122679.$$

Ainsi la valeur 0,41480 rend positif le premier membre de l'équation proposée, et est par conséquent plus grande que D;

* $\log[0{,}000826\,D''] = \log[0{,}000826\,D'] + 0{,}0084065,$

et $\log[0{,}004797\,D''^2] = \log[0{,}004797\,D'^2] + 0{,}0168130.$

d'une autre part, la valeur 0,41471 est trop petite ; la valeur de D est donc déterminée à moins de 0,0001, approximation suffisante dans une pareille question.

Nous avons cru devoir donner cet exemple de la *méthode des approximations successives*, que l'on trouve assez souvent occasion d'employer avec avantage.

§ V. CALCUL DES RACINES IMAGINAIRES.

740. Les racines réelles de l'équation $F(x)=0$ étant déterminées aussi exactement qu'on le voudra, à l'aide des méthodes que nous venons de développer, il ne s'agira plus que de calculer ses racines imaginaires, si elle en renferme. Ces racines étant de la forme

$$y+z\sqrt{-1},$$

il faut trouver tous les couples de valeurs réelles de y et de z qui rendront cette fonction racine de la proposée. Pour y parvenir, on pourra substituer $y+z\sqrt{-1}$ à la place de x dans le premier membre de cette équation, et en mettant $\sqrt{-1}$ en facteur commun des termes où il entrera, on obtiendra une équation de la forme

$$A+B\sqrt{-1}=0,$$

qui se partagera dans les deux suivantes

$$A=0 \quad \text{et} \quad B=0.$$

On résoudra donc ces deux équations, mais en se bornant à calculer seulement les couples de valeurs réelles de y et de z qu'elles admettent; puis, en substituant successivement chacun de ces couples dans la formule $y+z\sqrt{-1}$, on obtiendra toutes les racines imaginaires de l'équation proposée $F(x)=0$.

741. Ces calculs seront en général fort longs, puisque, pour les effectuer, il faudra éliminer l'une des inconnues y et z entre les équations

$$A=0 \quad \text{et} \quad B=0.$$

Mais, si on a fait usage de l'équation aux carrés des différences, pour effectuer la séparation des racines réelles de l'équation $F(x)=0$, on en profitera pour obtenir les racines imaginaires de cette équation plus rapidement que par la méthode que nous venons d'indiquer.

Désignons, en effet, par $a, b, \ldots$ les racines réelles de $F(x)=0$, et par $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, $\alpha'\pm\beta'\sqrt{-1}, \ldots$ ses différents couples de racines imaginaires : les racines de l'équation aux carrés des différences de ses racines seront nécessairement de l'une des quatre formes suivantes :

$(a-b)^2$, carré de la différence entre deux racines réelles,

$(a-\alpha\mp\beta\sqrt{-1})^2$, carré de la différence entre une racine réelle et une racine imaginaire ;

$\{(\alpha-\alpha')\pm(\beta-\beta')\sqrt{-1}\}^2$, carré de la différence entre deux racines imaginaires non conjuguées ;

$(2\beta\sqrt{-1})^2$, carré de la différence entre deux racines imaginaires conjuguées.

Les racines de la première espèce sont toujours positives, et celles de la quatrième toujours négatives. Quant aux racines de la deuxième et de la troisième espèce, elles sont généralement imaginaires ; cependant, si l'on avait $a=\alpha$ ou $\alpha=\alpha'$, elles seraient réelles et négatives, mais chacune d'elles entrerait *deux fois* dans l'équation aux carrés des différences.

En conséquence, on formera une équation qui n'ait pour racines que les racines simples de l'équation aux carrés des différences (606), puis on calculera ses racines négatives $-a'$, $-b'$, $-c'$,... et chacune d'elles sera le carré de la différence entre les deux racines imaginaires d'un même couple, de sorte qu'on aura

$$-a'=-4\beta^2, \quad -b'=-4\beta'^2, \ldots,$$

et par suite

$$\beta=\frac{1}{2}\sqrt{a'}, \quad \beta'=\frac{1}{2}\sqrt{b'}, \ldots$$

En substituant la valeur de β à la place de z dans les deux équations

$$A=0 \quad \text{et} \quad B=0,$$

on trouvera deux équations qui devront avoir la racine commune α, de sorte que, pour l'obtenir, il n'y aura qu'à égaler à zéro le plus grand commun diviseur de leurs premiers membres, et, de cette manière, on aura les deux racines conjuguées $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$.

§ VI. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES.

742. Nous n'avons considéré jusqu'à présent que des *équations algébriques* dans lesquelles l'inconnue n'entrait ni comme exposant, ni sous aucun des signes *log*, *sin*, etc. Nous allons maintenant dire quelques mots de la résolution des *équations transcendantes*.

743. La méthode sur laquelle est fondée la résolution d'une équation algébrique repose essentiellement sur ce que le premier membre est une fonction continue de la variable; en effet, lorsque cette condition est remplie, on est assuré que si deux nombres, substitués dans le premier membre de l'équation, donnent des résultats de signes contraires, ces deux nombres comprennent nécessairement une racine; et par conséquent on peut toujours arriver à séparer les racines et à les resserrer entre des limites aussi rapprochées qu'on le voudra, au moyen de substitutions convenablement faites. Il suffira donc que le premier membre de l'équation transcendante $F(x)=0$ soit une fonction continue de x, pour que l'on puisse appliquer à sa résolution tout ce que nous avons dit de la résolution des équations algébriques par la méthode des substitutions.

744. Ces substitutions seront évidemment beaucoup moins simples à effectuer que lorsqu'il s'agissait d'un polynome algébrique. Lorsqu'on aura calculé directement un certain nombre de résultats provenant de la substitution de nombres équi

tants, on formera leurs différences; et, en considérant comme sensiblement égales celles d'un certain ordre, et négligeant celles des ordres suivants, on achèvera le tableau des valeurs du premier membre de l'équation, comme s'il s'agissait d'une fonction entière et rationnelle (652).

Après avoir séparé les racines et les avoir placées entre deux nombres suffisamment rapprochés, on les calculera avec une plus grande approximation, au moyen de la méthode de *Newton*. Cette méthode s'appuie, il est vrai, sur la formule de *Taylor*, et nous ne l'avons établie que pour une fonction entière et rationnelle; mais on démontre qu'elle peut s'appliquer à une fonction quelconque. On conçoit, d'ailleurs, que si on appelle a une valeur très-approchée d'une racine x de l'équation $F(x)=0$, et que l'on représente cette racine par $x=a+y$, y étant une très-petite quantité, l'expression $\frac{F(a+y)-F(a)}{y}$ pourra différer très-peu de $F'(a)$ (472); on pourra donc poser $\frac{F(a+y)-F(a)}{y}=F'(a)$, d'où l'on conclut, en observant que $F(a+y)=0$, $y=-\frac{F(a)}{F'(a)}$.

745. *Résoudre l'équation* $F(x)=x^2-10\log x-10=0$.

Si l'on substitue, à la place de x, une quantité très-peu différente de 0, le terme x^2 sera extrêmement petit. Quant au terme $\log x$, il se composera d'une partie négative d'autant plus considérable que x sera une plus petite fraction, et d'une partie positive nécessairement moindre que l'unité. Par conséquent, le terme $-10\log x$ sera susceptible de prendre une valeur positive assez grande pour que le premier membre de l'équation soit lui-même positif.

Si l'on fait $x=1$, le résultat -9 est négatif.

Si l'on substitue $x=10$, le résultat est évidemment positif, et il est évident qu'en donnant à x des valeurs croissantes, le premier membre sera toujours positif et ira même en augmentant sans limite.

Ainsi l'équation a deux racines, l'une comprise entre 0 et 1,

l'autre entre 1 et 10. Pour en approcher davantage, nous substituerons les moyennes

$$+0{,}5 \quad \text{et} \quad +5,$$

qui donnent respectivement pour résultats :

$$-12{,}7603, \quad +21{,}9897.$$

Ainsi la première racine est comprise entre 0 et 0,5, et la seconde entre 1 et 5. En continuant ainsi, on trouvera que la première racine tombe entre 0,1 et 0,2, et la seconde entre 4 et 4,1.

Si on veut calculer cette seconde racine, par exemple, avec une plus grande approximation, au moyen de la méthode de *Newton*, on formera la dérivée du premier membre de l'équation, et l'on trouvera (**492** et **496**) :

$$F'(x) = 2x - 10\frac{\log e}{x}.$$

On formera la fraction

$$-\frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{x^2 - 10\log x - 10}{2x - 10\frac{\log e}{x}};$$

on y remplacera x par la première valeur approchée 4, et il viendra :

$$-\frac{F(4)}{F'(4)} = -\frac{-0{,}020600}{6{,}914265} = 0{,}0029.$$

On aura donc 4,0029 pour seconde valeur approchée de la racine. Pour la vérifier, nous substituerons 4,0029 dans le premier membre de l'équation ; le résultat est $-0{,}000539$; donc cette valeur est un peu trop petite. Mais si l'on substitue 4,0030, on trouve $+0{,}000153$. Cette dernière valeur est donc un peu trop grande, et par conséquent la racine cherchée est connue à moins d'un dix-millième.

CHAPITRE XXIII.

THÉORIE DES ÉQUATIONS-BINOMES.

§ I. RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS-BINOMES.

746. *On appelle* ÉQUATION-BINOME *celle qui ne renferme qu'une seule puissance de l'inconnue, et des quantités connues.* Il est clair que l'on peut toujours ramener une pareille équation à la forme

$$x^m \mp A = 0 \qquad [1].$$

Or, il résulte du nº 523 que, pour obtenir toutes les racines de cette équation, il faudra multiplier la détermination arithmétique de la racine m^{me} de A, successivement par chacune des racines de l'équation

$$y^m \mp 1 = 0 \qquad [2],$$

c'est-à-dire par chacune des m racines m^{mes} de $+1$ ou de -1. Il s'agit ainsi de résoudre cette équation [2]. Nous considérerons d'abord l'équation

$$y^m - 1 = 0 \qquad [3].$$

747. Lemme. *Quelles relations doit-il exister entre* m *et* n *pour que les équations* $y^m - 1 = 0$ *et* $y^n - 1 = 0$ *aient plusieurs racines communes?*

Si ces deux équations ont plusieurs racines communes, leurs premiers membres doivent avoir un plus grand commun diviseur d'un degré supérieur au premier; en conséquence, nous allons chercher ce plus grand commun diviseur. Or, on voit facilement qu'en effectuant la division de $y^m - 1$ par $y^n - 1$, le degré de chaque reste sera inférieur de n unités à celui du précédent, de sorte que si $m = nq + r$, le reste de cette première division sera $y^r - 1$. De même, si $n = rq_1 + r_1$, le reste de la division de $y^n - 1$ par $y^r - 1$, sera $y^{r_1} - 1$, et ainsi de suite; par

conséquent, si r_1 est le plus grand commun diviseur de m et de n, le dernier diviseur sera $y^{r_1}-1$, et le reste correspondant sera $y^0-1=0$. Dans ce cas, les deux équations auront r_1 racines communes. Mais si m et n sont deux nombres premiers entre eux, le dernier diviseur sera $y-1$, et par conséquent les deux équations n'auront pas d'autre racine commune que l'unité.

748. THÉORÈME. *L'équation* $y^m-1=0$ *a* m *racines qui jouissent de cette propriété remarquable, que si* m *est* UN NOMBRE PREMIER, *on reproduira toutes ces racines en élevant une quelconque d'entre elles, pourvu que ce ne soit pas l'unité, à toutes les puissances* 1, 2, 3, 4, ... m.

Soit α une quelconque des racines imaginaires de l'équation $y^m-1=0$ * : on voit d'abord que *toutes* les puissances de α seront des racines ; car $(\alpha^k)^m=(\alpha^m)^k=1$. Je dis ensuite que celles de ces puissances dont les exposants ne surpassent pas m sont inégales, qu'ainsi α^p n'est pas égal à α^q, si p et q sont deux nombres entiers plus petits que $m+1$. Supposons, en effet, que l'on puisse avoir $\alpha^p=\alpha^q$; il en résultera $\alpha^{p-q}-1=0$, de sorte que les équations $y^m-1=0$ et $y^{p-q}-1=0$ ont la racine commune α, ce qui est impossible, puisque m étant supposé un nombre premier, ces deux équations ne peuvent pas avoir d'autre racine commune que l'unité (**747**), et nous avons supposé que α était une expression imaginaire. Donc, toutes les quantités $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \ldots \alpha^m$ sont différentes ; et comme chacune est racine de $y^m-1=0$, ce sont là toutes les racines de cette équation. Toutes ces racines sont donc inégales, et, en effet, y^m-1 est évidemment premier avec sa dérivée my^{m-1} (**602**).

On pourrait conclure de là, si déjà on ne le savait pas (**518**),

---

* Cette équation ne peut pas avoir d'autre racine réelle que +1 ; car, d'abord la m^{me} puissance d'une quantité positive plus grande ou plus petite que l'unité est elle-même aussi plus grande ou plus petite que l'unité ; et ensuite, m étant un nombre impair, puisqu'il est premier, l'équation [3] ne peut pas avoir de racine réelle négative.

que l'équation [3] n'a pas plus de m racines; car, si on élève α à la puissance $mi+h$, i étant un nombre entier quelconque et h un nombre positif moindre que m *, on aura

$$\alpha^{mi+h}=\alpha^{mi}.\alpha^{h}=\alpha^{h},$$

valeur trouvée.

749. Ce théorème établi, occupons-nous de la résolution de l'équation $y^m-1=0$, et supposons d'abord que m soit un nombre premier. Cette équation étant réciproque, sa résolution se ramènera à celle d'une équation du degré $\frac{m-1}{2}$, laquelle jouira de cette propriété remarquable que toutes ses racines seront réelles. En effet, on obtiendra cette équation en éliminant y entre

$$y^{m-1}+y^{m-2}+y^{m-3}+\ldots+y^2+y+1=0$$

et

$$y+\frac{1}{y}=z.$$

Mais, si l'on désigne par $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ une valeur de y, on aura

$$z=\alpha+\beta\sqrt{-1}+\frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=\alpha+\beta\sqrt{-1}+\frac{\alpha-\beta\sqrt{-1}}{\alpha^2+\beta^2},$$

et comme $(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})$ vérifie $y^m-1=0$, on a

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^m.(\alpha-\beta\sqrt{-1})^m=1,\quad \text{ou}\quad (\alpha^2+\beta^2)^m=1;$$

or, $(\alpha^2+\beta^2)$ est une quantité réelle et positive, donc elle est égale à $+1$; donc $z=\alpha+\beta\sqrt{-1}+\alpha-\beta\sqrt{+1}=2\alpha$.

Il suit de là que l'on pourra séparer les racines de l'équation en z sans avoir recours, soit au théorème de M. *Sturm*, soit à l'équation aux carrés des différences de ses racines (725).

D'un autre côté, il suffira de calculer une seule des racines

* Il est facile de voir que cette formule $mi+h$ représente un nombre entier quelconque. D'abord la chose est évidente, si ce nombre est positif, et, s'il est négatif, il est de la forme

$$-mi-k=-mi-k+m-m=-(i+1)m+(m-k).$$

de l'équation en z; car, en substituant cette racine dans l'équation $y+\frac{1}{y}=z$, on obtiendra deux valeurs de y, et en élevant l'une d'elles à toutes les puissances depuis la première jusqu'à la m^{me} inclusivement, on trouvera toutes les racines de la proposée. Toutefois ces calculs seront encore fort pénibles, si le degré de l'équation proposée est un peu élevé. Or, on peut, à l'aide des *tables trigonométriques*, effectuer très-simplement la résolution de l'équation $y^m \mp 1=0$, quelle que soit la valeur entière et positive que l'on attribue à m, ainsi que nous le verrons bientôt.

750. Considérons maintenant le cas où l'exposant du degré de l'équation n'est plus un nombre premier, et soit l'équation

$$y^{mn}-1=0 \qquad [4],$$

dans laquelle m *et* n *sont deux nombres premiers entre eux*. On voit d'abord que les racines des deux équations

$$y^m-1=0 \quad \text{et} \quad y^n-1=0$$

appartiennent à l'équation [4]; car, si α, par exemple, est une racine de $y^m-1=0$, on aura $\alpha^{mn}=(\alpha^m)^n=1$.

Cela posé, je dis que si l'on multiplie les racines de l'équation $y^m-1=0$ successivement par celles de $y^n-1=0$, on obtiendra toutes les racines de l'équation [4]. En effet, soient α une racine de la première et β une racine de la deuxième, on aura $\alpha^m=1$, $\beta^n=1$, et partant $(\alpha\beta)^{mn}=(\alpha^m)^n.(\beta^n)^m=1$; donc $\alpha\beta$ est racine de l'équation [4]. Désignons maintenant par α' et par β' deux autres racines quelconques des équations respectives $y^m-1=0$ et $y^n-1=0$: $\alpha'\beta'$ sera encore une racine de l'équation [4], et je dis que $\alpha'\beta'$ n'est pas égal à $\alpha\beta$. Car, si cela était, on aurait $\alpha^n\beta^n=\alpha'^n\beta'^n$; mais $\beta^n=1$ et $\beta'^n=1$; donc $\alpha^n=\alpha'^n$, d'où $\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^n=1$; mais on a aussi $\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^m=1$, donc $\frac{\alpha}{\alpha'}$, quantité différente de l'unité, serait une racine commune à $y^m-1=0$ et à $y^n-1=0$, ce qui est con-

traire (**747**) à l'hypothèse que m et n sont deux nombres premiers entre eux.

Donc, tous les produits qu'on obtiendra en multipliant les racines de $y^m - 1 = 0$ successivement par celles de $y^n - 1 = 0$ sont différents, et comme ils sont au nombre de mn, ce sont toutes les racines de l'équation [4].

Remarquons qu'en élevant une quelconque des racines de $y^m - 1 = 0$, ou de $y^n - 1 = 0$ à toutes les puissances $1, 2, 3, \ldots mn$, on ne reproduira pas toutes les racines de l'équation [4]; en effet, chaque puissance d'une racine α de la première, par exemple, sera répétée n fois, car $\alpha^{m+1} = \alpha^m . \alpha = \alpha$, $\alpha^{m+2} = \alpha^2, \ldots,$ $\alpha^{2m+1} = \alpha$, $\alpha^{2m+2} = \alpha^2$, etc., et l'équation $y^{mn} - 1 = 0$ n'a pas de racines égales.

On démontrerait de même que si m, n, p, sont trois nombres premiers entre eux deux à deux, on obtiendra toutes les racines de l'équation

$$y^{mnp} - 1 = 0,$$

en multipliant les racines de $y^m - 1 = 0$ par celles de $y^n - 1 = 0$, et les produits ainsi trouvés successivement par les racines de $y^p - 1 = 0$, et ainsi de suite.

751. Soit maintenant m un nombre quelconque; décomposons-le en ses facteurs premiers, et supposons que

$$m = r^\rho s^\sigma t^\tau,$$

r, s, t étant des nombres premiers. La résolution de l'équation

$$y^m - 1 = 0$$

sera, d'après ce qui précède, ramenée à celles des équations

$$y^{r^\rho} - 1 = 0, \quad y^{s^\sigma} - 1 = 0, \quad y^{t^\tau} - 1 = 0;$$

et quand on les aura résolues, on obtiendra toutes les racines de la proposée, en multipliant les racines de la première par celles de la deuxième, et les produits ainsi obtenus par celles de la troisième.

Considérons donc l'équation

$$y^{r^\rho}-1=0 \qquad [5].$$

Je pose $y^{r^{\rho-1}}=z$, ce qui donne en substituant dans [5],

$$z^r-1=0.$$

D'un autre côté, si l'on représente par α une quelconque des racines de cette dernière équation, par β_1 la détermination arithmétique de $\sqrt[r^{\rho-1}]{\alpha}$, et que l'on pose $y=\beta_1 y_1$, on obtiendra toutes les valeurs de y, en multipliant les r valeurs dont β_1 est susceptible, successivement par les racines de l'équation

$$y_1^{r^{\rho-1}}-1=0 \qquad [6]$$

(**746**); de sorte que la résolution de l'équation [5] se trouve ainsi réduite à celle de l'équation [6], dans laquelle l'exposant de r est inférieur d'une unité à celui que r a dans l'équation [5]. Par conséquent, en continuant de cette manière, on sera ramené à résoudre l'équation

$$y^r_{\rho-1}-1=0,$$

qui n'est autre que $z^r-1=0$.

Ainsi, la résolution de l'équation $y^{r^\rho}-1=0$, et par suite celle de l'équation proposée $y^m-1=0$, se trouve ramenée à celle de l'équation $y^r-1=0$ dans laquelle r est un nombre premier, et nous avons traité cette question plus haut (**749**).

752. Exemple I. Soit $y^{r^2}-1=0$. On posera $y^r=z$, et on aura $z^r-1=0$. Appelons α une quelconque des racines de cette équation et représentons par β_1 la détermination arithmétique de $\sqrt[r]{\alpha}$; on fera $y=\beta_1 y_1$, ce qui donnera $y_1^r-1=0$: donc

$$y=\alpha\beta_1.$$

Ainsi, en remplaçant dans cette formule α par ses r valeurs et β_1 par les siennes, on obtiendra toutes les racines de l'équation proposée $y^{r^2}-1=0$.

II. Soit $y^{r^3}-1=0$. Je pose $y^{r^2}=z$, ce qui donne $z^r-1=0$; ainsi, en représentant par β_2 la détermination arithmétique de $\sqrt[r^2]{\alpha}$, et faisant $y=\beta_2 y_2$, on aura $y_2^{r^2}-1=0$. Mais, d'après

ce qui précède, $y_2 = \alpha\beta_1$; donc

$$y = \alpha\beta_1\beta_2,$$

de sorte qu'en remplaçant dans cette formule α par ses r valeurs et β_1 et β_2 par les leurs, on obtiendra toutes les racines de $y^{r^3} - 1 = 0$.

Si l'on avait l'équation $y^8 - 1 = 0$ ou $y^{2^3} - 1 = 0$, les valeurs de α seraient

$$+1 \quad \text{et} \quad -1$$

celles de β_1, $\sqrt{+1} = 1$, et $\sqrt{-1}$,

celles de β_2, $\sqrt[2^2]{+1} = 1$, et $\sqrt[2^2]{-1} = \sqrt{\sqrt{-1}} = \dfrac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ (285);

d'où il suit que

$$y = +1, \quad = \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \quad = +\sqrt{-1}, \quad = \frac{\sqrt{-1}-1}{\sqrt{2}},$$

$$= -1, \quad = -\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \quad = -\sqrt{-1}, \quad = \frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

On arrive plus rapidement à ces valeurs en remarquant que
$y^8 - 1 = (y^4-1)(y^4+1) = (y^2-1)(y^2+1)\left(y^2+\sqrt{-1}\right)\left(y^2-\sqrt{-1}\right)$,
de sorte que la résolution de l'équation $y^8 - 1 = 0$ se décompose dans celle des équations

$$y^2 - 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad y = \pm 1;$$

$$y^2 + 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad y = \pm\sqrt{-1};$$

$$y^2 + \sqrt{-1} = 0, \quad \text{d'où} \quad y = \pm\sqrt{-\sqrt{-1}} = \pm\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}};$$

$$y^2 - \sqrt{-1} = 0, \quad \text{d'où} \quad y = \pm\sqrt{+\sqrt{-1}} = \pm\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

753. Occupons-nous maintenant de l'équation

$$y^m + 1 = 0.$$

Si m est un nombre impair, on n'aura qu'à y changer y en $-y$, et la résolution de cette équation se trouvera ramenée à celle de

$$y^m - 1 = 0.$$

Si m est un nombre pair, on en extraira tous les facteurs 2

qu'il peut contenir, et on le mettra ainsi sous la forme $m=2^n.p$. Alors en posant

$$y^{2^n}=z, \quad \text{il viendra} \quad z^p+1=0,$$

équation que nous savons résoudre, puisque p est un nombre impair. z étant ainsi connu, on n'aura plus qu'à résoudre l'équation

$$y^{2^n}-z=0,$$

ce que nous savons faire.

Soit, par exemple, l'équation

$$y^{12}+1=0 \text{ ou } y^{2^2.3}+1=0:$$

on ramènera sa résolution à celle des deux équations

$$y^{2^2}-z=0, \quad z^3+1=0.$$

On tirera de la deuxième

$$z=-1, \quad =\frac{1-\sqrt{-3}}{2}, \quad =\frac{1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Désignons par β_1 la détermination arithmétique de $\sqrt[2^2]{z}$, on fera $y=\beta_1 y_1$, et on transformera ainsi l'équation $y^{2^2}-z=0$ dans la suivante

$$y_1^{2^2}-1=0,$$

dont les racines sont

$$+1, \quad +\sqrt{-1}, \quad -1, \quad -\sqrt{-1}.$$

Or, on trouvera facilement, en se rapportant aux formules [24 et 25] du n° **260** que les valeurs de β_1 sont

$$\beta_1=\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \quad =\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{-1}}{2},$$
$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}.\sqrt{-1}}{2};$$

de sorte qu'en multipliant successivement chacune de ces trois

dernières quantités par $+1$, $+\sqrt{-1}$, -1 et $-\sqrt{-1}$, on obtiendra les douze racines de l'équation proposée.

§ II. CALCUL DES RADICAUX ALGÉBRIQUES.

754. Nous avons donné précédemment les règles que l'on doit suivre dans le calcul des quantités radicales, mais en supposant que ces quantités étaient réelles et en nous bornant à leurs déterminations arithmétiques : maintenant nous allons considérer les quantités radicales dans toute leur généralité (**523**), et nous verrons que les règles que nous avons établies aux n°s **302**, **305**,... **309** sont encore applicables au cas actuel.

755. 1er Cas. Nous supposons d'abord que les quantités soumises aux radicaux soient positives

1° Soit à *multiplier* $\sqrt[m]{a}$ *par* $\sqrt[m]{b}$; je dis que $\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$. Appelons, en effet, α, β et γ les déterminations arithmétiques des racines m^{mes} de a, de b et de ab; on aura $\sqrt[m]{a} = \alpha\sqrt[m]{1}$; $\sqrt[m]{b} = \beta\sqrt[m]{1}$ et $\sqrt[m]{ab} = \gamma\sqrt[m]{1}$; puis donc que (**302**) $\alpha\beta = \gamma$, il s'agit de prouver que

$$\sqrt[m]{1}.\sqrt[m]{1} = \sqrt[m]{1}.$$

Or, si l'on élève le produit de $\sqrt[m]{1}$ par $\sqrt[m]{1}$ à la puissance m, on trouvera 1; donc chaque valeur de ce produit est une racine m^{me} de l'unité; d'ailleurs ce produit n'a pas moins de m valeurs différentes, puisque chacun de ses facteurs a m valeurs distinctes; donc toutes ces valeurs sont les m racines m^{mes} de l'unité; donc $\sqrt[m]{1}.\sqrt[m]{1} = \sqrt[m]{1}$.

2° On démontrerait de la même manière que $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$.

3° Il serait naturel de passer actuellement à la formation des puissances des quantités radicales, pour traiter ensuite de l'extraction de leurs racines, mais il sera préférable de suivre l'ordre inverse.

Soit donc à *extraire la racine* n^{me} *de* $\sqrt[m]{a}$: je dis qu'on aura $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, ce qui revient à prouver que $\sqrt[n]{\sqrt[m]{1}} = \sqrt[mn]{1}$. Pour y

parvenir, désignons par x la valeur générale de $\sqrt[n]{\sqrt[m]{1}}$: il suit de la définition de la racine n^{me} que $x^n=\sqrt[m]{1}$, et que $x^{mn}=1$; donc toutes les valeurs de x sont celles même de $\sqrt[mn]{1}$; donc

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{1}}=\sqrt[mn]{1}.$$

4° *Elever* $\sqrt[m]{a}$ *à la puissance* n, n et m étant deux nombres premiers entre eux; je dis qu'on aura $(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{a^n}$, ce qui revient à prouver que $(\sqrt[m]{1})^n=\sqrt[m]{1}$. Soient, en effet, α, β, γ,... les m racines m^{mes} de l'unité : toutes les valeurs de $(\sqrt[m]{1})^n$ seront α^n, β^n, γ^n,..., quantités qui sont toutes des valeurs de $\sqrt[m]{1}$, puisque $(\alpha^n)^m=(\alpha^m)^n=1$. Ces valeurs sont toutes différentes; car, si l'on avait $\alpha^n=\beta^n$, on aurait $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n=1$, et comme $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^m=\frac{\alpha^m}{\beta^m}=1$, il s'ensuivrait que $\frac{\alpha}{\beta}$, quantité différente de l'unité, serait une racine commune aux équations $x^m-1=0$ et $x^n-1=0$, ce qui est impossible, puisque m et n étant premiers entre eux, ces deux équations n'ont pas d'autre racine commune que l'unité. $(\sqrt[m]{1})^n$ a donc m valeurs qui sont par conséquent toutes celles de $\sqrt[m]{1}$; donc $(\sqrt[m]{1})^n=\sqrt[m]{1}$.

5° Je dis que $(\sqrt[mn]{a})^{np}=\sqrt[m]{a^p}$, ou, ce qui revient au même, que $(\sqrt[mn]{1})^{np}=\sqrt[m]{1}$. En effet, $(\sqrt[mn]{1})^{np}=\left\{\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{1}}\right)^n\right\}^p=(\sqrt[m]{1})^p=\sqrt[m]{1}$.

6° Soit à *multiplier* $\sqrt[m]{a}$ *par* $\sqrt[n]{b}$, m et n étant premiers entre eux : je dis qu'on aura $\sqrt[m]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[mn]{a^n b^m}$, ce qui revient à prouver que $\sqrt[m]{1}.\sqrt[n]{1}=\sqrt[mn]{1}$. Le produit $\sqrt[m]{1}.\sqrt[n]{1}$ a pour valeurs tous les produits que l'on obtient en multipliant les racines de l'équation $x^m-1=0$ par celles de $x^n-1=0$; mais on obtient ainsi toutes celles de $x^{mn}-1=0$ (750), c'est-à-dire toutes les valeurs de $\sqrt[mn]{1}$. Donc, etc.

7° Supposons enfin que *les indices des radicaux que l'on veut multiplier aient un facteur commun*, je dis qu'on aura $\sqrt[mp]{a}.\sqrt[np]{b}=\sqrt[mnp]{a^n b^m}$, ce qui revient à prouver que $\sqrt[mp]{1}.\sqrt[np]{1}=\sqrt[mnp]{1}$. En effet, $\sqrt[mp]{1}.\sqrt[np]{1}=\sqrt[p]{\sqrt[m]{1}}.\sqrt[p]{\sqrt[n]{1}}=\sqrt[p]{\sqrt[m]{1}.\sqrt[n]{1}}=\sqrt[p]{\sqrt[mn]{1}}=\sqrt[mnp]{1}$.

La division des radicaux se démontrerait de la même manière que leur multiplication.

756. 2° Cas. Si la quantité a soumise à un radical est négative, et que l'indice m de ce radical soit impair, on peut encore prendre la détermination arithmétique de ce radical, et en la multipliant par les m racines $m^{\text{ièmes}}$ de 1, on a toutes ses valeurs. Ainsi $\sqrt[5]{-32} = -2 . \sqrt[5]{1}$. Mais si l'indice est pair, il faut prendre la détermination arithmétique de $-a$, quantité positive, et la multiplier successivement par toutes les valeurs de $\sqrt[m]{-1}$, de sorte qu'il est nécessaire d'examiner les règles du calcul des quantités telles que $\sqrt[m]{-1}$.

1° *Soit* $\sqrt[m]{-1}$ *à élever à la puissance* n, m et n étant deux nombres premiers entre eux : je dis qu'on aura $(\sqrt[m]{-1})^n = \sqrt[m]{(-1)^n}$. Soient, en effet, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les valeurs de $\sqrt[m]{-1}$: $\alpha^n, \beta^n, \gamma^n, \ldots$ seront celles de $(\sqrt[m]{-1})^n$: ces quantités sont aussi des valeurs de $\sqrt[m]{(-1)^n}$, car $(\alpha^n)^m = (\alpha^m)^n = (-1)^n$. Il sera ensuite facile de faire voir qu'elles sont toutes différentes (755, 4°).

2° Proposons-nous de *multiplier* $\sqrt[m]{-1}$ *par* $\sqrt[n]{-1}$, m et n étant premiers entre eux : je dis qu'on aura $\sqrt[m]{-1} . \sqrt[n]{-1} = \sqrt[mn]{(-1)^n.(-1)^m}$. Je désigne, en effet, par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les valeurs de $\sqrt[m]{-1}$ et par $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ celles de $\sqrt[n]{-1}$: le produit de l'une quelconque des premières par une quelconque des secondes sera une valeur de $\sqrt[mn]{(-1)^n.(-1)^m}$; car, $(\alpha\alpha')^{mn} = (\alpha^m)^n.(\alpha'^n)^m = (-1)^n.(-1)^m$. Il sera facile ensuite de faire voir que tous ces produits sont distincts (755, 6°), et comme ils sont au nombre de mn, on en conclura que ce sont toutes les valeurs de $\sqrt[mn]{(-1^n).(-1)^m}$.

On démontrera absolument de la même manière que $\sqrt[m]{-1} . \sqrt[n]{+1} = \sqrt[mn]{(-1)^n}$, si m et n sont premiers entre eux.

Tous les autres cas se démontreraient en répétant les raisonnements du n° 755.

§ III. RÉSOLUTION TRIGONOMÉTRIQUE DES ÉQUATIONS-BINOMES.

757. Considérons d'abord l'équation

$$y^m - 1 = 0 \qquad [3].$$

Nous avons démontré dans notre *Trigonométrie* (**46**) que m étant un nombre entier positif, on avait la formule

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi :$$

d'où l'on voit que, si l'on peut déterminer l'arc φ de manière que le deuxième membre de cette équation se réduise à $+1$, la valeur correspondante que prendra la fonction $(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ sera une racine de l'équation proposée.

Or, il est clair que la quantité $(\cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi)$ ne se réduira à $+1$, qu'autant que l'on aura simultanément

$$\cos m\varphi = +1 \quad \text{et} \quad \sin m\varphi = 0,$$

d'où l'on tire

$$m\varphi = 2k\pi, \quad \text{d'où} \quad \varphi = \frac{2k\pi}{m};$$

donc, la formule générale des racines de l'équation [3] est

$$y = \cos\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m} \qquad [7].$$

Comme k représente un nombre entier quelconque, il semblerait résulter de cette formule que l'équation [3] admet une infinité de racines, mais il est facile de voir qu'elle n'en a que m. En effet, il est d'abord visible qu'en faisant successivement

$$k = 0, \quad = 1, \quad = 2, \quad = 3 \ldots \quad = (m-1),$$

on aura m valeurs *différentes* pour y ; car, la plus grande des valeurs correspondantes que recevra ainsi l'arc $\frac{2k\pi}{m}$ sera $\frac{2(m-1)\pi}{m}$, laquelle est plus petite que 2π, et il n'y a pas dans la circonfé-

rence deux arcs qui aient à la fois le même sinus et le même cosinus, ce qui serait nécessaire pour que deux valeurs de y fussent égales. Je dis de plus que, pour toute valeur donnée à k autre que l'une des précédentes, on retombera sur une valeur de y correspondante à une valeur positive de k moindre que m. Posons, en effet, $k=mi+h$, i étant un nombre entier quelconque positif ou négatif, et h un nombre entier positif moindre que m (748*), il viendra

$$y=\cos\left(2i\pi+\frac{2h\pi}{m}\right)+\sqrt{-1}\sin\left(2i\pi+\frac{2h\pi}{m}\right)$$
$$=\cos\frac{2h\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2h\pi}{m},$$

valeur qui est celle même que l'on a trouvée en faisant $k=h<m$.

La formule [7] donne donc seulement les m racines de l'équation [3].

758. Si l'on observe que, d'après le *Théorème de* MOIVRE, la formule [7] revient à

$$y=\left(\cos\frac{2\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{m}\right)^k,$$

on en conclura que, comme on obtient toutes les racines de la proposée, en donnant successivement à k les valeurs 1, 2, 3,...m, *les racines de cette équation sont toutes les puissances successives, depuis la première jusqu'à la* m^{me}, *de la racine*

$$\cos\frac{2\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{m},$$

correspondante à $k=1$.

Examinons si une autre racine de l'équation [3],

$$y=\cos\frac{2n\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m},$$

jouit de la même propriété. Élevons, pour cela, cette racine à la p^{me} et à la q^{me} puissance, p et q étant deux nombres moindres

que $m+1$, et cherchons si ces deux puissances peuvent être égales; car, si elles ne le sont pas, nous devrons conclure qu'en élevant la racine dont il s'agit à toutes les puissances 1, 2, 3, 4,... m, on obtiendra m résultats différents, et comme chacun d'eux est une racine de l'équation [3], ils seront les m racines de cette équation. Si au contraire la p^{me} et la q^{me} puissance de

$$\cos\frac{2n\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}$$

sont égales, on n'obtiendra pas m valeurs différentes en élevant cette racine à toutes les puissances successives, depuis la première jusqu'à la m^{me}, et par conséquent on ne trouvera pas ainsi toutes les racines de la proposée. Posons donc

$$\left(\cos\frac{2n\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}\right)^p=\left(\cos\frac{2n\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{m}\right)^q:$$

cette équation revient à (*Trig*^{ie}, 46)

$$\cos\frac{2np\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2np\pi}{m}=\cos\frac{2nq\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2nq\pi}{m},$$

laquelle se partage dans les deux suivantes

$$\cos\frac{2np\pi}{m}=\cos\frac{2nq\pi}{m}\quad\text{et}\quad\sin\frac{2np\pi}{m}=\sin\frac{2nq\pi}{m}.$$

Or, pour que deux arcs aient à la fois le même sinus et le même cosinus, il faut et il suffit que leur différence soit un multiple de la circonférence (*Trig*^{ie}, 15 et 17) : donc

$$\frac{2np\pi}{m}-\frac{2nq\pi}{m}=2i\pi,$$

ou bien

$$\frac{n(p-q)}{m}=i.$$

D'où l'on voit que si n et m sont deux nombres premiers entre eux, cette condition ne pourra jamais être remplie, puisque p et q sont deux nombres entiers inégaux et moindres que $m+1$. Mais si m et n ont un facteur commun, il ne sera plus néces-

saire que m divise le facteur $(p-q)$, et il pourra très-bien se faire que l'on puisse assigner à p et à q des valeurs telles que $\frac{n(p-q)}{m}$ soit un nombre entier. Si, par exemple, on avait $m=6$ et $n=4$, on n'aurait qu'à faire $p=5$ et $q=2$.

Donc, *quelle que soit la racine que l'on considère, si on l'élève successivement à toutes les puissances depuis la première jusqu'à la* m^{me}, *on reproduira toutes les racines de la proposée, pourvu que cette racine soit une puissance de* $\left(\cos\frac{2\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{m}\right)$ *dont l'exposant soit premier avec* m.

Ce théorème s'accorde avec celui que nous avons démontré au n° **748**, puisque nous y avons supposé que m était un nombre premier.

759. Comme l'équation [3] ne peut avoir pour racine réelle que $+1$, si m est impair, et $+1$ et -1, si m est pair, il en résulte que le nombre de ses racines imaginaires est pair, et il est même facile de reconnaître que celles-ci ne diffèrent deux à deux que par le signe du facteur $\sqrt{-1}$. Pour obtenir, en effet, deux pareilles valeurs de y, il faut donner à k deux valeurs h et h', telles que $\cos\frac{2h\pi}{m}=\cos\frac{2h'\pi}{m}$ et que $\sin\frac{2h\pi}{m}=-\sin\frac{2h'\pi}{m}$, ce qui exige que la somme des arcs $\frac{2h\pi}{m}$ et $\frac{2h'\pi}{m}$ soit un multiple pair de la demi-circonférence (*Trig*^{ie}, **15** et **17**); et comme chacun d'eux est moindre qu'une circonférence, on devra donc avoir $\frac{2h\pi}{m}+\frac{2h'\pi}{m}=2\pi$, d'où $h+h'=m$.

Donc, à deux valeurs de k, dont la somme est m, répondent deux valeurs conjuguées de y. Ainsi, on pourra comprendre toutes les racines de l'équation [3] dans la formule

$$y=\cos\frac{2k\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m} \qquad [8],$$

et pour en déduire toutes ces racines, il suffira d'y faire varier k

depuis *zéro* jusqu'à $\frac{m}{2}$ ou jusqu'à $\frac{m-1}{2}$, selon que m sera un nombre pair ou impair.

En effet, les deux valeurs de k, auxquelles correspondent deux valeurs conjuguées de y, sont deux termes équidistants des extrêmes dans la progression 1, 2, 3,... $(m-1)$, de sorte que si m est pair, le terme du milieu y occupe le rang $\frac{m-1+1}{2}=\frac{m}{2}$, et si m est impair, le dernier terme de la première moitié est le $\left(\frac{m-1}{2}\right)^{me}$.

760. Si l'on forme le produit des deux racines comprises dans la formule [8], on trouvera $\cos^2\frac{2k\pi}{m}+\sin^2\frac{2k\pi}{m}=1$, ce qui montre que les racines imaginaires conjuguées de l'équation $y^m-1=0$ sont réciproques.

761. On tire de la formule [8] le moyen de *décomposer le premier membre de l'équation* $y^m-1=0$ *en facteurs réels du deuxième degré*. Si l'on observe, en effet, que la somme des deux racines correspondantes à une même valeur de k est $2\cos\frac{2k\pi}{m}$, on verra que le premier membre de l'équation du second degré qui donnerait ces racines est

$$y^2-2\cos\frac{2k\pi}{m}y+1,$$

puisque leur produit est $+1$. C'est donc là l'expression générale des facteurs réels du deuxième degré de l'équation [3], de sorte qu'en y faisant varier k depuis zéro jusqu'à $\frac{m}{1}$ ou jusqu'à $\frac{m-1}{2}$, suivant que m sera un nombre pair ou impair, on obtiendra tous ces facteurs. Il faut cependant avoir soin de ne prendre que la racine carrée des facteurs $(y-1)^2$ et $(y+1)^2$, correspondants à $k=0$ et à $k=\frac{m}{2}$. La raison en est que les racines ima-

ginaires conjuguées de la proposée sont seules groupées dans l'équation

$$y^2-2\cos\frac{2k\pi}{m}.y+1=0;$$

car, lorsque l'on suppose $k=0$ ou $k=\frac{m}{2}$, son premier membre devient le produit de deux facteurs égaux correspondants à la racine $y=\cos 0=1$, ou à la racine $y=\cos\pi=-1$.

D'après cela, on aura, dans le cas où m sera un nombre pair,

$$y^m-1=(y-1)\left\{y^2-2y\cos\frac{2\pi}{m}+1\right\}\left\{y^2-2y\cos\frac{4\pi}{m}+1\right\}\ldots$$
$$\left\{y^2-2y\cos\frac{2\left(\frac{m}{2}-1\right)\pi}{m}+1\right\}(y+1);$$

et si m est un nombre impair,

$$y^m-1=(y-1)\left\{y^2-2y\cos\frac{2\pi}{m}+1\right\}\left\{y^2-2y\cos\frac{4\pi}{m}+1\right\}\ldots$$
$$\left\{y^2-2y\cos\frac{(m-1)\pi}{m}+1\right\}.$$

***762.** L'équation $y^m-1=0$ étant privée de son second terme, la somme de ses racines est nulle; mais toutes ses racines se tirent de la formule [7] en y faisant successivement $k=1, =2, =3,\ldots=m$; donc, en additionnant toutes ces racines et égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire de la somme, on aura

$$\cos\frac{2\pi}{m}+\cos\frac{4\pi}{m}+\cos\frac{6\pi}{m}+\ldots+\cos\frac{2(m-1)\pi}{m}+\cos 2\pi=0,$$

$$\sin\frac{2\pi}{m}+\sin\frac{4\pi}{m}+\sin\frac{6\pi}{m}+\ldots+\sin\frac{2(m-1)\pi}{m}+\sin 2\pi=0.$$

Ceci nous apprend que *si on divise une circonférence en* m *parties égales et qu'on prenne un des points de division pour origine des arcs, la somme des sinus des arcs terminés à ces divisions sera nulle, ainsi que la somme de leurs cosinus.*

763. Occupons-nous maintenant de la résolution de l'équation

$$y^m+1=0 \qquad [9].$$

Si nous nous reportons à la formule de *Moivre*,

$$(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^m=\cos m\varphi+\sqrt{-1}\sin m\varphi,$$

nous verrons que la fonction $(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$ sera racine de la proposée, si l'on peut assigner à φ une valeur telle que

$$\cos m\varphi=-1 \quad \text{et que} \quad \sin m\varphi=0.$$

Or, il n'y a que les multiples impairs de la demi-circonférence qui aient leur sinus nul et leur cosinus égal à -1 ; donc

$$m\varphi=(2k+1)\pi, \quad \text{d'où} \quad \varphi=\frac{(2k+1)\pi}{m}.$$

Ainsi, la formule générale des racines de l'équation [9] est

$$y=\cos\frac{(2k+1)\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{m} \qquad [10],$$

et on obtiendra toutes ces racines en donnant à k les valeurs successives 0, 1, 2, 3,... $(m-1)$.

764. En raisonnant comme au n° **757**, on reconnaîtra qu'en donnant à k d'autres valeurs que celles-là, on n'obtiendrait pas de nouvelles valeurs pour y.

On verra, de même qu'au n° **758**, que *les racines de la proposée sont toutes les puissances de degré impair de*

$$\cos\frac{\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{m},$$

depuis la première jusqu'à la $(2m-1)^{me}$, *ou de toute autre racine que celle-ci, pourvu que cette racine soit une puissance de* $\cos\frac{\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{m}$ *dont l'exposant soit premier avec* m.

On reconnaîtra aussi que les valeurs de y sont conjuguées deux à deux et qu'elles correspondent à des valeurs de k dont la

somme est $(m-1)$, de sorte qu'on obtiendra toutes les racines de l'équation en donnant à k, dans la formule

$$y=\cos\frac{(2k+1)\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{m} \qquad [11],$$

les valeurs 0, 1, 2, 3,... jusqu'à $\frac{m-2}{2}$ ou jusqu'à $\frac{m-1}{2}$, selon que m sera un nombre pair ou un nombre impair.

On vérifiera facilement que les racines imaginaires conjuguées sont réciproques (**760**), et on trouvera que la formule des facteurs réels du second degré de notre équation est (**761**)

$$y^2-2y\cos\frac{(2k+1)\pi}{m}+1.$$

* **765.** Enfin on prouvera, comme au n° **762**, que

$$\cos\frac{\pi}{m}+\cos\frac{3\pi}{m}+\cos\frac{5\pi}{m}+\ldots+\cos\frac{(2m-1)\pi}{m}=0,$$

$$\sin\frac{\pi}{m}+\sin\frac{3\pi}{m}+\sin\frac{5\pi}{m}+\ldots+\sin\frac{(2m-1)\pi}{m}=0:$$

ce qui démontre que *si l'on partage une circonférence en* m *parties égales, la somme des sinus ou des cosinus des arcs qui, commençant à l'un des points de division, iront se terminer aux points-milieux des arcs de division, est égale à zéro.*

766. La résolution de l'équation binome

$$y^m-1=0$$

donne le moyen de prouver que la racine m^{me} d'une quantité imaginaire de la forme $(a+b\sqrt{-1})$ est elle-même une quantité de cette forme, mais il faut auparavant examiner si *le théorème de* MOIVRE *est vrai, quelque valeur positive ou négative que l'on donne à* m.

Supposons d'abord que cet exposant soit un nombre entier négatif, et considérons en conséquence la fonction $(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^{-m}$: elle revient à

$$\frac{1}{(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^m}=\frac{1}{\cos m\varphi+\sqrt{-1}\sin m\varphi},$$

ou, en multipliant les deux termes de cette dernière fraction par $(\cos m\varphi - \sqrt{-1}\sin m\varphi)$,

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{-m} = \frac{\cos m\varphi - \sqrt{-1}\sin m\varphi}{\cos^2 m\varphi + \sin^2 m\varphi}$$
$$= \cos(-m\varphi) + \sqrt{-1}\sin(-m\varphi).$$

Ainsi, la formule de *Moivre* est encore vraie quand l'exposant est un nombre entier négatif.

Soit maintenant $(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{\frac{n}{m}}$, n étant un nombre entier positif ou négatif. Cette expression revient (**312**) à $(\cos n\varphi + \sqrt{-1}\sin n\varphi)^{\frac{1}{m}}$. Nous allons examiner si cette dernière peut se ramener à la forme $(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)$. S'il en est ainsi, nous aurons

$$\cos n\varphi + \sqrt{-1}\sin n\varphi = \cos mz + \sqrt{-1}\sin mz,$$

de sorte que les deux arcs $n\varphi$ et mz doivent avoir le même sinus et le même cosinus, ce qui exige que

$$mz - n\varphi = 2k\pi, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{n\varphi + 2k\pi}{m};$$

donc

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{\frac{n}{m}} = \cos\frac{n\varphi + 2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{n\varphi + 2k\pi}{m} \quad [12].$$

Ainsi, la formule de *Moivre* n'est plus vraie dans le cas où l'exposant est un nombre fractionnaire. Or, si l'on remarque que

$$\cos\frac{n\varphi + 2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{n\varphi + 2k\pi}{m}$$
$$= \left(\cos\frac{n\varphi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{n\varphi}{m}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m}\right),$$

on en conclura que, dans le cas où l'exposant sera un nombre fractionnaire $\frac{n}{m}$, on pourra encore appliquer la formule, comme s'il était un nombre entier, mais qu'il faudra multiplier le résultat, c'est-à-dire la détermination arithmétique de $(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{\frac{n}{m}}$, par les m racines m^{mes} de l'unité (**738**),

de sorte que *le théorème est encore vrai* dans le cas actuel, *si l'on se borne à cette détermination arithmétique.*

767. Revenons maintenant à l'expression $\sqrt[m]{a+b\sqrt{-1}}$. Nous pourrons toujours poser

$$a=\rho\cos\omega \quad \text{et} \quad b=\rho\sin\omega,$$

ρ et ω étant deux indéterminées ; car, on en tire

$$\rho=\pm\sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos\omega=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin\omega=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ainsi, en négligeant, pour plus de simplicité, la valeur négative de ρ, ce facteur sera le module de $a+b\sqrt{-1}$; et si on désigne par φ le plus petit arc positif ayant $\frac{a}{+\sqrt{a^2+b^2}}$ pour cosinus et $\frac{b}{+\sqrt{a^2+b^2}}$ pour sinus, l'expression proposée reviendra à

$$\sqrt[m]{(a+b\sqrt{-1})}=\sqrt[m]{\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)}$$
$$=\sqrt[m]{\rho}\left\{\cos\frac{\varphi+2k\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{m}\right\},$$

expression de la forme des imaginaires du second degré, et en y faisant $k=0, =1, =2, =3, \ldots =m-1$, on déduira de cette formule toutes les valeurs de la racine m^{me} de la quantité $(a+b\sqrt{-1})$.

La transformation de $a+b\sqrt{-1}$ en $\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$ mérite d'être remarquée ; car, elle ramène toutes les opérations sur les quantités imaginaires aux mêmes opérations sur des expressions de la forme $\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi$, lesquelles, comme nous l'avons vu dans la *Trigonométrie*, et d'après la formule de *Moivre*, se ramènent aux opérations immédiatement inférieures sur les arcs, ce qui est tout à fait analogue au calcul des quantités exponentielles.

* **768.** Scolie. Si l'on avait résolu l'équation $y^m-1=0$ par la méthode algébrique que nous avons exposée précédemment, on pourrait en déduire un procédé pour partager la circonfé-

rence en m parties égales. Les racines ainsi trouvées doivent, en effet, être identiques avec les valeurs que l'on obtient en égalant k successivement à 1, 2, 3,... m dans la formule [7]; si donc a est le plus grand des termes réels qui entrent dans les différentes racines qu'on aura trouvées, $a\pm b\sqrt{-1}$, $a'\pm b'\sqrt{-1}$, $a''\pm b''\sqrt{-1}$,..., on verra que $a=\cos\frac{2\pi}{m}$ et que connaissant ainsi la valeur numérique du cosinus de la m^{me} partie de la circonférence, il sera facile d'obtenir cette m^{me} partie. Il y a plus, c'est que *si* m *est un nombre premier de la forme* (2^n+1), *on pourra*, ainsi que M. *Gauss* l'a fait voir, *faire dépendre la résolution de l'équation* $y^m-1=0$ *de celle d'une suite d'équations du second degré*, de sorte qu'on obtiendra l'arc $\frac{2\pi}{m}$ en construisant les racines de ces équations, et qu'ainsi la division de la circonférence en m parties égales pourra s'effectuer géométriquement, c'est-à-dire sans tâtonnements et en ne faisant usage que de la règle et du compas.

§ IV. DES ÉQUATIONS RÉDUCTIBLES AU SECOND DEGRÉ.

760. Il y a encore une classe d'équations que l'on sait résoudre complétement, à l'aide des tables trigonométriques : ce sont celles qui ne renferment que deux puissances différentes de l'inconnue, mais telles que l'exposant de l'une est double de celui de l'autre. La formule générale de ces équations est

$$x^{2m}+2px^m+q=0 \qquad [13].$$

En posant $x^m=y$, elle devient

$$y^2+2py+q=0,$$

et, en désignant par a et par b les racines de cette équation, il s'agira, pour avoir toutes les racines de la proposée, de résoudre les équations-binomes

$$x^m-a=0 \quad \text{et} \quad x^m-b=0,$$

ce que nous savons faire (**746**, **757** et **763**).

Si m est un nombre pair, et que a et b soient deux quantités réelles et positives, la proposée aura quatre racines réelles et toutes les autres seront imaginaires; si l'une de ces quantités seulement est positive, il n'y aura que deux racines réelles, et il n'y en aura aucune, si a et b sont des quantités négatives ou imaginaires. Dans tous les cas, les racines de l'équation proposée seront deux à deux égales et de signes contraires.

Si m est impair, la proposée aura deux racines réelles, si a et b sont des quantités réelles, mais toutes ses racines seront imaginaires si a et b sont aussi imaginaires.

770. Si les racines a et b de l'équation en y sont imaginaires, on aura

$$y=-p\pm\sqrt{q-p^2}\sqrt{-1},$$

$(q-p^2)$ étant une quantité positive, et par conséquent la formule des valeurs de x sera (**766**)

$$x=\sqrt[2m]{q}\left\{\cos\frac{\varphi+2k\pi}{m}\pm\sin\frac{\varphi+2k\pi}{m}\sqrt{-1}\right\} \quad [14],$$

φ désignant le plus petit des arcs positifs qui ont $-\frac{p}{\sqrt{q}}$ pour cosinus, puisque, pour extraire la racine m^{me} de la double valeur de y, on aura dû poser

$$-p=\rho\cos\omega,\quad \sqrt{q-p^2}=\rho\sin\omega,$$

équations desquelles on tire

$$\rho=+\sqrt{q},\quad \cos\omega=-\frac{p}{+\sqrt{q}},\quad \sin\omega=\frac{\sqrt{q-p^2}}{+\sqrt{q}}.$$

Or, je dis que l'on obtiendra toutes les racines de l'équation proposée, en donnant à k, dans la formule [14], les m valeurs 0, 1, 2, 3,...$(m-1)$. En effet, il est d'abord facile de voir que, pour chacune de ces valeurs de k, on aura deux valeurs pour x, puisque le terme $\pm\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{m}$ ne saurait s'évanouir, l'équation [13] n'ayant point de racines réelles. Je dis de plus que,

parmi les $2m$ valeurs ainsi obtenues pour x, il n'y en a pas deux qui soient égales. Supposons, en effet, que pour $k=h$ et pour $k=h'$ on ait trouvé deux résultats égaux : il faudra donc que les arcs

$$\frac{\varphi+2h\pi}{m} \quad \text{et} \quad \frac{\varphi+2h'\pi}{m}$$

correspondants à ces deux hypothèses aient le même cosinus, et par conséquent que leur somme ou leur différence soit un multiple pair de la demi-circonférence; donc

$$\frac{\varphi+2h'\pi}{m} \pm \frac{\varphi+2h\pi}{m} = 2i\pi;$$

équation d'où l'on tire

$$\varphi = (mi - h' - h)\pi, \quad \text{ou} \quad \frac{h'-h}{m} = i.$$

Ces équations sont impossibles; car, la première donnerait $\sin\varphi = 0$, et par conséquent $q-p^2=0$, ce qui n'est pas; et le premier membre de la seconde est une fraction, tandis que le second est un nombre entier*.

771. Si l'on forme le produit des facteurs du premier degré correspondants aux deux valeurs de x données par la formule [14] pour une même valeur de k, on trouvera

$$x^2 - 2\sqrt[2m]{q}\cos\frac{\varphi+2k\pi}{m}x + \sqrt[m]{q};$$

de sorte que pour décomposer le premier membre de la pro-

---

* Il est facile de voir que la formule ne serait pas plus générale en donnant à l'arc ω toutes les valeurs dont il est susceptible; car, ces valeurs étant comprises dans l'expression $2k'\pi+\varphi$, on aurait

$$\sqrt[m]{-p \pm \sqrt{p^2-q}} = \sqrt[m]{\rho}\cdot\left\{\cos\frac{\varphi+2(k+k')\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi+2(k+k')\pi}{m}\right\}$$
$$= \sqrt[m]{\rho}\cdot\left\{\cos\frac{\varphi+2i\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi+2i\pi}{m}\right\},$$

i étant un nombre entier positif moindre que m, puisqu'on pourra toujours prendre $k=i-k'$.

posée en m facteurs réels du second degré, il faudra faire dans cette formule $k=0, =1, =2, =3, \ldots =m-1$.

772. On peut encore, à l'aide des tables trigonométriques, résoudre très-rapidement l'équation du troisième degré, dans le cas où ses trois racines sont réelles. Considérons donc l'équation

$$x^3 - px + q = 0 \qquad [15],$$

dont les coefficients satisfont à la condition $27q^2 - 4p^3 < 0$ (550). On a vu, dans la *Trigonométrie*, **41**, que, si l'on appelle α le plus petit de tous les arcs dont le sinus est b, les trois racines de l'équation

$$y^3 - \frac{3}{4}y + \frac{b}{4} = 0 \qquad [16]$$

sont $\sin\frac{\alpha}{3}$, $\sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{3}\right)$ et $-\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{3}\right)$, de sorte que, si l'on pouvait transformer cette équation en une autre qui fût identique avec [15], il serait facile d'obtenir les racines de celle-ci. Pour y parvenir, je multiplie par r les racines de l'équation [16], et en désignant par x l'inconnue de la nouvelle équation, j'aurai (583)

$$x^3 - \frac{3r^2}{4}x + \frac{br^3}{4} = 0.$$

Pour que cette équation soit identique avec l'équation [15], il faut et il suffit que l'on ait

$$p = \frac{3r^2}{4} \quad \text{et} \quad q = \frac{br^3}{4},$$

équations d'où l'on tire

$$r = \sqrt{\frac{4p}{3}} \quad \text{et} \quad b = \sqrt{\frac{27q^2}{4p^3}}.$$

Cette valeur de b est réelle, puisque, par hypothèse, $27q^2 - 4p^3 < 0$.

On connaîtra donc ainsi la valeur de r, celle b du sinus de l'arc α et, par suite, il sera facile d'obtenir les logarithmes des

sinus des arcs $\frac{\alpha}{3}$, $60^0-\frac{\alpha}{3}$ et $60^0+\frac{\alpha}{3}$; puis, en ajoutant à chacun de ces logarithmes celui de r, on aura les logarithmes des trois racines de l'équation [15].

773. Exemple. *Résoudre l'équation* $z^3+3z^2-12z+6=0$.

Je commence par faire évanouir le second terme de cette équation, en posant $z=x-1$, et je trouve $x^3-15x+20=0$, équation qui n'a point de racines commensurables. Je pose donc $p=15$, $q=20$, d'où je vois que $27q^2-4p^3<0$, de sorte que ses racines sont réelles. En conséquence, j'exécute le calcul suivant :

$\log 4 = 0,6020600$	$\log 27 = 1,4313638$	$\log 4p = 1,7781513$
$\log p = 1,1760913$	$\log q^2 = 2,6020600$	$\log p^3 = 2,3521826$
$\log 4p = 1,7781513$	$4,0334238$	$\log 4p^3 = 4,1303339$
$\log 3 = 0,4771213$	$\log 4p^3 = 4,1303339$	
$1,3010300$	$\log \sin \alpha = 9,9030899$	$\alpha = 53^0\ 7'\ 48''$
$\log r = 0,6505150$		
$\frac{\alpha}{3} = 17^0 42' 36''$	$60^0 - \frac{\alpha}{3} = 42^0 17' 24''$	$60^0 + \frac{\alpha}{3} = 77^0 42' 36''$
$\log \sin \frac{\alpha}{3} = 9,4831582$	$\log \sin\left(60^0 - \frac{\alpha}{3}\right) = 9,8279398$	$\log \sin\left(60^0 + \frac{\alpha}{3}\right) = 9,9899314$
$\log r = 0,6505150$	$\log r = 0,6505150$	$\log r = 0,6505190$
$0,1336732$	$0,4784548$	$0,6404464$
$1,360421$	$3,009226$	$4,369647.$

En vertu de la relation $z=x-1$, on trouvera que les racines de l'équation proposée sont

$$0,360421, \quad 2,009226 \quad \text{et} \quad -5,369647,$$

et comme leur somme, prise en signe contraire, est égale au coefficient du second terme de cette proposée, on en conclut que les calculs sont exacts.

774. La résolution de l'équation [13] nous a conduits à extraire la racine m^{me} d'une quantité qui est en partie rationnelle et en partie irrationnelle du second degré, et il est naturel de chercher, ainsi qu'on l'a déjà fait au n° **260**, s'il ne serait pas possible de substituer à l'expression

$$\sqrt[m]{a+\sqrt{b}}$$

une expression dans laquelle il n'y aurait plus de radicaux superposés. Pour que la nouvelle formule ait le même nombre de valeurs que celle-ci, il faut y faire entrer un radical de l'ordre m, et en conséquence nous poserons

$$\sqrt[m]{a+\sqrt{b}}=\sqrt[m]{z}(x+\sqrt{y}) \qquad [17],$$

x, y, z étant des quantités qui ne sont assujetties qu'à la seule condition de satisfaire à cette équation et d'être en outre commensurables. Or, pour que $\sqrt[m]{z}(x+\sqrt{y})$ représente la racine m^{me} de $(a+\sqrt{b})$, il faut et il suffit qu'en l'élevant à la puissance m, on retrouve $a+\sqrt{b}$; donc

$$a+\sqrt{b}=z\{x^m+C_1x^{m-1}\sqrt{y}+C_2x^{m-2}y+C_3x^{m-3}y\sqrt{y}+\ldots\} \quad [18],$$

en représentant en général par C_n le coefficient du terme qui, dans le développement de la m^{me} puissance d'un binome, en a n avant lui. Le second membre de cette équation étant, comme le premier, en partie rationnel et en partie irrationnel du second degré, on voit que l'hypothèse d'où nous sommes partis n'a rien d'absurde *. Tâchons donc d'en déduire les valeurs de nos inconnues. Je remarque, pour cela, que x, y et z étant trois quantités rationnelles, l'équation [18] se partage nécessairement dans les deux suivantes :

$$a=z\{x^m+C_2x^{m-2}y+\ldots\} \qquad [19],$$
$$\sqrt{b}=z\{C_1x^{m-1}\sqrt{y}+C_3x^{m-3}y\sqrt{y}+\ldots\} \qquad [20].$$

* On n'aurait pas pu poser, en général,

$$\sqrt[m]{a+\sqrt{b}}=\sqrt[m]{z}(\sqrt{x}+\sqrt{y});$$

car, on aurait dû avoir alors

$$a+\sqrt{b}=z(\sqrt{x}+\sqrt{y})^m=z\left\{x^{\frac{m}{2}}+C_1x^{\frac{1}{2}(m-1)}\sqrt{y}+C_2x^{\frac{1}{2}(m-2)}y+C_3x^{\frac{1}{2}(m-3)}y\sqrt{y}+\ldots\right\}$$

(cette équation s'obtient en remplaçant x par $x^{\frac{1}{2}}$ dans la formule [18]). Or, si m est pair, tous les termes de rang impair sont commensurables, et tous ceux de rang pair sont incommensurables ; car, ils renferment le facteur $\sqrt{y}$,

Or, les coefficients de z sont : l'un, la somme des termes de rang impair, et l'autre, la somme des termes de rang pair du développement de $(x+\sqrt{y})^m$; mais le développement de $(x-\sqrt{y})^m$ ne diffère du précédent que par les signes des termes de rang pair ; donc les équations ci-dessus reviennent à

$$a = \tfrac{1}{2} z \{ (x+\sqrt{y})^m + (x-\sqrt{y})^m \},$$
$$\sqrt{b} = \tfrac{1}{2} z \{ (x+\sqrt{y})^m - (x-\sqrt{y})^m \}.$$

Au système de ces deux équations on peut substituer le système formé de la première, c'est-à-dire de l'équation [19], et de la différence de leurs carrés qui est

$$a^2 - b = z^2(x^2-y)^m, \quad \text{d'où} \quad x^2 - y = \frac{1}{z}\sqrt[m]{(a^2-b)z^{m-2}} \quad [21].$$

z étant une indéterminée, il faudra en profiter pour tâcher de

---

et par conséquent le second membre est de même forme que le premier, de sorte que la transformation est possible.

Mais, si m est impair, tous les termes de rang impair renferment le facteur $\sqrt{x}$, tous ceux de rang pair contiennent $\sqrt{y}$, de sorte que l'équation précédente peut se mettre sous la forme

$$a + \sqrt{b} = A\sqrt{x} + B\sqrt{y}.$$

Or, en carrant les deux membres de cette équation, il vient

$$a^2 + 2a\sqrt{b} + b = A^2x + 2AB\sqrt{xy} + B^2y.$$

Si xy est un carré, cette équation est absurde : si xy n'est pas un carré, elle se décompose nécessairement dans les deux suivantes

$$a^2 + b = A^2x + B^2y, \quad \text{et} \quad a\sqrt{b} = AB\sqrt{xy},$$

ou bien $$a^2 + b = A^2x + B^2y, \quad \text{et} \quad a^2b = A^2B^2xy.$$

Ainsi, la somme des deux quantités A^2x et B^2y est égale à celle de a^2 et de b, et leur produit est égal à celui de ces mêmes quantités ; donc il faut que

$$A^2x = a^2 \quad \text{et} \quad B^2y = b,$$

ou que $$B^2y = a^2 \quad \text{et} \quad A^2x = b ;$$

donc x ou y doit être un carré parfait, et par conséquent quand m est impair, on ne peut pas poser

$$\sqrt[m]{a+\sqrt{b}} = \sqrt[m]{z}(\sqrt{x}+\sqrt{y}).$$

rendre $(a^2-b)z^{m-2}$ une puissance parfaite du degré m. En conséquence, je décompose le nombre (a^2-b) en ses facteurs premiers, et je suppose que p et q étant ces facteurs, on ait $a^2-b=p^\alpha q^\beta$. Si α et β sont des multiples de m, il n'y aura qu'à faire $z=1$. S'il n'en est pas ainsi, on posera

$$z=p^s q^t,$$

ce qui donnera

$$(a^2-b)z^{m-2}=p^{\alpha+(m-2)s}q^{\beta+(m-2)t},$$

et il s'agira d'assigner à s et à t des valeurs telles que $\alpha+(m-2)s$ et $\beta+(m-2)t$ soient des multiples de m. En conséquence, on fera

$$\alpha+(m-2)s=mu \quad \text{et} \quad \beta+(m-2)t=mv,$$

d'où l'on tire

$$mu-(m-2)s=\alpha \quad \text{et} \quad mv-(m-2)t=\beta.$$

On voit par là que, si m est pair et que l'un des nombres α et β ne le soit pas, l'une au moins de ces équations ne pourra pas être satisfaite par des valeurs entières des inconnues, et ainsi la transformation que nous nous sommes proposé de faire sera impossible. Mais si α et β sont deux nombres pairs, ou que m soit impair, on pourra toujours résoudre les équations ci-dessus en nombres entiers, et la transformation *pourra* être exécutée.

Supposons que l'on ait assigné à z une valeur qui rende $(a^2-b)z^{m-2}$ une puissance parfaite du degré m, et appelons c la détermination arithmétique de $\frac{1}{z}\sqrt[m]{(a^2-b)z^{m-2}}$; nous aurons

$$x^2-y=c \qquad [22],$$

et il ne s'agira plus que de résoudre les équations [19] et [22]. On éliminera donc y entre elles, et si l'équation finale $\varphi(x)=0$, ainsi obtenue, a une racine commensurable, on la substituera dans l'équation [22], et on en déduira une pareille valeur pour y. On remplacera enfin x, y et z par leurs valeurs dans [17], et la séparation des radicaux sera effectuée.

Exemple. *Calculer* $\sqrt[3]{92+18\sqrt{-1}}$.

Nous poserons $a=92$, $b=-18^2=-324$, et les équations [19] et [21] deviendront

$$92=z(x^3+3xy),\quad x^2-y=\frac{1}{z}\sqrt[3]{8788.z}.$$

Le nombre $8788=2^2.13^3$; on fera donc $z=2$, ce qui donnera

$$x^2-y=13,\quad \text{d'où}\quad y=x^2-13,$$

puis $\quad 92=2(4x^3-39x)\quad$ ou $\quad 4x^3-39x-46=0.$

Cette équation a -2 pour racine commensurable; donc $y=-9$, et par conséquent

$$\sqrt[3]{92+18\sqrt{-1}}=\sqrt[3]{2}(-2+3\sqrt{-1}).$$

CHAPITRE XXIV.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES EN FRACTIONS SIMPLES.

---

775. Soit $\frac{f(x)}{F(x)}$ une fraction algébrique dont les deux termes sont des fonctions entières et rationnelles de x, et qui de plus sont premières entre elles; et supposons encore que $f(x)$ soit d'un degré inférieur à $F(x)$, ce qui est permis; car, s'il n'en était pas ainsi, on effectuerait la division de $f(x)$ par $F(x)$, et on trouverait de cette manière un quotient composé d'une partie entière et d'une fraction dans laquelle le numérateur serait d'un degré moindre que le dénominateur. Nous allons nous proposer de *décomposer cette fraction* $\frac{f(x)}{F(x)}$ *en une somme de fractions simples ayant des quantités constantes pour numérateurs et pour dénominateurs respectifs les facteurs du premier degré* * *de* F(x).

---

* Il est facile de voir que *le dénominateur d'aucune de ces fractions ne saurait être une puissance d'un facteur premier différent de ceux de* F (x). En effet, soit $(x-a)$ un pareil facteur, et supposons que l'une des fractions partielles puisse être $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$, de sorte que l'on ait, par exemple,

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_p}{(x-a)^{\alpha-p}}+\frac{A_q}{(x-a)^{\alpha-q}}+\dots+\frac{B}{(x-b)^\beta}+\text{etc.}$$

Je réduis toutes les fractions qui suivent la première, en une seule, que je représente par $\frac{M}{N(x-a)^{\alpha-p}}$ (on suppose $p<q$), et j'aurai ainsi

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{M}{N(x-a)^{\alpha-p}}=\frac{AN+M(x-a)^p}{N(x-a)^\alpha}.$$

Or, le second membre de cette égalité est une fraction irréductible, donc on doit avoir l'identité $F(x)=N(x-a)^\alpha$, ce qui prouve que $(x-a)$ est un facteur simple de $F(x)$, qui entre dans ce polynome à la puissance α.

Supposons donc trouvées les m racines de l'équation $F(x)=0$, et *considérons d'abord le cas où elles sont toutes inégales*; désignons-les par $a, b, c, \ldots k$, et proposons-nous de déterminer les constantes A, B, C,... K de manière que l'on ait identiquement

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots+\frac{K}{x-k} \quad [1].$$

En multipliant les deux membres par $F(x)$, il viendra

$$f(x)=A\frac{F(x)}{x-a}+B\frac{F(x)}{x-b}+C\frac{F(x)}{x-c}+\ldots+K\frac{F(x)}{x-k} \quad [2].$$

Cette équation devant être identique, il faudra qu'après avoir effectué les opérations indiquées dans le second membre et ordonné par rapport à x, les coefficients des mêmes puissances de cette variable, dans les deux membres, soient égaux entre eux, ce qui donnera autant d'équations entre les inconnues A, B, C,... K qu'il y a de ces inconnues. Mais les calculs ainsi exécutés seraient beaucoup trop longs.

Au lieu d'opérer ainsi, on observera que l'équation [2] devant être vraie, quelle que soit x, on pourra y faire $x=a$, et alors toutes les quantités $\frac{F(x)}{x-b}, \frac{F(x)}{x-c}, \ldots \frac{F(x)}{x-k}$ se réduiront à zéro, puisque chacune renferme un facteur $(x-a)$. Quant à $\frac{F(x)}{x-a}$, elle deviendra $\frac{0}{0}$; mais on voit immédiatement que sa véritable valeur est $F'(a)$, d'après la règle du n° 506; donc, l'équation [2] se réduit à

$$f(a)=AF'(a), \quad \text{d'où} \quad A=\frac{f(a)}{F'(a)}.$$

On trouvera de même que

$$B=\frac{f(b)}{F'(b)}, \quad C=\frac{f(c)}{F'(c)}, \ldots K=\frac{f(k)}{F'(k)}.$$

Ainsi, en remplaçant A, B, C,...K par ces valeurs dans l'équa-

tion [2], on obtiendra une équation qui sera vérifiée lorsqu'on y remplacera x successivement par a, b, c,...k; mais est-on sûr qu'elle le sera aussi par toute autre valeur de x? Il est permis d'en douter; car, il faut bien remarquer qu'en général il ne suffit pas d'avoir trouvé des valeurs pour les coefficients indéterminés, pour conclure la vérité du développement que l'on cherhe, si l'on n'en a pas démontré *a priori* la possibilité. Or, l'équation [2] qui est du degré $(m-1)$ au plus est satisfaite par m valeurs de x, $x=a$, $x=b$, $x=c$,...$x=k$, ce qui est impossible à moins qu'elle ne soit identique (702). Donc on a aussi identiquement

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(a)}{F'(a).(x-a)}+\frac{f(b)}{F'(b).(x-b)}+\ldots+\frac{f(k)}{F'(k).(x-k)}.$$

776. Les raisonnements qui précèdent conviennent aux racines imaginaires tout aussi bien qu'aux racines réelles, de sorte que si $a=\alpha+\beta\sqrt{-1}$ et $b=\alpha-\beta\sqrt{-1}$, les constantes qui se rapporteront à ces deux racines conjuguées seront

$$A=\frac{f(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha+\beta\sqrt{-1})} \quad \text{et} \quad B=\frac{f(\alpha-\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha-\beta\sqrt{-1})}.$$

Comme elles ne différeront que par le signe du facteur $\sqrt{-1}$, la somme des deux fractions $\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$ reviendra à

$$\frac{M+N\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}+\frac{M-N\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}=\frac{2M(x-\alpha)-2N\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Par cette transformation, le développement de $\frac{f(x)}{F(x)}$ ne sera pas compliqué d'expressions imaginaires.

777. Passons maintenant au cas où le dénominateur $F(x)$ admet des facteurs multiples, de sorte que

$$F(x)=(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q\ldots(x-k).$$

On voit immédiatement que, dans ce cas, la décomposition indiquée par la formule [1] est impossible; car, en effectuant l'addi-

tion des fractions contenues dans le second membre, on obtiendra une fraction dans le dénominateur de laquelle $(x-a)$ n'entrera qu'à la première puissance, tandis que ce facteur se trouve à la n^{me} dans le dénominateur de la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$, qui, par hypothèse, est irréductible.

Afin de découvrir quelle forme doivent avoir les termes dans lesquels se décompose la fraction proposée $\frac{f(x)}{F(x)}$, prenons d'abord le cas le plus simple, et supposons que

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)}{(x-a)^n}.$$

Si l'on observe que $f(x)=f(a+\overline{x-a})$, on aura d'après le théorème de *Taylor*, et en désignant par $n'<n$ le degré de $f(x)$,

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n}=\frac{f(a)}{(x-a)^n}+\frac{f'(a)}{(x-a)^{n-1}}+\frac{\frac{1}{1.2}f''(a)}{(x-a)^{n-2}}+\ldots+\frac{\frac{1}{1.2.3\ldots n'}f^{n'}(a)}{(x-a)^{n-n'}}$$

Ainsi, $\frac{f(x)}{(x-a)^n}$ est décomposable en une somme de fractions dont les numérateurs sont constants, et qui ont pour dénominateurs les puissances n^{mes}, $(n-1)^{mes}$, $(n-2)^{mes}$,... du binome $(x-a)$.

D'après cela, si $F(x)=(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q\ldots(x-k)$, nous représenterons par $F_1(x)$ le produit $(x-b)^p(x-c)^q\ldots(x-k)$, et nous poserons

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\frac{A_2}{(x-a)^{n-2}}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{x-a}+\frac{f_1(x)}{F_1(x)} \quad [3],$$

d'où l'on tire, en multipliant les deux membres par $F(x)$, et en transposant ensuite,

$$\left.\begin{array}{r} f(x)-A\frac{F(x)}{(x-a)^n}-A_1\frac{F(x)}{(x-a)^{n-1}}-A_2\frac{F(x)}{(x-a)^{n-2}}-\ldots \\ -A_{n-1}\frac{F(x)}{x-a}=f_1(x).(x-a)^n \end{array}\right\} \quad [4].$$

Or, le second membre de cette équation est divisible par $(x-a)^n$: donc le premier doit l'être aussi. Pour exprimer qu'il en est ainsi, je vais l'ordonner suivant les puissances ascendantes de $(x-a)$, et pour cela je mettrai $f(x)$ sous la forme $f(a+\overline{x-a})$, de sorte que j'aurai, d'après le théorème de *Taylor*,

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^n(a)}{1.2.3\ldots n}(x-a)^n,$$

en supposant que $f(x)$ soit du degré n. On aura pareillement

$$\mathrm{F}(x)=\frac{\mathrm{F}^n(a)}{1.2.3\ldots n}(x-a)^n+\frac{\mathrm{F}^{n+1}(a)}{1.2.3\ldots(n+1)}(x-a)^{n+1}$$
$$+\frac{\mathrm{F}^{n+2}(a)}{1.2.3\ldots(n+2)}(x-a)^{n+2}+\ldots;$$

car, l'équation $\mathrm{F}(x)=0$ ayant n racines égales à a, son premier membre et ses $(n-1)$ premières dérivées doivent s'évanouir par la substitution de a au lieu de x (607). En remplaçant, dans [4], $f(x)$ et $\mathrm{F}(x)$ par les deux développements que nous venons de former, et ordonnant par rapport aux puissances ascendantes de $(x-a)$, il viendra

$$\left.\begin{array}{l}
\left[f(a)-\mathrm{A}\dfrac{\mathrm{F}^n(a)}{1.2.3\ldots n}\right] \\
+\left[f'(a)-\mathrm{A}\dfrac{\mathrm{F}^{n+1}(a)}{1.2.3\ldots(n+1)}-\mathrm{A}_1\dfrac{\mathrm{F}^n(a)}{1.2.3\ldots n}\right](x-a) \\
+\left[\dfrac{f''(a)}{1.2}-\mathrm{A}\dfrac{\mathrm{F}^{n+2}(a)}{1.2.3\ldots(n+2)}-\mathrm{A}_1\dfrac{\mathrm{F}^{n+1}(a)}{1.2.3\ldots(n+1)}-\mathrm{A}_2\dfrac{\mathrm{F}^n(a)}{1.2.3\ldots n}\right](x-a)^2 \\
\vdots \\
+\left[\dfrac{f^{n-1}(a)}{1.2\ldots(n-1)}-\mathrm{A}\dfrac{\mathrm{F}^{2n-1}(a)}{1.2.3\ldots(2n-1)}-\mathrm{A}_1\dfrac{\mathrm{F}^{2n-2}(a)}{1.2.3\ldots(2n-2)}-\mathrm{A}_2\dfrac{\mathrm{F}^{2n-3}(a)}{1.2.3\ldots(2n-3)}-\ldots\right. \\
\qquad\qquad\left.-\mathrm{A}_{n-1}\dfrac{\mathrm{F}^n(a)}{1.2.3\ldots n}\right](x-a)^{n-1}
\end{array}\right\}=f_1(x).(x-a)^n \quad [5]$$

Tous les termes qui suivent le dernier de ceux que nous avons écrits dans le premier membre de cette équation renfermant le facteur $(x-a)$ à une puissance supérieure à la $(n-1)^{me}$, il faut, pour que ce premier membre soit, comme le second, divisible par $(x-a)^n$, que les coefficients de tous ses termes soient

nuls. On aura donc, d'après cela, pour déterminer les n coefficients $A, A_1, A_2, \dots A_{n-1}$ les n équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
f(a) &= A\frac{F^n(a)}{1.2.3\dots n},\\
f'(a) &= A\frac{F^{n+1}(a)}{1.2.3\dots(n+1)} + A_1\frac{F^n(a)}{1.2.3\dots n},\\
\frac{f''(a)}{1.2} &= A\frac{F^{n+2}(a)}{1.2.3\dots(n+2)} + A_1\frac{F^{n+1}(a)}{1.2.3\dots(n+1)} + A_2\frac{F^n(a)}{1.2.3\dots n},\\
&\vdots\\
\frac{f^{n-1}(a)}{1.2\dots(n-1)} &= A\frac{F^{2n-1}(a)}{1.2.3\dots(2n-1)} + A_1\frac{F^{2n-2}(a)}{1.2.3\dots(2n-2)} + A_2\frac{F^{2n-3}(a)}{1.2.3\dots(2n-3)} + \dots\\
&\quad + A_{n-1}\frac{F^n(a)}{1.2.3\dots n}
\end{aligned}\right\} [6].$$

Il sera facile de tirer de ces équations les valeurs des coefficients indéterminés $A, A_1, A_2, \dots A_{n-1}$, et ces valeurs seront toujours finies et déterminées ; car, le coefficient $\frac{F^n(a)}{1.2.3\dots n}$ du dernier terme de chacune n'est pas nul, puisque $(x-a)$ n'est que n fois facteur dans $F(x)$.

Je dis maintenant que, si l'on remplace $A, A_1, A_2, \dots A_{n-1}$ par ces valeurs dans l'équation [4], cette équation deviendra une identité, de sorte qu'il en sera aussi de même de [3]. En effet, ces valeurs de $A, A_1, A_2, \dots A_{n-1}$ sont tirées des équations [6] qui expriment que le polynome

$$f(x) - A\frac{F(x)}{(x-a)^n} - A_1\frac{F(x)}{(x-a)^{n-1}} - \dots - A_{n-1}\frac{F(x)}{(x-a)}$$

et ses $(n-1)$ premières dérivées sont anéantis par l'hypothèse $x=a$; car, le premier membre de l'équation [5] est le résultat que l'on obtient en remplaçant dans ce polynome x par $\{a+(x-a)\}$ et en ordonnant ensuite par rapport aux puissances ascendantes de $(x-a)$; donc ce polynome est divisible (**607**) par $(x-a)^n$, et peut ainsi être mis sous la forme $f_1(x).(x-a)^n$, $f_1(x)$ désignant un polynome qu'il sera facile de connaître; donc les identités [4] et [3] sont satisfaites.

Ayant ainsi mis la fraction proposée $\frac{f(x)}{F(x)}$ sous la forme

$\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{(x-a)}+\frac{f_1(x)}{F_1(x)}$, on mettra de même $\frac{f_1(x)}{F_1(x)}$ sous la forme $\frac{B}{(x-b)^p}+\frac{B_1}{(x-b)^{p-1}}+\ldots+\frac{B_{p-1}}{x-b}+\frac{f_2(x)}{F_2(x)}$, en désignant le produit $(x-c)^q\ldots(x-k)$ par $F_2(x)$. En continuant de la même manière, on finira par trouver

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)}=&\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{x-a}\\&+\frac{B}{(x-b)^p}+\frac{B_1}{(x-b)^{p-1}}+\ldots+\frac{B_{p-1}}{x-b}\\&+\frac{C}{(x-c)^q}+\frac{C_1}{(x-c)^{q-1}}+\ldots+\frac{C_{q-1}}{x-c}\\&+\text{etc.}\\&\vdots\\&+\frac{G}{x-g}+\frac{H}{x-h}+\frac{K}{x-k}.\end{aligned}$$

778. Ici se présente une objection qu'il est important de prévenir : si au lieu de commencer par la racine a, on eût commencé par une autre racine, ou, en général, si on employait tout autre procédé pour effectuer la décomposition de la fraction proposée en fractions simples, serait-on arrivé au même résultat ?

Supposons que l'on eût pu obtenir un résultat différent :

$$\frac{A'}{(x-a)^{n'}}+\frac{A'_1}{(x-a)^{n'-1}}+\ldots+\frac{A'_{n-1}}{x-a}+\frac{B'}{(x-b)^{p'}}+\frac{B'_1}{(x-b)^{p'-1}}+\text{etc.}$$

Je dis d'abord que $n'=n$. En effet, s'il n'en est pas ainsi, soit $n>n'$; j'égale les deux développements et j'en tire la valeur de $\frac{A}{(x-a)^n}$. Cette valeur sera de la forme

$$\frac{A}{(x-a)^n}=\frac{\varphi(x)}{(x-a)^{n-1}.\psi(x)},$$

$(n-1)$ étant le plus grand exposant de $(x-a)$, quand on a réduit tous les termes du second membre au même dénominateur.

Cette dernière équation donne

$$A = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}(x-a),$$

ce qui exige que $A = 0$, car, cette équation étant vraie quelle que soit x, on peut y faire $x = a$. Donc, puisque A n'est pas nul, n' ne peut pas être différent de n.

Je dis maintenant que $A = A'$; car, si l'on réunit les deux termes $\frac{A}{(x-a)^n}$ et $\frac{A'}{(x-a)^n}$ en un seul $\frac{A-A'}{(x-a)^n}$, on conclura, en répétant le raisonnement qui précède, que $A - A' = 0$, d'où $A = A'$.

Les deux termes $\frac{A}{(x-a)^n}$ et $\frac{A'}{(x-a)^{n'}}$ étant égaux, on peut les supprimer dans l'équation formée en égalant les deux développements, et appliquer aux autres termes les raisonnements que nous venons de faire, et on en conclura que tous les termes correspondants à la racine a devront être identiques dans les deux membres. Il en sera de même pour tous les termes correspondants aux autres racines $b, c, \dots k$, de sorte que le développement de $\frac{f(x)}{F(x)}$ est unique.

779. D'après cela, nous pourrons nous dispenser de calculer les polynomes $f_1(x), f_2(x), \dots$ pour obtenir les valeurs des coefficients $B, B_1, \dots B_{p-1}$; $C, C_1, \dots C_{q-1}, \dots$; car, il suffira de remplacer dans les équations [6], a et n par b et par p; puis par c et par $q, \dots$ pour former les équations desquelles dépend la détermination de ces coefficients. On comprend, en effet, que si l'on avait commencé par la racine b au lieu de commencer par a, on aurait exécuté les mêmes calculs, sauf que a et n y auraient été remplacés respectivement par b et par p.

780. Tout ce que nous venons de dire des racines réelles égales de l'équation $F(x) = 0$ s'applique à ses racines imaginaires multiples; mais, en agissant pour ces dernières racines comme pour les premières, on introduirait des expressions imaginaires dans

le développement de $\frac{f(x)}{F(x)}$, et c'est ce qu'il faut en général éviter, ainsi que nous l'avons déjà remarqué (**776**). On y parviendra en modifiant la forme du développement. Soient $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ et $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ deux racines imaginaires conjuguées de l'ordre n de $F(x)=0$, on posera

$$\left.\begin{array}{l}\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{Ax+B}{(\overline{x-\alpha}^2+\beta^2)^n}+\frac{A_1x+B_1}{(\overline{x-\alpha}^2+\beta^2)^{n-1}}+\ldots\\ \qquad+\frac{A_{n-1}x+B_{n-1}}{\overline{x-\alpha}^2+\beta^2}+\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\end{array}\right\}\quad[7],$$

en désignant par $\psi(x)$ le quotient de la division de $F(x)$ par $(\overline{x-\alpha}^2+\beta^2)^n$. Alors, en multipliant les deux membres par $F(x)$ et en transposant, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l}f(x)-(Ax+B)\psi(x)-(A_1x+B_1)(\overline{x-\alpha}^2+\beta^2)\psi(x)\\ \quad-(A_2x+B_2)(\overline{x-\alpha}^2+\beta^2)^2\psi(x)-\ldots\\ \quad-(A_{n-1}x+B_{n-1})(\overline{x-\alpha}^2+\beta^2)^{n-1}\psi(x)=\varphi(x).(\overline{x-\alpha}^2+\beta^2)^n\end{array}\right\}[8].$$

Le second membre de cette équation étant divisible par $(\overline{x-\alpha}^2+\beta^2)^n$, il en devra être de même du premier, c'est-à-dire que l'équation, formée en égalant ce premier membre à zéro, devra avoir n racines égales à $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ et à $\alpha-\beta\sqrt{-1}$; donc, le premier membre de cette équation et ses $(n-1)$ premières dérivées devront s'anéantir, lorsqu'on y fera $x=\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$. Or, en désignant $\{\overline{x-\alpha}^2+\beta^2\}$ par R, pour abréger, on trouvera que, pour ces hypothèses, les polynomes

$$f(x)-\psi(x)\{(Ax+B)+R(A_1x+B_1)+R^2(A_2x+B_2)+\ldots+R^{n-1}(A_{n-1}x+B_{n-1})\},$$

$$\begin{array}{l}f'(x)-\psi'(x)\{(Ax+B)+R(A_1x+B_1)+R^2(A_2x+B_2)+\ldots+R^{n-1}(A_{n-1}x+B_{n-1})\}\\ \qquad-\psi(x)\{A+RA_1+R^2A_2+\ldots+R_{n-1}A_{n-1}+R'(A_1x+B_1)\\ \qquad+2RR'(A_2x+B_2)+\ldots+(n-1)R^{n-2}R'(A_{n-1}x+B_{n-1})\},\\ \qquad\vdots\end{array}$$

doivent devenir nuls pour $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$. En effectuant cette substitution, il viendra

$$\left.\begin{array}{l} f(\alpha+\beta\sqrt{-1})-\psi(\alpha+\beta\sqrt{-1})\cdot(A\alpha+B+A\beta\sqrt{-1})=0, \\ f'(\alpha+\beta\sqrt{-1})-\psi'(\alpha+\beta\sqrt{-1})(A\alpha+B+A\beta\sqrt{-1}) \\ \quad -\psi(\alpha+\beta\sqrt{-1})\{A+2\beta\sqrt{-1})A_1\alpha+B_1+A_1\beta\sqrt{-1})\}=0. \\ \quad \vdots \end{array}\right\} [9].$$

Chacune de ces n équations se décomposera en deux autres; car, il faudra égaler à zéro la partie réelle et la partie imaginaire de leurs premiers membres, ce qui fera en tout $2n$ équations entre les $2n$ indéterminées A, B, A_1, B_1,... A_{n-1} et B_{n-1}. On voit par la forme même de ces équations que l'on tirera des deux premières les valeurs de A et de B; de la troisième et de la quatrième, celles de A_1 et de B_1; de la cinquième et de la sixième, celles de A_2 et de B_2, et ainsi de suite.

Remarquons d'ailleurs que l'on n'obtiendrait pas de nouvelles équations de condition, en substituant $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ au lieu de $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ à la place de x; car, pour effectuer cette substitution, il suffirait de changer $+\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$ dans les équations [9]; et par conséquent les équations dans lesquelles se décomposerait chacune des nouvelles seraient identiques avec celles qu'on a déduites des premières.

On démontrera d'ailleurs, comme au n° **776**, que quand on aura substitué ces valeurs des coefficients A, B, A_1, B_1, A_2, B_2,... dans les équations [7] et [8], elles deviendront identiques, et il sera facile aussi de prouver que la décomposition ne peut se faire que d'une seule manière.

781. Exemple. *Décomposer la fraction*

$$\frac{2x-1}{x^7-7x^6+20x^5-32x^4+35x^3-29x^2+16x-4}$$

en fractions simples.

Le dénominateur $F(x)=(x-1)^3(x-2)^2(x^2+1)$. En conséquence je pose

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{f_1(x)}{F_1(x)},$$

d'où $$f(x)-A\frac{F(x)}{(x-1)^3}-A_1\frac{F(x)}{(x-1)^2}-A_2\frac{F(x)}{(x-1)}=f_1(x).(x-1)^3.$$

Je vais donc développer le premier membre de cette équation suivant les puissances croissantes de $(x-1)$, en m'arrêtant à la seconde puissance de ce binome. On trouvera que

$$f(1)=1,\ f'(1)=1,\ \frac{F'''(1)}{1.2.3}=2,\ \frac{F^{\text{iv}}(1)}{1.2.3.4}=-2,\ \frac{F^{\text{v}}(1)}{1.2.3.4.5}=-1,\ldots$$

partant

$$f(x)=f(1+\overline{x-1})=1+2(x-1);$$

$$F(x)=F(1+\overline{x-1})=2(x-1)^3-2(x-1)^4-(x-1)^5+\ldots;$$

donc

$$\left.\begin{array}{l} \quad 1-2A \\ +[2+2A-2A_1](x-1) \\ +[\qquad A-2A_1-2A_2](x-1)^2 \\ \vdots \end{array}\right\}=f_1(x).(x-1)^3.$$

On tire de cette équation

$$1-2A=0,\quad 2+2A-2A_1=0,\quad A-2A_1-2A_2=0;$$
$$A=\tfrac{1}{2},\qquad A_1=\tfrac{3}{2},\qquad A_2=\tfrac{7}{4}.$$

Je pose maintenant

$$\frac{f_1(x)}{F_1(x)}=\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{B_1}{x-2}+\frac{f_2(x)}{F_2(x)}:$$

d'où je tire

$$\left.\begin{array}{l} \quad 3-\ 5B \\ +[2-19B-5B_1](x-2) \end{array}\right\}=f_2(x).(x-2)^2,$$

et par suite

$$3-5B=0,\quad 2-19B-5B_1=0,\quad B=\tfrac{3}{5},\quad B_1=-\tfrac{47}{25}.$$

Je pose enfin

$$\frac{f_2(x)}{F_2(x)}=\frac{C}{x-\sqrt{-1}}+\frac{D}{x+\sqrt{-1}},$$

$$f(+\sqrt{-1})=2\sqrt{-1}-1,\ F'(+\sqrt{-1})=4(1+7\sqrt{-1});$$

$$C=\frac{2\sqrt{-1}-1}{4(1+7\sqrt{-1})}=\frac{13+9\sqrt{-1}}{200},\ D=\frac{13-9\sqrt{-1}}{200},$$

$$\frac{C}{x-\sqrt{-1}}+\frac{D}{x+\sqrt{-1}}=\frac{13x-9}{100(x^2+1)};$$

et enfin

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{3}{2(x-1)^2}+\frac{7}{4(x-1)}+\frac{3}{5(x-2)^2}-\frac{47}{25(x-2)}$$
$$+\frac{13x-9}{100(x^2+1)}.$$

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE Ier. INTRODUCTION.

CHAPITRE II. DES OPÉRATIONS DE L'ALGÈBRE.

CHAPITRE III. DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ALGÉBRIQUE.

CHAPITRE IV. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

CHAPITRE V. DISCUSSION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES.

CHAPITRE VI. THÉORIE DES INÉGALITÉS.

CHAPITRE VII. DE L'ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ.

CHAPITRE VIII. DES ÉQUATIONS DU DEUXIÈME DEGRÉ.

CHAPITRE IX. PUISSANCES ET RACINES DES QUANTITÉS ALGÉBRIQUES.

CHAPITRE X. DES PROGRESSIONS ET DES SÉRIES.

CHAPITRE XI. DES FRACTIONS CONTINUES.

CHAPITRE XII. DES LOGARITHMES ET DE LEURS APPLICATIONS.

CHAPITRE XIII. THÉORIE DES FONCTIONS DÉRIVÉES.

CHAPITRE XVII. DE LA TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS.

CHAPITRE XVIII. DES RACINES ÉGALES DES ÉQUATIONS.

CHAPITRE XIX. DES ÉQUATIONS SUSCEPTIBLES D'ABAISSEMENT.

CHAPITRE XX. DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

CHAPITRE XXI. DES DIFFÉRENCES FINIES.

CHAPITRE XXII. DE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

CHAPITRE XXIII. THÉORIE DES ÉQUATIONS-BINOMES.

CHAPITRE XXIV. DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES EN FRACTIONS SIMPLES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Imprimerie de Ch. Lahure (ancienne maison Crapelet)
rue de Vaugirard, 9, près de l'Odéon.



